MA502 - Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas

1^o Semestre de 2007

Lista de Exercícios 4

1. Defina "bissetriz de um ângulo" e demonstre que todo ângulo possui uma e apenas uma bissetriz.
2. Mostre que todo triângulo equilatero é equiângulo.
3. Mostre que a relação de congruência de triângulos é de fato uma relação de equivalência (satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva)
4. Sejam $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ dois segmentos que se interceptam em um ponto F, ponto médio de ambos. Demonstre que:
   (a) $\overline{AR} \simeq \overline{HB}$ e $\overline{AB} \simeq \overline{HR}$;
   (b) $\Delta FAB \simeq \Delta FHR$.
5. Critique o seguinte "paradoxo" geométrico:
   Todo triângulo é isóceles: Dado triângulo ΔABC, considere a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ e o bissetro perpendicular do lado $\overline{AB}$. A partir de seu ponto de intersecção E, trace as alturas $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$ relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente e trace os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{EB}$. Os triângulos retângulos ΔCFE e ΔCGE são congruentes pois tem CE como hipotenusa comum e $\angle FCE \simeq \angle GCE$ (pois $\overline{CE}$ é bissetriz do ângulo). Consequentemente $\overline{CF} \simeq \overline{CG}$ e
   $\overline{EF} \simeq \overline{EG}$. Todo ponto do bissetor perpendicular de $\overline{AB}$ é equidistante de A e de B, de modo que $\overline{EA} \simeq \overline{EB}$. Como os ângulos $\angle EFA$ e $\angle EGB$ aão ambos ângulos retos, temos que os triângulos ΔEFA e ΔEGB são congruentes, temos que $\overline{FA} \simeq \overline{GB}$. Como $|CF| + |FA| = |CG|+|GB|$ temos que $|CA| = |CB|$ e o triângulo ΔABC é isóceles.
6. Seja ΔABC triângulo e P, Q e R os pontos médios dos lados do triâgulo ΔABC.
   (a) Mostre que ΔABC é isóceles se e somente se ΔPQR é isoceles.
   (b) Mostre que ΔABC é equilátero se e somente se ΔPQR é equilátero.
7. Mostre que:
   (a) A bissetriz $\widehat{A}$ de um triângulo ΔABC é perpendicular ao lado BC se e somente se o triângulo for isóceles com $\overline{AB} \simeq \overline{AC}$.
   (b) Dado um triângulo isóceles com base $\overline{BC}$, a mediana desde o vértice A coincide com a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$.
8. Considere um quadrado (quadrilátero com quatro lados e quatro ângulos congruentes) $ABCD$ com P, Q, R e S os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ respectivamente.
   (a) Mostre que $\Delta PQR \simeq \Delta QRS$.
   (b) Podemos concluir que $PQRS$ é um quadrado?
9. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos com $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ e $\angle CAB \simeq \angle FDE$. Podemos concluir que $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$? Demosntre ou dê contra-exemplo.
10. Seja m a mediatriz de um segmento $\overline{QT}$, P um ponto do mesmo lado de m que Q e R o ponto de intersecção de m com o segmento $\overline{PT}$.
    (a) Mostre que $|PT| = |PR| + |RQ|$.
    (b) Considerando o item anterior, deduza que o caminho mais curto de P a Q passando por um ponto de m é o caminho que passa pelo ponto R.
    (c) Deduza do item anterior (considerando que a luz percorre caminhos mínimos) que ao refletri em um espelho plano, "o angulo de inciência é igual ao ângulo de reflexão".