MA 604 - Espaços Métricos
Lista de Exercício III
setembro de 2006

1. Seja $M = \{a, b, c\}$ e defina uma função $d(x, y)$ de acordo com a tabela

	a	b	c
a	0	r	s
b	r	0	t
c	s	t	0

   ,

   com $r \leq s \leq t$. Mostre que $d(\cdot, \cdot)$ torna M espaço métrico se e somente se $t \leq r + s$.

2. Em cum conjunto arbitrário M, defina $d(x, x) = 0$ para todo $x \in M$ e $d(x, y)$ um número qualque no intervalo $[1, 2]$. Mostre que (M, d) é espaço métrico.

3. Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função tal que $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$ e $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para $x, y, z \in M$ quaisquer. Mostre que dé uma métrica.

4. Para cada uma das condiçoes que caracterizam uma métrica, obtenha $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não a cumpre mas satisfaz as outras três.

5. Dadas duas métricas d_1 e d_2 definidas em um espaço M, quais das seguintes funções são métricas: $d_1 + d_2, \max\{d_1, d_2\}, \min\{d_1, d_2\}$.

6. Mostre que um espaço métrico é discreto se e somente se toda intersecção de conjuntos abertos for um conjunto aberto.

7. Um espaço métrico é dito *ultra-métrico* se $d(x, z) \leq \max_{y \in M}\{d(x, y), d(y, z)\}$ para quaisquer $x, z \in M$.

   (a) Dê um exemplo de um espaço ultra-metrico.

   (b) Dadas duas bolas abertas A, B em um espaço ultra-métrico com $A \cap B \neq \emptyset$, mostre que $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

8. Mostre que todo conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tem cardinalidade $\aleph_1$.

9. Para cada um dos espaços métricos (M, d) abaixo dê um exemplo de um sub-espaço $S \subset M$, $S \neq M$ e isometria $i : M \to S$. Caso seja impossível, demosntre a impossibilidade.

   (a) $\mathbb{R}$ com a métrica euclidiana.

   (b) $\mathbb{R}$ com a métrica discreta.

   (c) $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana (*difícil, é necessário antes mostrar quais são as isometrias de* $\mathbb{R}^n$).

   (d) $\mathbb{R}[X] = \{polin\hat{o}mioscomcoeficientesreais\}$ com a métrica definida pela norma

   $$\|a_n X^n + ... + a_1 X + a_0\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i| .$$

10. Considere os espaços métricos (X_i, d_i) onde $X_1 = X_2 = X_3 = \mathbb{R}^n$ com as métricas

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \\ d_2(x, y) &= \sum |x_i - y_i| \\ d_3 &= \max |x_i - y_i| . \end{aligned}$$

   (a) Mostre que a identidade não é uma isometria entre estes espaços.

   (b) Mostre que não existe isometria entre estes espaços.

11. Dados dois subconjuntos $X, Y \subset M$, defina a *distância* entre X e Y como $d(X, Y) = \inf \{d(x, y) \,|x \in X, y \in Y\}$.

   (a) Considere a diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid \in M\} \subset M \times M$ e mostre que se $z = (x, y) \notin \Delta$, então $d(z, \Delta) > 0$.

   (b) Dê um exemplo de conjuntos não vazios $A, B \subset M$ tais que $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.

12. *(*)* Considere a função $D_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$D_2(x, y) = \begin{cases} |x - y| & se\, \{x, y\}\, forL.D. \\ |x| + |y| & se\, \{x, y\}\, forL.I. \end{cases} .$$

(a) Mostre que $(\mathbb{R}^2, D_2)$ é espaço métrico. Descreva as bolas desta métrica.

(b) Para $n > 1$, defina de modo semelhante uma métrica D_n em $\mathbb{R}^n$. Mostre que existe isometria entre $(\mathbb{R}^2, D_2)$ e $(\mathbb{R}^n, D_n)$

(c) Determine um espaço vetorial normado $(V, \|\|)$ e um subconjunto $W \subset V$ que seja isométrico a $(\mathbb{R}^2, d)$.

13. *(*)* Dado espaço métrico M, seja $\Phi(M)$ a coleção de todos os subconjuntos $X \subset M$ que são limitados, não vazios e cumprem a condição: $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in X$. Dados $X, Y \in \Phi(M)$, defina

$$\rho(X, Y) = \max\left\{\sup_{x\in X} d(x, Y), \sup_{y\in Y} d(X, y)\right\}.$$

(a) Prove que ρ é uma métrica em $\Phi(M)$ (*métrica de Hausdorff).*

(b) Mostre que $\rho(X, Y) = \inf\{r > 0 | X \subset B_r(Y)\, eY \subset B_r(X)\}$.

(c) Seja $M = \mathbb{R}^n$, $X = S_1(0)$ e $\Sigma = \{S_2(x) | x \in \mathbb{R}^n\} \subset \Phi(M)$. Determine $\rho(X, \Sigma)$ (*note que* X *é um ponto de* $\Phi(M)$ *enquanto* Σ *é subconjunto de* $\Phi(M)$ *).* Encontre $Y \in \Sigma$ tal que $\rho(X, Y) = \rho(X, \Sigma)$.

14. *(*)* Seja M espaço métrico e $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas de M em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $D : \mathcal{B}(M; \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(M; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $D(f, g) = \sup_{z\in M} |f(x) - g(x)|$ é uma métrica em $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$.
Considere a aplicação $\xi : \Phi(M) \to \mathcal{B}(M; \mathbb{R})$ definida por $\xi(X) = d_X$, onde $d_X : M \to \mathbb{R}$ é dada por $d_X(y) = d(y, M)$.

(b) Mostre que, para $X, Y \in \Phi(M)$ arbitrários, $\sup_{z\in M} |d_X(z) - d_Y(z)| < \infty$, ou seja, ξ assume de fato valores em $\mathcal{B}(M; \mathbb{R})$.

(c) Mostre que ξ é uma isometria, ou seja, $\rho(X, Y) = D(d_X, d_Y)$ (onde ρ é a distância de Hausdorff).

Os exercícios assinalados com *(*)* são complicados e darão bastante trabalho. Faça-os se sentir-se desafiado, ignore-os se achar que são desistimulantes.