MA-MM453 - Topologia Geral
Lista de Exercícios V

1. Mostre que os espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade topológica n-dimensional, compacta e conexa.
2. Dada variedade topológica M, $x_0 \in M$, definimos a componente conexa por caminhos
$$M_{x_0} = \left\{ \begin{array}{c} x \in M | \text{existe caminho } \gamma \\ \text{com } \gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma(1) = 1 \end{array} \right\}.$$
   (a) Mostre que M_{x_0} é aberto.
   (b) Mostre que M_{x_0} é variedade topológica conexa.
   (c) Mostre que $M_{x_0} = M$ para todo $x_0 \in M$ se e somente se M é conexo.
3. Dados laços $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ e $\gamma : I \to X$ com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, verifique que $\left[\gamma\alpha\gamma^{-1}\right]$ e $\left[\gamma\beta\gamma^{-1}\right]$ pertencem a $\pi_1(X, x_1)$ e $\left[\gamma\alpha\gamma^{-1}\right]\left[\gamma\beta\gamma^{-1}\right] = \left[\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\right]$ (onde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$).
4. Dado subespaço $Y \subset X$, conexos por caminho, dizemos que Y é retrato por deformação de X se existe $H : X \times I \to X$ tal que
$$H(x, 0) = x;\ H(x, 1) \in Y, \forall x \in X \text{ e } H(y, t) = y, \forall y \in Y$$
   (a) Mostre que se Y é retrato por deformação de X, então $\pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$.
   (b) Conclua que $\pi_1\left(S^1\right) \approx \pi_1(\text{cilindro}) \approx \pi_1(\{z \in \mathbb{C} | 0 < \|z\| < 1\}) \approx \pi_1(\text{Faixa de Möbius})$.
5. Seja D^2 o disco unitário e S^1 o seu bordo. Seja $\phi : S^1 \to Y$ aplicação contínua, com $\phi(x_0) = y_0$. Mostre que ϕ é homotópica à aplicação constante $\rho : S^1 \to Y, \rho(x) = y_0$ se e somente se existe $\Phi : D^2 \to Y$ tal que $\Phi|_{S^1} = \phi$.
6. Seja $j : S^1 \to S^1, j(x) = -x$ a apliação antípoda. Mostre que $[\alpha][j\alpha] = e$, para todo $[\alpha] \in \pi_1\left(S^1, x_0\right)$ (e é o elemento identidade do grupo fundamental)
7. Sejam $f_5\left(e^{i\theta}\right) = e^{i5\theta}$ e $f_3\left(e^{i\theta}\right) = e^{i3\theta}$ aplicações de S^1 em S^1. Mostre que não existe levantamento de $f_3$para f_5, ou seja, que não existe $\widetilde{f_3} : S^1 \to S^1$ tal que $f_5 \circ \widetilde{f_3} = f_3$.
8. Seja X espaço contrátil. Mostre que X não possui recobrimento que não seja trivial (homeomorfismo).
9. Mostre que $\pi_1(S^n)$ é trivial para $n \geq 2$.
10. Mostre que $T^2 \backslash \{p\}$ pode ser deformado em um espaço homeomorfo a união de dois círculos com um ponto em comum (figura de um "8").
11. Demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra (considerando polinômios mônicos, assuma que $p(z)$ não possui raízes. Defina $f_t(z) : S^1 \to S^1$ por $f_t(z) = p(tz) / |p(tz)|$, para $t \geq 0$. Mostre que para t suficientemente grande, f_t é homotópica a z^n, $n =$grau de p, mas que dois destes polinômios são sempre homotópicos).
12. Seja $f : X \to X$ contínua. Para quais dos espaços abaixo podemos garantir que f necessariamente tem um ponto fixo?
   (a) S^2;
   (b) T^n;
   (c) $\{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$,
   (d) União de dois círculos por um ponto.
13. Encontre aplicação de recobrimento (não trivial) do toro nos seguintes espaços:
   (a) Toro;
   (b) Garrafa de Klein;
   (c) Esfera;
   (d) Plano projetivo.