MA 604 - Espaços Métricos
Lista de Exercícios I
agosto de 2006

1. Mostre que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

2. Dados subconjuntos $A, B \subset U$, demonstre as seguintes igualdades:

   (a) $(A')' = A$;

   (b) $A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = U$;

   (c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

   (d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

3. Mostre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ se e somente se $C \subset A$.

4. Defina a *diferença simétrica* entre os conjuntos A e B como $(A - B) \cup (B - A)$. Denote a diferença simétrica por $A + B$ e a intersecção $A \cap B$ por $A \cdot B$.

   (a) Mostre que $\mathcal{P}(X) = 2^X$, com as operações $+$ e $\cdot$ definidas acima é um anel comutativo com identidade[1].

   (b) Mostre que $\mathcal{P}(X)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$ com a soma definida acima e o produto escalar definido por $\overline{0}A = \emptyset$ e $\overline{1}A = A$, para todo $A \subset X$.

5. Mostre que o produto cartesiano é distributivo em relação a união, ou seja, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

6. Quantas relações existem em um conjunto com n elementos?

7. Sobre o conjunto L de todas as retas do plano, mostre que paralelismo é relação de equivalência mas perpendicularismo não.

8. Definimos a diagonal do produto $X \times X$ como $I_X = \{(x, y) \in X \times X | x = y\}$. Dada uma relação R de X em Y, mostre que:

[1] Ou seja, ambas as operações são associativas, comutativas, possuem elementos neutros (0 da operação $+$ e 1 da operação $\cdot$), todo elemento possui inverso aditivo e é válida a propriedade distributiva $A \cdot (B + C) = A \cdot B + B \cdot C$.

(a) $I_Y \circ R = R = R \circ I_X$;

(b) R é reflexiva $\Leftrightarrow I_X \subset R$

(c) R é irreflexiva $\Leftrightarrow I_X \cap R = \emptyset$

(d) R é transitiva $\Leftrightarrow (R \circ R) \subset R$

(e) R é atransitiva $\Leftrightarrow (R \circ R) \cap R = \emptyset$

(f) R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

(g) R é antisimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I_X$

9. Seja $\mathbb{Q}[X]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais e $A = \mathbb{Q}[X] - \mathbb{Q}$. Defina em A a relação $f < g \Leftrightarrow g = qf$ para algum $q \in A$. Mostre que esta é uma ordem estrita em A (uma ordem irreflexiva).

10. Dê um exemplo de um conjunto A e um conjunto $\mathcal{O}$ de ordens em A tal que $\bigcup_{R \in \mathcal{O}} R$ não é uma ordem em A.

11. Seja L um conjunto parcialmente ordenado onde todo subconjunto possui elemento maximal e elemento minimal (qualquer que seja $K \subset L$, existem $m, l \in K$ tais que $l \leq a \leq m$, para todo $a \in K$). Mostre que L é finito.

12. Dê um exemplo de um conjunto A uma relação antisimétrica R que não esteja contida em nenhuma ordem.

13. Considere conjuntos ordenados A e B e função $f : A \to B$ tal que $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Mostre que f é injetora.

14. Seja Q o conjunto de todas as ordens de um conjunto A. O par $(Q, \subset)$ é também um conjunto ordenado. Mostre que T é um elemento maximal de $(Q, \subset)$ se e somente se T for uma ordem total em T. Faça um diagrama de $(Q, \subset)$ no caso de termos $A = \{0, 1, 2\}$ (são 19 ordens no total).