MA 148 — FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

Professor Responsável:

Marcelo Firer

IMECC

Departamento de Matemática

UNICAMP

1^o Semestre de 2006

1 O Importante

Neste documento você está recebendo 6 listas contendo mais de 80 exercícios, as quais incluem questões de provas e exames aplicados em anos anteriores (em disciplina equivalente no perodo diurno). Esses exercícios definem o que você deve fazer para aprender o conteúdo e aprovar nesta disciplina.

O importante é que VOCÊ DEVE FAZER TODOS os exercícios. Porque todos eles são importantes para a aprendizagem e todos eles serão cobrados, por amostragem ou por analogia. TODOS significa TODOS. Cada vez que você tenha alguma dúvida à respeito desse significado, leia novamente este parágrafo. Não especule pensando que você poderá, talvez, aprovar na disciplina sem ter feito TODOS os exercícios. Isso não acontecerá.

Fazer um exercício envolve uma atividade SUA. O exercício não vai ser feito para você. Mesmo que você precise de uma ajuda para fazê-lo, o que será freqüente e normal, você deve ter pensado previamente nele. E pensado muito! Essa reflexão SUA, pessoal e intransferível é o principal fator de aprendizagem.

Muitas vezes você terá a necessidade de consultar os monitores. Consulte-os sem hesitação. Eles estão aí para atender você. Mas não peça para eles fazerem o exercício para você. Peça, sim, dicas, empurrões, sugestões. Conte para o monitor até onde você chegou e peça para ele criticar seu raciocínio. Finalmente, peça para o monitor conferir se a solução que você encontrou é correta ou não.

2 Objetivos

O objetivo deste curso é aprender algumas das técnicas mais importantes da Matemática: definir rigorosamente, fazer demonstrações e encontrar contra-exemplos. Você aprenderá *fazendo*. Seu principal mestre é você mesmo, com lápis e papel, resolvendo os exercícios propostos. Encare seriamente todos os problemas sugeridos, *consulte suas dúvidas com os professores, os monitores e seus colegas* e use a aula para trabalhar ativamente.

3 Bibliografia

- *FOUNDATIONS OF ABSTRACT MATHEMATICS*
  D.C. Kurtz
  Editora McGraw–Hill, 1992.

- *A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO*
  E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner & A.C. Morgado
  Editora da SBM, 1996.

- *TEORIA DOS CONJUNTOS*

  S. Lipschutz

  Editora McGraw–Hill, 1972.

4 Provas e Exame

Para cada duas listas de exercícios haverá uma prova. No dia correspondente à mesma, na primeira hora da aula, os alunos presentes resolverão dois exercícios claramente correlacionados (mas não idênticos) com os exercícios das listas correspondentes. O exame conterá questões sobre todas as listas e terá a duração de duas horas. Não haverá surpresas nem "pegadinhas" de nenhum tipo. Por isso é fundamental que você faça todos os exercícios e confira que sua resolução está correta. Além das provas, estou distribuindo os exercícios das listas entre os alunos da turma, de modo que a cada aluno estão sendo atribuidos quatro exercícios. Os alunos que entregarem os exercícios corretamente corrigidos até a data prevista, digitados em LATEX, terão até meio ponto adicional na nota. O LATEX é um programa desenvolvido especificamente para redação de textos matemáticos e aprender rudimentos de LATEX com certeza será proveitoso para todos aqueles que se disporem a estudar um pouco. Uma breve intodução ao LATEX, escrita por Doherty Andrade da Universidade Estadual de Maringá, pode ser acessada na página http://www.ime.unicamp.br/ mfirer/cursos.html. Todo o material do curso pode ser acessado na página http://www.ime.unicamp.br/˜mfirer/cursos.html.

5 Avaliação

Seja M a média aritmética das notas das três provas e E a nota do exame. A média final será dada por $M_F = \text{Máximo}\ \{M\ ,\ (M + 2\ E)/3\}$. Será APROVADO o aluno com $M_F \geq 5,0$.

6 Atendimento

Atenderei os alunos às terças feiras, das 19:30 às 21:00, na sala 312 do IMECC.

7 Créditos

Esta lista de exercícios, assim como todo o conceito da disciplina, foi desenvolvida originalmente pelos professores José Mário Martinez e Lucio Tunes Santos, do Depto. de Matemática Aplicada do IMECC, com grande sensibilidade e bom gosto. Os acréscimos que fiz são marginais e procuram preservar o espírito do curso.

8 Cronograma

07/03	Apresentação.
09/03, 14/03, 16/03, 21/03	Aula teórico-prática sobre a Lista 1.
23/03, 28/03, 30/03, 04/04	Aula teórico-prática sobre a Lista 2.
06/04	**PROVA** sobre as Listas 1 e 2.
11/04, 18/04, 20/04, 25/04, 27/04	Aula teórico-prática sobre a Lista 3.
02/05, 04/05, 09/05, 11/05, 16/05	Aula teórico-prática sobre a Lista 4.
18/05	**PROVA** sobre as Listas 3 e 4.
23/05, 25/05, 30/05, 01/06, 06/06	Aula teórico-prática sobre a Lista 5.
08/06, 13/06, 20/06, 22/06, 27/06	Aula teórico-prática sobre a Lista 6.
29/06	**PROVA** sobre as Listas 5 e 6.
04/07	Entrega das Notas.
11/07	**EXAME.**

	QUI	TER	QUI	TER	QUI	TER	QUI	TER	QUI	TER
MARÇO		07	09	14	16	21	23	28	30	
		A	L1	L1	L1	L1	L2	L2	L2	
ABRIL		04	06	11	18	20	25	27		
		L2	$\boxed{\text{P1}}$	L3	L3	L3	L3	L3		
MAIO		02	04	9	11	16	18	23	25	30
		L4	L4	L4	L4	L4	$\boxed{\text{P2}}$	L5	L5	L5
JUNHO	01	06	08	13	15	20	22	27	29	
		L5	L5	L6	L6	L6	L6	L6	$\boxed{\text{P3}}$	
JULHO		04	06	11	13					
		$\boxed{\text{N}}$	$\boxed{\text{?}}$	$\boxed{\text{E}}$						

Lista 1
Números Reais

O conjunto dos números REAIS é munido das operações SOMA (+) e PRODUTO ($\cdot$) e pela relação de ORDEM (<). As seguintes propriedades são válidas:

S1 Associatividade da soma:

Para quaisquer números reais a, b e c, $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$.

S2 Comutatividade da soma:

Para quaisquer números reais a e b, $a+b = b + a$.

S3 Elemento neutro da soma:

Existe um número real 0 (zero) tal que para todo número real a, $0 + a = a$.

S4 Inverso aditivo:

Para todo número real a existe um número real real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

P1 Associatividade do produto:

Para quaisquer números reais a, b e c, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$.

P2 Comutatividade do produto:

Para quaisquer números reais a e b, $a \cdot b = b \cdot a$.

P3 Elemento neutro do produto:

Existe um número real 1 (um), $1 \neq 0$, tal que para todo número real a, $1 \cdot a = a$.

P4 Inverso multiplicativo:

Para todo número real $a \neq 0$ existe um número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

D1 Distributividade:

Para quaisquer números reais a, b e c, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

O1 Tricotomia:

Para quaisquer números reais a, b e c apenas uma das seguintes relações é válida: $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$.

O2 Transitividade:

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

O3 Consistência com respeito a soma:

Para quaisquer números reais a, b e c, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

O4 Consistência com respeito ao produto:

Para quaisquer números reais a, b e c, se $0 < c$ e $a < b$ então $c \cdot a < c \cdot b$.

Além disso, a seguinte notação será utilizada:

N1 Subtração:

Para quaisquer números reais a e b, $a-b = a + (-b)$.

N2 Divisão:

Para quaisquer números reais a e $b \neq 0$, $a/b = \dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Exercício 1: Sejam a, b e c números reais. A partir das propriedades **S1**, ..., **O4** demonstrar cada uma das seguintes proposições:

(a) Se $a + b = c + b$ então $a = c$.

(b) Se $a + a = a$ então $a = 0$.

(c) $a = -(-a)$.

(d) $0 = -0$.

(e) $a \cdot 0 = 0$. **Sugestão:** $0 + 0 = 0$ e $\boxed{\textbf{D1}}$.

(f) Se $a \neq 0$ então $-a \neq 0$.

(g) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(h) $a + b = a - (-b)$.

(i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

(j) $(-1) \cdot a = -a$.

(k) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(l) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = -(a \cdot b \cdot c)$.

(m) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

(n) Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

(o) Se $a \cdot a = 1$ então $a = 1$ ou $a = -1$.

(p) Se $a \neq 0$ e $a \cdot b = a \cdot c$ então $b = c$.

(q) $1 = 1^{-1}$ e $-1 = (-1)^{-1}$.

(r) Se $a \neq 0$ então $a^{-1} \neq 0$ e $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

(s) Se $a \neq 0$ então $a = (a^{-1})^{-1}$.

(t) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Exercício 2: Sejam a, $b \neq 0$, c e $d \neq 0$ números reais. Prove que:

(a) $0/b = 0$.

(b) $a/b = c/d$ se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$.

(c) $a/(b/d) = (a \cdot d)/b$.

(d) $(b/d)^{-1} = d/b$.

(e) $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$ e $(-a)/(-b) = a/b$.

(f) $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$.

(g) Se $a/b = c/d$ então:

(i) $(a + b)/b = (c + d)/d$,

(ii) $(a - b)/b = (c - d)/d$,

(iii) $(a + b)/(a - b) = (c + d)/(c - d)$ se $a - b \neq 0 \neq c - d$,

(iv) $a/b = (a + c)/(b + d)$ se $b + d \neq 0$.

(h) $(a/b) \pm (c/d) = (a \cdot d \pm b \cdot c)/(b \cdot d)$.

Exercício 3: Sejam a, b, c e d números reais. Prove as seguintes proposições:

(a) $0 < a$ se e somente se $-a < 0$.

(b) $0 < 1$.

(c) Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

(d) Se $a < b$ então $a - c < b - c$.

(e) Se $a + a = 0$ então $a = 0$.

(f) Se $a + a + a = 0$ então $a = 0$.

(g) $0 < a$ se e somente se $0 < a^{-1}$.

(h) Se $0 < a$ e $0 < b$ então $a < b$ se e somente se $b^{-1} < a^{-1}$.

(i) Se $a \neq 0$ então $0 < a \cdot a$.

(j) $a \cdot a + b \cdot b = 0$ se e somente se $a = b = 0$.

Exercício 4: Enuncie cada uma das afirmações abaixo em português. Escreva a negação de cada uma destas afirmações e determine (demonstrando ou fornecendo contra-exemplos) se estas são verdadeiras ou não.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, n é par ou n é ímpar.

b) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = -1$.

c) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$

Exercício 5: Comente as seguintes "demonstrações", explicitando em termos as propriedades dos números reais os erros existentes. Se for o caso, corrija as demonstrações e/ou o enunciado das proposições.

(a) Proposição: Dado $a \in \mathbb{R}$ positivo, então $a > a$.

Demonstração: Suponha que $a > 0$ e seja $b = \frac{1}{2}a$. Então $a > b > 0$ e consequentemente $ab > b^2$. Subtraindo a^2 de ambos os termos da desigualdade obtemos que $ab - a^2 > b^2 - a^2$ ou equivalentemente, $a\,(b-a) > (b+a)\,(b-a)$. Cancelando o fator $(b-a)$ de ambos os termos obtemos que $a > b + a$ e como $b > 0$ temos que $b + a > a$, ou seja, $a > a$.

(b) Proposição: $4 = 5$.

Demonstração:

$$\begin{array}{rc}
 & 16 - 36 = 25 - 45 \\
\Rightarrow & 16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \\
\Rightarrow & 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow & \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow & 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \\
\Rightarrow & 4 = 5
\end{array}$$

(c) Proposição: As raízes da equação $-x^2 + x + 6 = 4$ são os números 2 e -1.

Demonstração: Como

$$(3-x)\,(x+2) = -x^2 + x + 6 = 4$$

temos que

$$3 - x = 4 \text{ ou } x + 2 = 4$$

ou, equivalentemente, $x = 3 - 4 = -1$ ou $x = 4 - 2 = 2$.

Lista 2
Demonstrações com Inteiros

Exercício 1: Sejam p, q e r números naturais. Prove que:

(a) Se p e q são divisíveis por r então $p+q$ é divisível por r.

(b) Se p é divisível por r então pq é divisível por r.

(c) Se p é divisível por r então p^q é divisível por r.

Exercício 2: Sejam p, q e r números naturais. Prove que:

(a) $10p+q$ é divisível por 3 se e somente se $p+q$ é divisível por 3.

(b) $100r+10p+q$ é divisível por 3 se e somente se $r+p+q$ é divisível por 3.

(c) Inspirado nos itens (a) e (b) deduza o critério de divisibilidade por 3.

Exercício 3: Repita o processo do exercício anterior para a divisibilidade por 9.

Exercício 4: Inspirado nos Exercícios 2 e 3, prove a validade dos critérios de divisibilidade por 4, 6 e 8.

Exercício 5: Definimos $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n!$ é divisível por todos os números pares menores que n.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n!$ é par.

(c) $\forall n \geq 100$, $n!$ é divisível por 3.

(d) $\forall n \geq 30$, existe um número primo p tal que $n!$ é divisível por p.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n!)^2$ é divisível por $n!$.

Exercício 6: Seja $p = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$. Prove que p é divisível por 10^{11}.

Exercício 7: Prove, usando o `Algoritmo da Divisão`, que todo número racional tem uma expressão decimal finita ou periódica. Prove que o número cuja expansão decimal é dada por $0.101001000100001000001\ldots$ não é um número racional.

Exercício 8: Para as conjecturas abaixo, prove as verdadeiras e mostre contra-exemplos para as falsas.

a) Se $x \in \mathbb{Z}$ e $4x$ é par, então x é par.

b) Se $x \in \mathbb{Z}$ é par, então $4x$ é par.

c) Se $x \in \mathbb{Z}$ e x^2 é par, então x é par.

d) Se $x \in \mathbb{Z}$ e $3x$ é par, então x é par.

e) $x \in \mathbb{Z}$ é par se e somente se x^2 é par.

f) Se $x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $x+y+z$ é ímpar, então um número ímpar de inteiros em $\{x,\ y,\ z\}$ é ímpar.

Exercício 9: Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de números naturais. Prove que existe um subconjunto de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tal que a soma de seus elementos é divisível por n. **Sugestão:** convença-se, primeiro, de que esta proposição é verdadeira escrevendo vários exemplos. Para fazer a prova, inspire-se no conjunto $\{a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n\}$.

Exercício 10: Uma importante fórmula da Geometria, devida a Euler, diz que se P é um poliedro no espaço tridimensional, V é o número de seus vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces, então $V - A + F = 2$. Suponha agora que P é um poliedro com as seguintes características: (i) em cada vértice concorrem exatamente 3 faces; (ii) cada face de P é um polígono com 6 ou 5 lados. Prove que o número de faces com 5 lados é exatamente 12. Como ilustração desta propriedade observe a estrutura de uma bola de futebol. Medite também sobre o poliedro chamado dodecaedro.

Exercício 11: Prove, por indução em n, as seguintes proposições:

a) $\forall n \in I\!\!N,\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\forall n \in I\!\!N,\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

c) $\forall n \in I\!\!N,\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \leq n^3$.

d) $\forall n \in I\!\!N,\ 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$.

e) $\forall n \in I\!\!N,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

f) $\forall n \in I\!\!N$,;

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

g) $\forall n \in I\!\!N$,

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

h) O número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n.

Exercício 12: Definimos $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$, para todo $n \in I\!\!N$. Prove, por indução, que o número de maneiras diferentes nas quais pode ser ordenado um conjunto de n elementos é igual a $n!$. **Exemplo para esclarecer o enunciado:** o conjunto $\{a, b, c\}$, que tem 3 elementos, pode ser ordenado das seguintes maneiras: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, a, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$ e $\{c, b, a\}$.

Exercício 13: Suponha um campeonato de futebol com n times onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove por indução que o número total de jogos é $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercício 14: Numa festa há n homens e n mulheres. Prove, por indução, que o número de casais (homem com mulher) que podem ser formados é igual a n^2.

Exercício 15: Prove, por indução, que para todo $n \in I\!\!N$, $n^3 - n$ é divisível por 6.

Exercício 16: Prove, por indução, a seguinte proposição: "Dado um segmento de comprimento unitário, para todo $n \in I\!N$ pode-se construir com apenas régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt{n}$ " (Pitágoras).

Exercício 17: Use um ou dois lemas para provar que $5x^3$ é par se e somente se $3x^2$ é par.

Exercício 18: Demonstre que se p é primo e p divide c^2 então p divide c. Utilize este resultado para demonstrar que $\sqrt{p}$ é irracional para todo primo p.

Exercício 19: Encontre os erros nas demonstrações das proposições abaixo:

(a) Proposição: Todos os homens são carecas.

Demonstração: Todos concordamos que um homem com nenhum cabelo na cabeça é careca. Também concordamos que a pessoa com apenas um fio de cabelo também é careca. Mais ainda, se uma pessoa é careca, então outra pessoa que tenha apenas um fio de cabelo a mais também é careca. Em outras palavras, se as pessoas com n fios de cabelo é careca, então as pessoas que tem $n + 1$ fios te cabelo também é careca e temos por indução que uma pessoa com qualquer quantidade de fios de cabelo é careca.

(b) Proposição: Todos os cavalos são marrons.

Demonstração: Começamos demonstrando por indução que todos os cavalos são da mesma cor. Considere um conjunto A_1 com apenas 1 cavalo. Então, todos os cavalos de A_1 tem a mesma cor. Suponha então que em todo conjunto com n cavalos todos os cavalos tem a mesma cor. Seja $A_{n+1} = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ um conjunto com $n + 1$ cavalos. Vamos considerar os subconjuntos $B = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $C = \{a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ de A_{n+1}. Ambos são conjuntos com n elementos e por hipótese de indução, todos os cavalos de B tem a mesma cor, assim como todos os cavalos de C. Mas $a_2 \in B \cap C$, logo, todos os cavalos de B tem a mesma cor que o cavalo a_2 assim como todos os cavalos de C. Logo todos os cavalos de A_{n+1} tem a mesma cor e segue por indução que todos os cavalos tem a mesma cor. Como o cavalo da Maria Alice (da Secretaria de Graduação do Imecc) é marrom, temos que todos os cavalos são marrons.

Exercício 20: Existe um jogo chamado Torre de Hanoi. Descubra como funciona o jogo e determine o número mínimo de movimentos necessários para se resolver o jogo usando $1, 2, 3$ e 4 discos. Faça uma conjectura sobre o número mínimo de movimentos para se resolver o problema com n discos e prove o resultado por indução.

Lista 3
Operações com Conjuntos

Exercício 1: Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes proposições:

a) $A \subset A \cup B$.

b) $A \cap B \subset A$.

c) $A - B \subset A$.

d) $A \cap B \subset A \cup B$.

e) $B - (B - A) = A \cap B$.

f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

g) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

h) $A \cup (A \cap B) = A$.

i) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.

j) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.

k) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

l) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

m) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercício 2: Sejam A, B, C e D conjuntos. Para cada um dos seguintes teoremas enuncie em português a hipótese e a tese. Prove cada teorema.

a) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

b) $A \subset (C - B) \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$.

c) $A \cup B = C$ e $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow B = C - A$.

d) $A \subset C$ e $B \subset D \Longrightarrow A \cup B \subset C \cup D$.

e) $(A \cap C = A \cap B)$ e $(A \cup C = A \cup B) \Longrightarrow B = C$.

f) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Longrightarrow A = B$.

g) $A \subset B \Longrightarrow A \cap (C - B) = \emptyset$.

h) $A \cap C = \emptyset \Longrightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$.

i) $A \subset B \Longrightarrow A = B - (B - A)$.

j) $A \cup B \subset A \cap B \Longrightarrow A = B$.

k) $A \subset \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset$.

l) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

m) $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

n) $A \subset C$ e $B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B \subset C$.

o) $A - B \subset B \Longleftrightarrow A - B = \emptyset$.

p) $A \cup B \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$.

Exercício 3: Sejam A, B e C conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) Se $B \subset C$ então $A \cap B \subset A \cap C$.

(b) Se $A \cap B \subset A \cap C$ então $B \subset C$.

Exercício 4: Sejam A_1, A_2, ..., A_{98} conjuntos tais que $A_i \subset A_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, 97$. Prove que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{98} = A_{98}$.

Exercício 5: Explique a seguinte piada: *Ansioso, o pai pergunta ao parteiro "Doutor, é homem ou mulher?" O médico responde: "Sim".*

Exercício 6: Fernando Pessoa escreveu "Todo cais é uma saudade de pedra". Em Genóvia não há nenhum cais. O que acham os Genovienses sobre o verso de Fernando Pessoa?

Exercício 7: Sejam A, B, C e D conjuntos.

Prove ou dê um contra-exemplo:

a) $A \subset B$ e $C \subset D \Longrightarrow A \times C \subset B \times D$.

b) $A \neq \emptyset$ e $A \times B \subset A \times C \Longrightarrow B \subset C$.

c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

e) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

f) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

g) $(A \times B) \cap ((C - A) \times B) = \emptyset$.

h) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.

i) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

Exercício 8: Dado um número real $r \geq 0$, definimos os conjuntos $A_r = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| = r\}$ e $B_r = \{x \in \mathbb{R} | \, |x| \leq \mathbb{R}\}$. Seja $I = \{r \in \mathbb{Q} | r > 0\}$. Descreva de maneira explícita, como subconjunto dos reais, os seguintes conjuntos (e demonstre a identidade entre as duas descrições):

a) $\bigcup \lim_{r \in I} A_r$

b) $\bigcap \lim_{r \in I} A_r$

c) $\bigcup \lim_{r \in I} B_r$

d) $\bigcap \lim_{r \in I} B_r$

Lista 4
Funções

Exercício 1: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to A$ dada por $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x \neq 6 \\ 1 & , \quad x = 6 \end{cases}$.

a) Compute $f(3)$, $f(6)$ e $f(f(2))$.

b) Ache uma imagem inversa de 2 e 1.

Exercício 2: Para cada uma das seguintes funções prove ou exiba um contra-exemplo das afirmações: (i) f é injetora e (ii) f é sobrejetora.

a) $f : I\!R \to I\!R, \; f(x) = ax + b, \; a \neq 0$.

b) $f : I\!R \to I\!R - (-\infty, \; -1), \; f(x) = x^2 - 1$.

c) $f : I\!N \to I\!N, \; f(x) = 2x$.

d) $f : (0, 1] \to [1, \infty), \; f(x) = 1/x$.

e) $f : I\!R \to I\!R, \; f(x) = x - |x|$.

f) $f : I\!R - \{1\} \to I\!R, \; f(x) = 1/(1 - x)$.

g) $f : I\!R \to I\!R, \; f(x) = 1/(1 + x^2)$.

h) $f : I\!R \to I\!R, \; f(x) = \sqrt{|x|}$.

i) $f : I\!R \to I\!R, \; f(x) = -1/(2 + |x|)$.

j) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; f(n) = (3n - 1)(2 - n)$.

k) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; f(n) = \begin{cases} (n - 1)/2 & , \quad n \text{ ímpar} \\ -n/2 & , \quad n \text{ par} \end{cases}$.

l) $f : \mathbb{Z} \to I\!N, \; f(m) = m^2!$

m) $f : I\!N \to I\!N, \; f(x) = \begin{cases} x/2 & , \text{ se } x \text{ é par} \\ 3x + 1 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$.

n) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$.

o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$.

p) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy + x + y$.

q) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x, x)$.

r) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x$.

s) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + |y|$.

t) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(m, x) = mx$.

u) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 + y^2, x)$.

v) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x, y) = (3x-y, x+y)$.

w) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 + y, x - y)$.

x) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + y$.

y) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, 0)$.

z) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

Exercício 3: Para cada uma das funções abaixo prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações: (i) f é injetora e (ii) f é sobrejetora.

a) $f : (0, 1) \to \mathbb{N}$ definida da seguinte maneira: *Se a expansão decimal de x é infinita, então $f(x) = 1$. Se a expansão decimal de x é finita, então $f(x)$ é o número de dígitos da expansão decimal de x.* Por exemplo, $f(0.472) = 3$, $f(1/\pi) = 1$, etc.)

b) $f : A \to \mathcal{P}(A),\ f(x) = \{x\}$, para todo $x \in A$.

c) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \emptyset \to \mathbb{N},\ f(X) =$ soma dos elementos de X.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & , \ x \in \mathbb{Q} \\ -x & , \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Exercício 4: Considere os pares de funções selecionados do Exercício 2:

(a) e (b); (d) e (e); (h) e (o); (m) e (s); (p) e (q); (r) e (w).

Para cada um deles diga se a função composta está bem definida. Lembre-se que para cada par há duas possibilidades para formar a composição. Quando for possível defina a função composta.

Exercício 5: Sejam A, B, C conjuntos não vazios, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Prove ou dê contra-exemplo para cada uma das afirmações abaixo:

a) Se $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora então $g : B \to C$ também é sobrejetora.

b) Se $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora então $f : A \to B$ também é sobrejetora.

Exercício 6: Para cada função do Exercício 2 discuta se é possível definir a função inversa f^{-1} e em caso afirmativo escreva a definição.

Exercício 7: Seja f uma função bijetora. Prove que a inversa de f também é bijetora.

Exercício 8: Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$. Sejam $X, Y \subset A$ e $Z, W \subset B$. Prove as seguintes proposições:

a) $X \subset Y \Longrightarrow \mathrm{Im}f(X) \subset \mathrm{Im}f(Y)$.

b) $\mathrm{Im}f(X \cup Y) = \mathrm{Im}f(X) \cup \mathrm{Im}f(Y)$.

c) f injetora $\Longrightarrow$ $\mathrm{Im}f(X \cap Y) =$

$\mathrm{Im}f(X) \cap \mathrm{Im}f(Y)$.

d) Exiba um exemplo de f não injetora tal que $\mathrm{Im}f(X \cap Y) \neq \mathrm{Im}f(X) \cap \mathrm{Im}f(Y)$.

e) $Z \subset W \Longrightarrow \mathrm{Im}^{-1}f(Z) \subset \mathrm{Im}^{-1}f(W)$.

f) $\mathrm{Im}^{-1}f(Z \cup W) = \mathrm{Im}^{-1}f(Z) \cup \mathrm{Im}^{-1}f(W)$.

g) $\mathrm{Im}^{-1}f(Z \cap W) = \mathrm{Im}^{-1}f(Z) \cap \mathrm{Im}^{-1}f(W)$.

h) $X \subset \mathrm{Im}^{-1}f(\mathrm{Im}f(X))$.

i) f injetora $\Longrightarrow X = \mathrm{Im}^{-1}f(\mathrm{Im}f(X))$.

j) Mostre um exemplo onde $X \neq \mathrm{Im}^{-1}f(\mathrm{Im}f(X))$.

k) $\mathrm{Im}f(\mathrm{Im}^{-1}f(Z)) \subset Z$.

l) f sobrejetora $\Longrightarrow \mathrm{Im}f(\mathrm{Im}^{-1}f(B)) = B$.

Exercício 9: Seja $f : A \to B$. Mostre um exemplo onde $B \neq \mathrm{Im}f(\mathrm{Im}^{-1}f(B))$.

Exercício 10: Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que:

$$\mathrm{Im}^{-1}(g \circ f)(E) = \mathrm{Im}^{-1}f(\mathrm{Im}^{-1}g(E)) \ , \ \forall E \subset C \ .$$

Lista 5
Seqüências

Exercício 1: Mostre que toda seqüência convergente é acotada.

Exercício 2: Seja (x_k) uma seqüência tal que $\lim x_k = L > 0$. Prove que:

(a) Existe $M \in I\!N$ tal que $x_k > 0$ para todo $k \geq M$.

(b) Para todo $A < L$, existe $M \in I\!N$ tal que $x_k > A$ para todo $k \geq M$.

Exercício 3: Sejam $\lim a_n = A$ e $\lim b_n = B$. Prove que:

a) $\lim |a_n| = |A|$.

b) $\lim(a_n + b_n) = A + B$.

c) $\lim(a_n b_n) = AB$.

d) Se $B \neq 0$ então $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Exercício 4: Usando o exercício anterior, justifique a seguinte afirmação:

$$\lim \frac{3n^7 - 2n^6 + 5n^3 - 2n^2 + n - 1}{5n^7 - 8n^3 - 3n^2 - 9n - 1} = \frac{3}{5} \ .$$

Exercício 5: Escreva detalhadamente a negação de $\lim a_n = L$ e prove que a seqüência (a_n) definida por $a_n = (-1)^n$ não converge a nenhum número real.

Exercício 6: Mostre um exemplo de uma seqüência (a_n) e um conjunto A tal que

$\{a_n \mid n \in I\!N\} \subset A$ mas $\lim a_n \notin A$.

Exercício 7: Sejam (a_n) e (b_n) seqüências de números reais tais que $\lim a_n = L$ e $\lim(a_n - b_n) = 0$. Prove que $\lim b_n = L$.

Exercício 8: Suponha que $\lim x_k = \alpha$ e para todo $k \in I\!N, x_k > \beta$. Prove que $\alpha \geq \beta$.

Exercício 9: Sejam (x_k) e (y_k) duas seqüências reais. Prove que se (x_k) é acotada e $\lim y_k = 0$ então $\lim x_k \cdot y_k = 0$.

Exercício 10: Seja (x_k) uma seqüência que converge a L. Definimos uma nova seqüência (y_k) por $y_k = x_{k+9}$ para todo $k \in I\!N$. Prove que (y_k) converge a L.

Exercício 11: Seja (x_k) uma seqüência e definimos a seqüência (y_k) por $y_k = (x_k + x_{k+1})/2$. Prove que se (x_k) é convergente, então y_k converge ao mesmo limite. É possível que (y_k) seja convergente mas que (x_k) não o seja? Exiba um exemplo ou prove que não é possível.

Exercício 12: Suponha que (x_k) e (y_k) são duas seqüências tais que $x_k < y_k$ para todo $k \in I\!N$. Prove que, se ambas são convergentes, então $\lim x_k \leq \lim y_k$. É possível que, na desigualdade acima, se verifique a igualdade? Exiba exemplos.

Exercício 13: Seja (x_n) uma seqüência em $I\!R$ tal que $\lim |x_{n+2} - x_n| = 0$. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$.

Exercício 14: Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) seqüências em $I\!R$ com $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = L$. Defina a seqüência $(x_k) = (a_1, b_2, c_3, a_4, b_5, c_6, \ldots)$. Prove que $\lim x_k = L$.

Exercício 15: Existe uma montanha dura como o diamante e mais volumosa que o Monte Everest. Uma vez em cada século, a delicadíssima Isolda a toca com um dedo. Esse é o único contato da montanha com o resto do mundo. Quanto tempo se precisa para que, devido a esse contato, a montanha se desgaste e se reduza a nada? E se a jovem a tocasse com um dedo apenas uma vez cada mil anos? E se Isolda se limitasse a soprá-la suavemente uma vez cada milhão de anos? E se ela se limitasse a contemplá-la?

Exercício 16: Defina rigorosamente as expressões $\boxed{\lim x_k = \infty}$ e $\boxed{\lim x_k = -\infty}$. Seja (x_k) uma seqüência tal que $x_k > 0$ para todo k e $\lim x_k = 0$. Prove que $\lim(1/x_k) = \infty$.

Exercício 17: Prove que se (x_k) é uma seqüência convergente, então $\lim |x_{k+1} - x_k| = 0$. A implicação recíproca é verdadeira? Analise as seqüências dadas por $x_k = \ln\ k$ e $x_k = \sqrt{k}$.

Exercício 18: Sejam (x_k) e (y_k) seqüências em $I\!R$ tais que $\lim x_k = \infty$ e $y_k \geq x_k/2$ para todo $k \in I\!N$. Prove que $\lim y_k = \infty$.

Exercício 19: Sejam (a_k) e (b_k) seqüências em $I\!R$ tais que $\lim a_k = \infty$ e $b_k = a_k/k$ para todo $k \in I\!N$. Prove que a afirmação $\boxed{\lim b_k = -5}$ é falsa.

Exercício 20: Defina duas seqüências em $I\!R$, (x_k) e (y_k), tais que $\lim x_k = \lim y_k = 0$, $y_k \neq 0$, para todo $k \in I\!N$ e:

(a) $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = 0$.

(b) $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = 5$.

(c) $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = \infty$.

(d) $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = -\infty$.

(e) $\lim \dfrac{x_k}{y_k} = -2$.

Lista 6
Continuidade

Exercício 1: Escreva a negação de $\boxed{f \text{ é contínua em } x_0}$.

Exercício 2: Exiba exemplos de funções contínuas em um domínio D tais que:

a) f é acotada superiormente mas não atinge um valor máximo.

b) f não é acotada.

c) f é acotada, atinge um valor máximo mas não um valor mínimo.

Exercício 3: Considere a função dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geq 1 \\ -x & , \ x < 1 \end{cases}$ e seja $a = 1$. Nos casos em que seja possível, exiba uma seqüência (x_k) tal que:

a) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k)$ não existe.

b) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k) = f(a)$.

c) $\lim x_k = a$ e $\lim f(x_k) \neq f(a)$.

Nos casos em que você achar que não é possível, justifique!

Exercício 4: Idem ao Exercício 3 com $a = 2$.

Exercício 5: Exiba uma função f e uma seqüência (a_k) que cumpram simultaneamente:

(i) $f : I\!R \to I\!R$ é contínua em todo $x \in I\!R - \{0\}$

e não é contínua em 0;

(ii) a seqüência (a_k) converge para 0 e $(f(x_k))$ converge para $f(0)$.

Exercício 6: Defina $f : I\!R \to I\!R$ e duas seqüências em $I\!R$, (x_k) e (y_k), tais que f é descontínua em $a = 5$, $\lim x_k = \lim y_k = a$, $\lim f(x_k) = f(a)$ mas $\lim f(y_k) \neq f(a)$.

Exercício 7: Sejam $f : I\!R \to I\!R$ e $g : I\!R \to I\!R$, não contínuas em a. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) $f + g$ não é contínua em a.

(b)$f \cdot g$ não é contínua em a.

Exercício 8: Definimos

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

A função f é contínua em $x = 0$? Exiba uma seqüência (x_k) que convirja a zero mas $(f(x_k))$ não convirja a 1.

Exercício 9: Seja f contínua em $[a, b]$ e $f(x) = 0$ quando x é racional. Prove que $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$.

Exercício 10: Para cada $x \in [0, 1]$ definimos

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Provar que:

a) f é contínua somente no ponto $x = 1/2$.

b) f assume todos os valores comprendidos entre 0 e 1.

Exercício 11: Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Prove que f é contínua em $x = 0$.

Exercício 12: Seja $f : I\!R \to I\!R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Prove que f é contínua em $x = 0$.

Exercício 13: Sejam $A \subset I\!R$ e $f : I\!R \to I\!R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

Prove que f é contínua em $x = 0$.

Exercício 14: Sejam $f : I\!R \to I\!R$ e $g : I\!R \to I\!R$ tais que f é contínua em x e g é contínua em $f(x)$. Para todo $x \in I\!R$ definimos $h(x) = g(f(x))$. Prove que h é contínua em x.

Exercício 15: Defina rigorosamente o conceito $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$ usando seqüências.