Manoel Paiva

Coleção Matemática – volume 1

Descrição sucinta da coleção

Esta coleção, destinada às três séries do ensino médio, é composta por 3 volumes, estruturados como segue:

1º volume: 92 capítulos; 583 páginas de texto.

2º volume: 58 capítulos; 556 páginas de texto.

3º volume: 35 capítulos; 608 páginas de texto.

Segundo informações contidas na contracapa dos três volumes, a coleção contém em torno de 3.800 exercícios ou problemas, "em três séries de exercícios propostos — básicos, complementares e questões dos vestibulares".

O autor, em cada um dos volumes, informa que

> "Os [exercícios] básicos têm como finalidade a fixação do aprendizado. Os complementares exigem criatividade e desembaraço em relação ao assunto estudado. E as questões dos vestibulares mostram como o conhecimento de matemática é exigido dos candidatos às universidades brasileiras."

O autor afirma ainda, em cada um dos volumes, que

> "A Matemática, mais do que nunca, está presente em nosso cotidiano. Com o advento dos computadores, os jovens estudam essa ciência até em jogos de lazer. Por isso é preciso aproveitar esse fato e resgatar o espírito crítico do jovem, e essencial ao aprendizado da ciência matemática.
>
> Apresento nesta obra os meus vinte e dois anos de experiência como professor. Hoje, com plena convicção, afirma que a matemática deve caminhar paralelamente à realidade do nosso dia-a-dia.
>
> Sempre que possível, mostraremos aplicações práticas dos assuntos estudados, sem no entanto nos distanciarmos da precisão dos conceitos.
>
> Os atributos básicos para um bom aprendizado — interpretação de texto, raciocínio e iniciativa — serão constantemente exigidos."

A coleção não fornece informações sobre a formação e experiências profissionais do autor. O livro do aluno não oferece uma lista de leituras suplementares para o aluno. Cada livro contém as soluções dos exercícios propostos. Encontram-se esparsas no texto algumas referências bibliográficas.

A composição tipográfica nos três volumes é de excelente qualidade, seguindo as convenções usuais na escrita matemática (variáveis, por exemplo, são consistentemente representadas em itálico). As ilustrações, de um modo geral, são também de boa qualidade, embora, em alguns casos, apresentem incorreções (por exemplo, na representação de parábolas, como visto a seguir).

Análise crítica do Volume 1

O volume da primeira série do ensino médio principia com noções sobre lógica e conjuntos, para o que emprega 45 páginas.

Nota-se, desde esta parte, uma característica de toda a coleção, que é a extrema decomposição dos conteúdos apresentados. Esta decomposição se dá pela divisão dos capítulos em inúmeros itens ou seções e pela ausência quase que total de texto que ligue estes itens. Para exemplificar isso, desde o início desta análise, citaremos o começo do Capítulo 0, "Noções básicas de lógica".

A introdução do capítulo (página 1, seção 1. Introdução), limita-se a quatro linhas:

"A lógica está de tal modo incrustada na matemática que às vezes ambas se fundem numa só estrutura. A matemática necessita da lógica para suas definições, postulados e teoremas.

Apresentemos neste capítulo alguns conceitos de lógica que serão utilizados nos três volumes desta obra."

Segue-se, então, sem nenhuma transição, a seção 2, intitulada "Proposição":

"Proposição é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo e pode ser classificada com V (verdadeira) ou F (falsa).

Indicaremos as proposições por letras minúsculas: p, q, r, s, t, ..."

Seguem-se três exemplos de proposições:

"a) p: O sol é uma estrela, (V), b: Todo ser vivo é mamífero, (F), c) r: $5 + 3 = 7$ (F)."

A seção termina com a afirmação

"Os símbolos V ou F são chamados de *valores lógicos*".

Observa-se a ausência completa de texto ligando as duas seções, introduzindo o conceito de proposição, básico em lógica. Além disso, os exemplos apresentados para proposições não permitem a compreensão deste conceito importante, pois eles não *delimitam* o conceito, isto é, não são apresentados exemplos de sentenças que não são proposições. Por exemplo, as sentenças "Socorro!", "Saia!", são ou não proposições? Isso não é explicado ao aluno. Somente no exercício resolvido R.1, página 5, são apresentados, entre as quatro situações dadas, dois exemplos de sentenças que não são proposições. No entanto, elas são sentenças abertas, o que pode confundir o aluno.

Uma ocasião em que o texto dialoga com o aluno é na seção 7, "Quantificadores", página 5, que principia com a pergunta dirigida ao aluno "Que valor lógico você atribuiria à sentença aberta $x + 2 = 5$?"

Observa-se uma falta de hierarquização na apresentação dos conceitos e informações. Assim, por exemplo, há seções intituladas Proposição (seção 2), Sentença aberta (seção 3), Conectivo (seção 4), Implicação lógica (seção 5), Eqüivalência lógica (seção 6), Quantificadores (seção 7) e Negação de uma proposição contendo quantificador (seção 8), o que é obviamente um desequilíbrio se levarmos em conta a importância relativa destas noções.

Observa-se, também, a falta de comentários adicionais a respeito de determinados tópicos. Por exemplo, proposições condicionais e implicações lógicas são apresentadas sem qualquer observação a respeito de sua importância em enunciados matemáticos. As expressões "condições suficientes" e "condições necessárias", freqüentemente usadas nos enunciados matemáticos e cujo uso traz muitas dúvidas ao aluno, não são mencionadas, nem mesmo nos exercícios. A introdução das negações de proposições contendo quantificadores também merecia ser acompanhada de mais comentários. O autor também deixa de explorar, tanto aqui quanto nos capítulos seguintes, a relação existente entre lógica e teoria dos conjuntos (por exemplo, entre $p \Rightarrow q$ e $A \subset B$).

No lado positivo, há um grande número de exemplos usando situações matemáticas, que contribuem para justificar, até certo ponto, a afirmativa no início do capítulo. Um exemplo está na justificativa de que a afirmativa "$5 \geq 3$" é verdadeira, por significar "$5 > 3$ ou $5 = 3$".

O Capítulo 1 do primeiro volume da obra (páginas 9–19), intitula-se "Conjuntos, subconjuntos e suas representações".

Neste capítulo, a introdução é um pouco maior do que no capítulo anterior e informa, corretamente, que ela foi desenvolvida por Georg Cantor. Como exemplo das contribuições à matemática da teoria dos conjuntos, o autor destaca as "definições precisas dos conceitos de infinito e infinitésimo". De fato, a teoria dos conjuntos permitiu esclarecer o conceito de infinito, fornecendo mesmo uma caracterização para conjuntos infinitos (um conjunto é infinito se e somente pode ser posto em correspondência bijetora com um subconjunto próprio de si mesmo), mas afirmar, em pé de igualdade, e sem explicação ulterior, que esta teoria permitiu uma definição precisa dos infinitésimos (análise não-standard) é supor que o professor possui conhecimentos sofisticados de matemática. Também a afirmativa de que Bertrand Russell "através da teoria dos tipos eliminou alguns paradoxos da teoria dos conjuntos" é simplista e encontra-se deslocada. Uma introdução a um capítulo da teoria dos conjuntos, em uma obra destinada ao ensino médio, deveria estar voltada principalmente para esclarecer os alunos e professores sobre o papel que a notação e a linguagem utilizadas em teoria dos conjuntos pode desempenhar na apresentação da matemática elementar, principalmente em análise combinatória e probabilidades finitas e alertá-los para evitar os exageros da chamada "teoria dos conjuntos" escolar.

A seção 2, intitulada "Conceitos primitivos" afirma que

"Para dar início à sua teoria, Georg Cantor admitiu os conceitos primitivos (não-definidos) de "conjunto" e de "elemento de um conjunto", que exemplificaremos a seguir".

Isso é feito sem nenhuma digressão preliminar sobre o que são conceitos primitivos, uma teoria axiomático-dedutiva, etc. Informa-se tão somente que os conceitos de conjunto e de elemento de um conjunto são primitivos.

A extrema decomposição do conteúdo em seções se evidencia mais uma vez neste capítulo, que está dividido nas seguintes seções: Introdução (seção 1); Conceitos primitivos (seção 2); Representação de um conjunto – relação de pertinência (seção 3); Tipos de conjunto (seção 4); Conjunto Universo (U) (seção 5); Subconjunto (seção 6). Vemos também, por esta listagem, que neste capítulo continua a falta de hierarquização entre os conceitos e informações. Esta falta de hierarquização fica também evidenciada pela existência de um capítulo (Capítulo 2, páginas 20–24) intitulado Conjuntos cujos elementos são conjuntos.

As falhas apontadas acima são supridas, em grande parte, pela coleção de exercícios resolvidos em cada capítulo que trata de conjuntos. Estes exercícios, em muitos casos, desempenham o papel de estabelecer relações entre os assuntos tratados nestes capítulos e, mais importante, sua interligação com outros temas. Ainda no Capítulo 1, o exercício resolvido R.4, página 14, é bem interessante. Ele desenvolve, pausada e claramente, o princípio multiplicativo, que será importante mais tarde em análise combinatória. Os exercícios R.8 e R.9 (página 16), mostram que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n. Há, ainda, bons exemplos do uso da linguagem de conjuntos aplicada à Geometria.

Alguns dos exercícios do Capítulo 2 também são interessantes, calculando em vários contextos o número de subconjuntos de um conjunto finito (Exercícios R.5, R.6, C.4 e C.5, entre outros). Seguem-se (páginas 25–45) capítulos que tratam das operações com conjuntos (união, interseção, conjunto diferença, conjunto complementar) e problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos (neste capítulo, deve-se, novamente, destacar a qualidade da exposição presente nos exercícios resolvidos).

O estudo dos números principia na página 46, no Capítulo 6 – Classificação dos números (páginas 46–56).

A discussão inicial, na introdução, sobre o conceito de número limita-se a algumas referências sobre a origem dos números naturais. Como ainda nesta introdução são apresentados os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, seria mais coerente se a introdução mencionasse a necessidade da ampliação progressiva do conceito de número e não deixasse isso para as seções posteriores (Seção 3 – Conjunto dos números inteiros e Seção 4 – O conjunto dos números racionais).

Após aceitar a existência dos números naturais, o livro explica que eles podem ser construídos utilizando-se a teoria dos conjuntos.

A seção 2.1 é dedicada às propriedades dos números naturais. O livro destaca as propriedades de fechamento em relação à soma e a multiplicação de naturais. A terceira propriedade está mal formulada, pois mistura propriedades com definições. De fato, encontra-se no livro que

"Se n é um número natural, então $n+1$ é um número natural tal que:

I. n e $n+1$ são chamados de "números naturais consecutivos";

II. n é o antecessor de $n+1$;

III. $n+1$ é o sucessor de n."

O autor possivelmente tentou fugir à introdução da função sucessor dos axiomas de Peano, talvez por achá-la muito abstrata e dispensável neste estágio da escolaridade. Então, o correto, já que anteriormente foi afirmado que o conjunto dos naturais é fechado em relação à soma e que os naturais são dados (logo 1 é dado), seria simplesmente dizer que dado um natural qualquer n, então o natural $n+1$ é chamado seu sucessor, que n é o antecessor de $n+1$ e que o número 0 não é o sucessor de nenhum número natural. Como ponto positivo do capítulo, deve-se ressaltar o fato de serem apresentados, nos problemas resolvidos, situações em que devem ser demonstradas propriedades simples a respeito de números racionais, estimulando assim alunos e professores a desenvolver a argumentação matemática.

O Capítulo 7 (páginas 57–74) constrói o conjunto dos números reais, principiando, apropriadamente, com o fato de que existem grandezas (comprimentos) cuja medida não pode ser expressa por números racionais. Para isso, o livro menciona e logo depois demonstra (página 57), o fato de que $\sqrt{2}$ não é um número racional (isso é feito mostrando corretamente que não existe número racional cujo quadrado é 2).

Na seção 1.1 (página 58) o autor *define* número irracional como "toda dízima não-periódica, ou seja, é todo número com infinitas casas decimais e não-periódico".

Esta definição está correta, mas, apresentada sem comentários, ela perde a oportunidade de enriquecer a compreensão do aluno sobre os números racionais e irracionais. A obra poderia, por exemplo, mostrar (ou recordar) que todo número racional tem um desenvolvimento decimal finito ou periódico e que reciprocamente números com tais desenvolvimentos decimais são necessariamente periódicos (no exercício resolvido R.5, da pág. 52, se mostra como obter a fração geratriz da dízima periódica 6,888...; mas a discussão é incompleta: além de focar neste caso particular, não é dado nenhum argumento para justificar o fato de que ao dividir dois inteiros se obtém uma representação finita ou periódica). Como certamente pode-se escrever desenvolvimentos decimais arbitrários, sem nenhuma periodicidade, existem desenvolvimentos decimais que não representam números racionais. Estes números são exatamente os números irracionais.

Em seguida, sem relacionamento com o que foi exposto acima, o livro afirma simplesmente que "Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois inteiros". Ao fazer isso, o autor simplesmente apresenta informações de maneira desconexas, sem procurar relacioná-las e mostrar que alguns fatos são decorrência lógica de outros.

Novamente, os exercícios resolvidos e propostos são o ponto alto do capítulo, contribuindo bastante para a compreensão dos conceitos. O exercício R.2 apresenta uma demonstração. Nos exercícios para resolver, dois são de demonstrações semelhantes a essa (B.3 e B.4). Entre os exercícios complementares, C.2 pede para achar uma construção geométrica para um segmento de medida $\sqrt{5}$, na unidade dada.

O Capítulo 8 estuda o eixo real e classifica vários tipos de intervalos (página 67). Nota-se, nesta classificação, a impropriedade cometida ao se designar intervalos não-limitados de incomensuráveis. A palavra incomensurável tem um significado específico em matemática e empregá-la com outros sentidos pode gerar confusão.

Um ponto positivo deste capítulo é a insistência do autor em mostrar como marcar números irracionais sobre a reta real (Exercício R.1, páginas 68 e 69). São feitos também exemplos de como marcar intervalos e de como resolver desigualdades lineares com uma incógnita.

A falta de hierarquização entre na apresentação tem aqui mais um exemplo: a existência de uma seção (seção 2.1, com duas linhas, Operações com intervalos reais), para afirmar simplesmente que "Os intervalos reais são conjuntos e, portanto, podemos efetuar com eles qualquer uma as operações entre conjuntos...".

No Capítulo 9, das páginas 75 a 81, a obra apresenta o plano cartesiano, motivando a apresentação com a localização de residências e pontos. Verifica-se, mais uma vez, neste capítulo, a fragmentação do conteúdo em seções e subseções, o que pode contribuir para dar uma visão distorcida da importância relativa dos conceitos e fatos apresentados. A "Propriedade fundamental dos pares ordenados", ou seja, que o par (a, b) é igual ao par (c, d) se e somente se $a = c$ e $b = d$ é destacada como uma subseção.

O Capítulo 11 (páginas 82–87) generaliza o que foi apresentado no capítulo anterior, introduzindo agora a noção de produto cartesiano de dois conjuntos. O capítulo começa com uma motivação bastante feliz para o conceito, mostrando que ele é adequado para modelar matematicamente a situação de listar as escolhas possíveis para um automóvel que possui três modelos e quatro cores disponíveis. Para conjuntos A e B finitos, é introduzida a representação gráfica $A \times B$ por meio de um "diagrama de flechas". O fato importante, decorrente da definição de igualdade de pares ordenados, de que se A e B são conjuntos com $A \neq B$, então $A \times B = B \times A$ não é exemplificado, mas simplesmente mencionado em uma nota (nota 3, página 83).

O autor opta por introduzir o conceito de função como um caso especial do conceito de relação, e para isso estuda as relações no Capítulo 11 (páginas 88–92). Esta opção não é das mais indicadas, pois não enfatiza a noção básica, usada em aplicações, de lei de correspondência, de dependência entre duas variáveis, substituindo-a por um tratamento teórico-formal, correto sem dúvida, mas que não é motivado por aplicações relevantes. De todo o modo, a partir do momento em que o autor opte por esta linha, o exemplo dado para motivar o conceito de relação não deveria ser uma função, como é feito na página 88. Para justificar o estudo das relações o autor deveria apresentar um bom exemplo de relação que não é função. Além disso, a ênfase que vem sendo dada aos diagramas de flechas desde o capítulo precedente, quando foram usados como uma das maneiras de representar produtos cartesianos, e agora, e que serão amplamente utilizados no estudo das funções, não é a representação gráfica mais útil para as funções. Quanto mais cedo o aluno se habituar com a noção de gráfico de uma função no plano cartesiano, mais cedo estará apto a utilizar funções para resolver problemas em aplicações.

O Capítulo 13, sobre funções, principia com uma apresentação intuitiva do conceito de função que se resume ao exemplo de como a distância percorrida por um automóvel é função do tempo. No entanto, esta apresentação, que se bem mais explorada poderia levar ao conceito de função como correspondência ou dependência entre grandezas, é imediatamente abandonada em favor da "Formalização do conceito de função" (seção 2, página 99), todo baseado em relações. Neste capítulo, somente dois exercícios (C.8 e C.9) entre 18 abordam o conceito de função como uma dependência.

No Capítulo 14, menciona-se, na seção 2, página 103, a imagem de um elemento através da lei "$y = f(x)$".

A apresentação do gráfico de uma função é feita de maneira abrupta, na página 104, sem preparação, possivelmente supondo que os alunos já estão bem familiarizados com gráficos de relações. Os gráficos são bastante utilizados no Capítulo 15 (páginas 113–122).

O Capítulo 16 é dedicado às funções reais de variável real. O capítulo começa com uma definição correta de função real de variável real, mas a afirmação destacada, feita, segundo citado na obra, para "facilitar o estudo das funções reais de variável real", está errada. Com efeito, o conceito de função resultante desta definição destacada é o conceito Euleriano de função, em que uma função é dada por uma expressão analítica, definida no maior subconjunto dos reais para o qual a expressão dada faz sentido:

"Se o domínio de uma função f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ onde f pode ser definida, e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$, então esta função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$.

Assim sendo, ao apresentarmos a função $y = f(x)$, ficam subentendidos como domínio e contradomínio de f os conjuntos

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad CD(f) = \mathbb{R}."$$

O hábito de fragmentar os conteúdos evidencia-se ainda uma vez no Capítulo 17, chamado "Função constante, crescente ou decrescente", que dedica uma seção para definir raiz ou zero de uma função, outra para definir função constante e a última para definir função crescente e função decrescente.

O livro principia agora o estudo das funções usuais vistas no ensino médio: funções afins ou do primeiro grau, funções quadráticas ou do segundo grau, função exponencial, função logaritmo e as funções trigonométricas.

No Capítulo 18, "Função afim ou do primeiro grau", após apresentar um exemplo motivador e mostrar, usando o teorema de Tales, que uma dada reta é o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, o livro afirma que analogamente qualquer reta do plano cartesiano que não for paralela a um dos eixos é gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$. A afirmação recíproca, que é a de maior interesse neste contexto, não merece do autor a mesma atenção, já que o texto simplesmente enuncia que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, sem demonstrá-lo. O livro prestaria um serviço melhor aos seus leitores se complementasse a discussão anterior para justificar essa afirmativa recíproca. Em nenhum momento, também, se discute a interpretação geométrica dos coeficientes da equação. Possivelmente, o autor julga apropriado fazê-lo somente ao estudar Geometria Analítica; ao agir assim, no entanto, ele deixa de contribuir para que o aluno tenha uma visão mais integrada da Matemática.

A grande ausência a ser notada nos capítulos dedicados ao estudo das funções afins é a de situações onde o seja levado a escolher uma tal função como apropriada para representar uma dada situação prática. Todos os exercícios envolvendo tais situações já fornecem a função a ser empregada. Em particular, a relação entre funções lineares e proporcionalidade não é devidamente explorada (a não ser no exemplo que abre o capítulo).

Ao invés de enfatizar o uso das funções afins como importante para modelar situações, o autor prefere estudar em detalhe aspectos algébricos a elas.

O tópico clássico "Variação de sinal da função do "1º grau" é tratado isoladamente no Capítulo 19 (páginas 144–153), no qual se calcula o zero da função $f(x) = ax + b$ e se mostra que esta função é crescente se e somente se $a > 0$.

A apresentação das funções é interrompida para um estudo detalhado, no Capítulo 20, das inequações produto e inequações quociente, em que se mostra como resolver inequações que são produtos ou quocientes de termos afins.

O estudo da função quadrática ou do 2º grau principia no Capítulo 21 (páginas 165–181). Em primeiro lugar, a parábola é apresentada como a interseção de uma superfície cônica com um plano paralelo a uma das geratrizes do cone. Em seguida, ela é definida como sendo o conjunto de pontos que distam igualmente de uma reta e de um ponto dados. Não se menciona que as duas apresentações são equivalentes.

A partir da definição métrica da parábola, o livro demonstra, em um caso particular, qual a função cujo gráfico representa a parábola dada, e afirma (página 167) que, no caso geral, "de maneira análoga à que fizemos para essa curva, podemos demonstrar que toda parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ ...". Sem demonstrá-lo, o texto afirma que "o gráfico de uma função do tipo $y = ax^2+bx+c$ ... é uma parábola" com "eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e sua concavidade e sua concavidade é voltada para o sentido positivo do eixo Oy, se a 0, ou voltada para o sentido negativo do eixo Oy, se a 0."

A seguir, os pontos de interseção com os eixos são identificados. No caso da interseção com o eixo Ox, a fórmula de resolução das equações do segundo grau é aplicada diretamente, sem qualquer tentativa de justificá-la (certamente o aluno foi apresentado a ela na série anterior, mas com toda certeza muitos poucos conhecem o raciocínio que leva a ela). Também não é explorada a forma fatorada da equação do segundo grau. Depois, nas páginas 174, 175 e 176, o livro demonstra quais são as coordenadas do vértice de uma parábola, mesmo no caso em que ela não corta o eixo dos x. O faz, no entanto, usando a existência, não demonstrada, do eixo de simetria. Certamente, o autor poderia ter optado por mostrar que toda função quadrática pode ser escrita na forma $f(x) = a(x - m)^2 + p$, o que lhe permitiria justificar corretamente todas as afirmativas feitas.

O Capítulo 22, define o que é ponto de máximo e de mínimo, valor máximo e mínimo de uma função. Os exercícios sobre o assunto lidam somente com funções quadráticas. Somente no Capítulo 25 serão estudadas funções definidas por mais de uma sentença, o que enriquecerá bastante o estoque de funções disponíveis para trabalho.

Continuamos a observar a extrema decomposição dos conteúdos apresentados, sem que sejam hierarquizados. Pela distribuição dos tópicos por capítulos, seções e subseções é impossível ter uma idéia de sua importância relativa. Assim, por exemplo, o livro dedica das páginas 213 a 245 ao tratamento de módulo de um número real, "função modular", técnicas para a construção de gráficos de funções modulares, equações modulares, desigualdades e módulos, distribuídos em 5 capítulos. O conceito de módulo é apresentado como distância, e deduz-se que o módulo de um número real $|x| = -x$ se $x < 0$ e $|x| = x$ se $x > 0$. Numerosos exemplos de equações, inequações e gráficos de funções envolvendo módulo são apresentados. Na construção dos gráficos, falta um comentário a respeito da translação horizontal associada a funções do tipo $f(x) = |x - a|$.

Os Capítulos 31, 32 e 33 tratam da composição de funções, funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras e do conceito de funções inversas. O conceito de função inversa é abordado a partir do de relação inversa. Uma função é invertível se sua relação inversa, definida na página 261, for uma função. Nas páginas 263 e 264 é demonstrado, em detalhes, que uma função é invertível se e somente se for bijetora. O grau de detalhe da demonstração denota um certo desequilíbrio no livro: determinadas demonstrações, relativas a tópicos essenciais, são omitidas; outras, que poderiam ser apresentadas de modo sucinto, são vistas em grande detalhe.

Como preparação para o estudo da função exponencial, os Capítulos 34 e 35 estudam a potenciação e a radiciação em $\mathbb{R}$, como revisão. O livro não explica as razões para definir que $a^1 = a$ ou que $a^0 = 1$ ou ainda que $a^{-n} = 1/a^n$. A falta de motivação ou explicação para definições aparentemente arbitrárias continua no capítulo sobre radiciação, quando se define que $a^{(k/n)} = \sqrt[n]{a^k}$.

A função exponencial começa a ser estudada a partir da página 283. A partir de dois exemplos, o texto define uma função exponencial como toda função f de $\mathbb{R}$ nos reais estritamente positivos tal que $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo diferente de 1. Ao fazer isso, o livro deixa totalmente aberto o problema do que é uma potência arbitrária (expoente real) de um número real. As propriedades de que a função exponencial é injetora, crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$ são simplesmente mencionadas.

Mais uma vez, não é apresentada qualquer motivação relativa ao estudo de funções exponenciais. Nem mesmo exemplos de situações práticas em que as funções exponenciais já são fornecidas pelo enunciado são apresentadas. Deve-se notar que questões deste tipo (muitas vezes associadas com modelos de crescimento populacional ou desintegração radioativa) ocorrem em vestibulares e o autor não selecionou nenhuma delas para a seção de problemas de vestibulares. Não é feito nenhum comentário a respeito da relação entre funções exponenciais e progressões geométricas (da mesma forma como não é feito nenhum comentário a respeito de funções afins e progressões aritméticas). (No volume 2, onde progressões são estudadas, esta conexão também não é feita). A ênfase da apresentação é na resolução de equações e inequações exponenciais. Deve-se frisar, no entanto, que isto é feito adequadamente, justificando os passos dados em termos das propriedades de injetividade e monotonicidade da função exponencial.

Os logaritmos são apresentados no Capítulo 38, páginas 294–299, e suas propriedades estudadas no Capítulo 39, páginas 300–304. Após uma introdução em que se menciona Napier e a utilidade dos logaritmos, define-se logaritmo como a operação inversa da exponenciação, na página 295: "Sejam a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se logaritmo de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$". Neste capítulo e no seguinte, o livro deduz as propriedades operatórias usuais dos logaritmos baseando-se em sua definição e nas propriedades da função exponencial.

A função logarítmica é estudada no Capítulo 40 (páginas 305–309). Da mesma maneira que aconteceu no caso da função exponencial, generaliza-se, para números reais, sem nenhum comentário, fatos baseados em potências racionais. As propriedades da função logarítmica são mencionadas, sem demonstrações. Estas propriedades são, então, usadas para resolver as equações e as desigualdades logarítmicas, nos dois capítulos subseqüentes.

O restante da parte do livro dedicado à álgebra trata dos logaritmos decimais e de seu cálculo. O livro apresenta uma pequena tábua de logaritmos decimais, de cinco páginas. Não é feita uma discussão acerca do papel histórico desempenhado pelos logaritmos. O uso de logaritmos para resolver equações exponenciais provenientes de situações práticas é totalmente ignorado. Deve-se ainda ressaltar a terminologia errada utilizada na página 327, onde os alunos são apresentados à técnica de "interpolação logarítmica". Naturalmente, o autor está se referindo ao uso de interpolação linear em uma tábua de logaritmos. Além do nome incorreto, ele perde uma ótima oportunidade para dizer que interpolação linear é útil em outras situações e não somente para obter logaritmos não tabelados.

A parte do livro dedicada à geometria e trigonometria principia no Capítulo 45, a partir da página 337, e ocupa 248 páginas, das quais poucas dedicadas à geometria. Como até agora, a apresentação dos conteúdos caracteriza-se pela extrema fragmentação.

O conceito de ângulo geométrico (que mais propriamente deveria ser chamado de ângulo convexo) é apresentado na página 336, como interseção de dois semiplanos. No entanto, a definição de semiplano, logo no início do capítulo, não está bem feita. O autor define os semiplanos definidos por uma reta r de um plano α como os subconjuntos α' e α'' de α tais que $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$ e $\alpha' \cap \alpha'' = r$; estas condições não são, evidentemente, suficientes para caracterizar os semiplanos associados a r. Logo em seguida, o conceito de ângulo geométrico é generalizado para ângulo não convexo, ângulo raso, ângulo de uma volta e ângulo nulo.

Na página 338, define-se o ângulo cuja medida é 1 grau utilizando uma circunferência. O arco determinado sobre esta circunferência por este ângulo também é definido como medindo um grau. Ou seja, o grau é simultaneamente uma medida de ângulos e de arcos. Ao fazer, isso, o livro não mostra que esta medida de ângulo independe da circunferência escolhida.

O Capítulo 47, um dos melhores do livro, trata da trigonometria no triângulo retângulo, definindo seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. O livro destaca, corretamente, que tais definições são possíveis devido a propriedades de semelhança de triângulos. São dados vários bons exemplos de medidas de objetos distantes ou inacessíveis usando estes conceitos. Mostra-se no capítulo seguinte, a relação entre o seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Em seguida, no Capítulo 50, utilizando as propriedades dos triângulos equiláteros e isósceles, calculam-se os senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 30, 45 e 60 graus.

O Capítulo 51 é dedicado às medidas de arcos e ângulos. Relata-se um pouco a história do número π. Em seguida, define-se o radiano, como medida de ângulos e de arcos. Mais uma vez, não se mostra que a medida de um ângulo independe da circunferência escolhida com centro em seu vértice.

No Capítulo 52, os conceitos até agora definidos para ângulos agudos, seno, cosseno e tangente, são generalizados para números reais arbitrários, com a introdução da circunferência trigonométrica.

Deste ponto em diante, o livro estuda a trigonometria, de maneira muito detalhada, fragmentando os conteúdos, decompondo os tópicos em vários casos. Esta fragmentação não conduz à boa aprendizagem. Ao contrário, impede que o aluno, a partir de certos princípios e fatos básicos, possa ele mesmo raciocinar e chegar aos vários casos e subcasos detalhados no texto.

O estudo das funções trigonométricas, que é uma das partes mais importantes da trigonometria, especialmente em um livro no qual o conceito de função é central, é abordado a partir da página 523, com a função seno (Capítulo 82), cosseno (Capítulo 83) e outras funções trigonométricas (Capítulo 84). Novamente, o autor não explora completamente as relações entre os gráficos de $f(x)$ e $f(x-a)$. Por exmeplo, para fazer o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x - \pi/4)$ é utilizada uma tabela de valores sem que, pelo menos ao final, seja observada a relação deste gráfico com o de $g(x) = \text{sen}(x)$.

No Capítulo 85, investiga-se o período de funções como, por exemplo, $y = a + b\ \text{sen}(mx + q)$. Há somente o gráfico de uma tal função, no exercício C.3, o que é pouco, devido à dificuldade experimentada pelos alunos com este tipo de função. De um modo geral, o estudo é feito unicamente pelo enfoque algébrico. Seria preferível que o conceito de período fosse apresentado juntamente com os gráficos dos capítulos anteriores. Não é feita, também, qualquer alusão ao papel desempenhado por funções periódicas nas ciências.

A partir do Capítulo 86, estudam-se as funções trigonométricas inversas e seus gráficos.

Por fim, como últimos tópicos, os Capítulos 90 e 91 abordam respectivamente a lei dos cossenos e a lei dos senos. Falta, no início do Capítulo 90, uma maior motivação para o tópico resolução de triângulos, com uma discussão relativa a que elementos devem ser conhecidos para um triângulo estar determinado. Os exercícios são, também, muito menos interessantes do que os apresentados no capítulo referente à trigonomeria do triângulo retângulo. Destaque-se, no lado positivo, a determinação da constante de proporcionalidade na lei dos senos: $2R$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo, fato este raramente lembrado no ensino médio.

Resumo dos comentários relativos ao volume 1

A obra examinada oferece uma cobertura bastante completa do conteúdo usual da primeira série do Ensino Médio. Apresenta um número muito pequeno de incorreções (facilmente corrigíveis) e trata dos assuntos de maneira mais detalhada que a maior parte dos congêneres.

Alguns assuntos são abordados de maneira bastante feliz. Os capítulos sobre conjuntos são, de um modo geral, bem escritos e apresentam exemplos interessantes e conectados a outros assuntos. Apesar dos problemas já levantados sobre os capítulos que lidam com números, os exercícios apresentados contribuem para um tratamento do assunto melhor do que o usual nos livros do Ensino Médio. A trigonometria do triângulo retângulo é também bem apresentada, com exemplos e exercícios motivantes.

De um modo geral, no entanto, as ênfases do livro são algo equivocadas. Ele parece ter sido concebido com a preocupação de fornecer total orientação sobre a forma de conduzir a matéria. A divisão em pequenos capítulos, por exemplo, sugere uma divisão por aulas. Existe uma grande preocupação em classificar os problemas em tipos e em fornecer instruções pormenorizadas a respeito de métodos de solução. Além disso, em cada um destes capítulos são apresentadas sugestões relativas a tarefas de classe e de casa.

O livro é, assim, altamente prescritivo. Ele toma a maior parte das decisões pelo professor e pelo aluno. Ao mesmo tempo em que isto pode apresentar um conforto para ambos, também leva a uma atitude passiva e pouco criativa em relação à Matemática.

Na proposta do livro, expressa na contracapa, diz-se que ele pretende "valorizar o espírito crítico e questionador do aluno, estimulando sua criatividade e raciocínio lógico". Na nossa opinião, a obra não é bem sucedida nesta intenção.

Uma outra falha diz respeito ao uso das funções estudadas ao longo do livro para modelar situações reais. Alguns capítulos se iniciam com um exemplo motivador; mas este exemplo não é, de modo geral, explorado completamente no desenvolvimento do capítulo. A maior parte do livro passa completamente ao largo das aplicações.

Em referência aos diferentes aspectos do ensino de Matemática (conceituação, manipulação, aplicação), trata-se de uma obra que faz um trabalho extremamente completo no aspecto de manipulação e um trabalho bastante bom nos conceitos. Mas deixa bastante a desejar nas aplicações. Em resumo, o livro oferece uma boa preparação formal a quem vai se submeter a exames de vestibulares, mas não inspira seus leitores a apreciar a Matemática.

Manoel Paiva

Coleção Matemática – volume 2

Descrição sucinta do volume 2

O segundo volume desta obra tem estrutura semelhante à do volume 1. Ele está dividido em 58 capítulos e tem 556 páginas de texto, seguidas de 36 páginas com soluções de exercícios. Os últimos 19 capítulos são dedicados à geometria espacial.

Como o volume anterior, este tem como características a cobertura detalhada dos tópicos matemáticos abordados, acompanhada, por outro lado, de uma falta de hierarquização dos conteúdos apresentados (assuntos importantes recebem o mesmo destaque que outros de menor importância). Os tópicos estudados são decompostos em um número muito grande de subtópicos, o que fragmenta o conhecimento e pode fazer com que o aluno perca a visão de conjunto do assunto. O elevado número de páginas torna o livro difícil de ser coberto em um ano escolar típico (isto pode, por exemplo, fazer com que a geometria espacial seja tratada de modo incompleto ou apressado).

O volume não apresenta bibliografia com leituras suplementares para o aluno. Não são indicadas a formação e a experiência profissionais do autor. A apresentação do livro é igual à do volume anterior. Mais uma vez, o livro é bem escrito, sem erros tipográficos e com boas ilustrações. A linguagem utilizada é apropriada ao nível dos alunos e evita, por um lado, a pobreza do vocabulário e, por outro, a complexidade inútil.

Análise crítica do volume 2

O Capítulo 1 aborda seqüências numéricas, corretamente caracterizadas como casos particulares de funções. É apresentada uma útil discussão, mostrando que seqüências podem ser descritas de vários modos: por recorrência, através da expressão de seu tempo geral e através de propriedades que caracterizem os termos da seqüência e sua ordenação.

Os quatro capítulos seguintes tratam de progressões aritméticas. Nesta parte, notam-se duas das características já apontadas acima: a fragmentação do conteúdo e a falta de hierarquização na apresentação dos tópicos. Assim, há um capítulo, o 3, chamado "Interpolação aritmética". Trata-se de um problema importante, devido às aplicações, mas que é facilmente resolvido aplicando-se a definição de progressão aritmética. A divisão em capítulos pode dar a impressão ao aluno de que algo essencialmente novo vai ser ensinado no Capítulo 3. Muito mais proveitoso seria mostrar que a definição de Progressão Aritmética é suficiente para resolver os problemas. Deve-se observar, também, que apenas nos exercícios complementares C7 e C8 fica aparente para o aluno a importância de se fazer uma interpolação aritmética (os exemplos e os exercícios resolvidos são bastante desinteressantes).

Um outro exemplo de fragmentação ocorre no Capítulo 2, página 11, item 3.1, onde se afirma que "Uma condição necessária e suficiente para que uma progressão aritmética seja crescente é que sua razão (r) seja positiva ($r > 0$)." Condições análogas são apresentadas, nos itens 3.2 e 3.3, para progressões crescentes, decrescentes e constantes. Não é apresentada nenhuma justificativa. Além disso, o autor não se detém em explicar ao aluno o significado da expressão condição necessária e suficiente, o que só vai ser feito no Capítulo 39. Um tratamento integrado, com uma breve justificativa, seria muito mais proveitoso para o aluno.

Como já mencionado na análise referente ao volume 1, não é feita qualquer conexão entre progressões aritméticas e funções afins. O fato fundamental de que seqüências com termo geral da forma $an + b$ são progressões aritméticas é explorado somente através do exercício (não resolvido) B3 da página 14. Como já observado ao longo de todo o volume 1, a prioridade do livro é identificar os diferentes tipos de problema relativos a progressões aritméticas e ensinar como resolvê-los. A aplicação a situações práticas recebe atenção secundária. Embora uma parte substancial da apresentação seja motivada através de exemplos interessantes, os exemplos subseqüentes e os exercícios propostos enfatizam a manipulação formal e não as aplicações.

No tratamento das progressões geométricas (Capítulos 6–10) é adotada uma linha análoga. As progressões geométricas são introduzidas através de um exemplo motivante, envolvendo juros compostos (depois, no Capítulo 10, aplicações de progressões geométricas a problemas de juros compostos são vistas com mais detalhes). Mas é dada pouca ênfase a outras aplicações. Modelos de crescimento de populações, por exemplo, só aparecem nos exercícios complementares ou nas questões de vestibulares. Analogamente ao que ocorre com as progressões aritméticas, não é feita qualquer conexão entre progressões geométricas e funções exponenciais.

Um ponto positivo a ser destacado é a apresentação cuidadosa do conceito de limite da soma dos termos de uma progressão geométrica.

Os Capítulos 11 e 12 tratam de matrizes. Mais uma vez nota-se o problema da falta de hierarquização dos conteúdos relativamente à sua importância: a definição de igualdade de matrizes, conceito básico, recebe no livro o mesmo tratamento que os elementos correspondentes em matrizes do mesmo tipo (página 64).

No lado positivo, deve-se ressaltar a preocupação do autor em apresentar uma boa dose de motivação para as definições. Por exemplo, a apresentação do conceito de matriz é motivada por uma tabela que registra a temperatura em uma região à cada hora dos quatro primeiros dias de um mês. Merece destaque, também, o tratamento dado ao produto de matrizes, freqüentemente apresentado como se fosse uma operação arbitrária e pouco intuitiva. No livro, a definição do produto de matrizes é motivada através de um exemplo adequado, no qual se consideram os preços de aquisição de um conjunto de ações em dois momentos distintos.

O mesmo cuidado não é tomado no que se refere às propriedades das diversas operações. Elas são devidamente enunciadas, mas não é apresentada nenhuma justificativa (nem mesmo através de exemplos). Isto é um problema, por exemplo, no caso da associatividade do produto, que não é, de modo nenhum, uma propriedade óbvia.

Os determinantes de matrizes quadradas são apresentados corretamente como uma função (Capítulo 13. Determinantes – uma nova função) e suas propriedades discutidas nos dois capítulos seguintes. No entanto, a definição fornecida, embora correta, tende a deixar não respondidas muitas questões na mente do aluno que reflita sobre ela. O livro define o determinante de uma matriz A como o produto dos termos da diagonal de uma matriz triangular equiparável a A (isto é, que possa ser obtida a partir de A através de operações elementares) e apóia esta definição em dois teoremas (para os quais não é oferecida nenhuma justificativa) que estabelecem que toda matriz é equiparável a uma matriz triangular e que duas matrizes triangulares equiparáveis têm o mesmo produto dos elementos da diagonal. A virtude desta definição é apresentar o aluno ao processo de triangularização e associar a definição de determinante a esse processo (no Capítulo 13, alguns determinantes são efetivamente calculados através desta definição). A principal desvantagem dela revela-se nos capítulos seguintes, em que são apresentados métodos de cálculo de determinantes, baseados no Teorema de Laplace, e suas propriedades. Em vários destes casos, é difícil estabelecer as propriedades a partir da definição. Assim, mais uma vez, é necessário recorrer a resultados não demonstrados.

O tratamento dado aos sistemas lineares tem muitos pontos positivos, embora apresente uma séria omissão (comum a praticamente todos os livros didáticos):

não é oferecida nenhuma interpretação geométrica, nem mesmo para sistemas com duas incógnitas. Os sistemas são classificados (Capítulo 16) em possíveis determinados, possíveis indeterminados e impossíveis. É dito, sem demonstração, que se um sistema linear tem mais de uma solução então tem infinitas soluções, ilustrando-se esta afirmativa com um exemplo no qual várias soluções de um sistema indeterminado são listadas. Em seguida, no Capítulo 17, mostra-se como resolver os sistemas lineares pelo método do escalonamento. Define-se o que são sistemas equivalentes e mostra-se que operações elementares sobre as equações de um sistema geram outro sistema equivalente, até chegar à forma escalonada. Um ponto a ser destacado é que o livro mostra como descrever as soluções de um sistema indeterminado. Isso é importante, pois muitas vezes o aluno pode ser levado a pensar, errôneamente, que a simples constatação de que um sistema é indeterminado esgota o seu estudo.

O livro sempre opera com a representação explícita das equações do sistema. Esta atitude tem algumas vantagens, como a de mostrar de modo concreto como um sistema se transforma em outro equivalente através do escalonamento. No entanto, o tratamento certamente ficaria mais leve se o autor empregasse a matriz do sistema e efetuasse operações elementares sobre ela. Além disso, ilustraria de modo efetivo o emprego de matrizes para representar a informação essencial presente nas equações, que é traduzida pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

No Capítulo 18, o autor ressalta as vantagens do método do escalonamento para a resolução de sistemas lineares, antes de expor o teorema de Cramer, que é utilizado a seguir, no Capítulo 19, na discussão de sistemas. O livro afirma, corretamente, que "o método do escalonamento é mais prático e mais geral que o de Cramer", mas seria mais educativo se as desvantagens computacionais do método de Cramer para sistemas com muitas incógnitas fossem tornadas mais explícitas. O teorema de Cramer não é demonstrado em geral, somente para o caso de sistemas com 3 equações e 3 incógnitas. É indicado, corretamente, que o determinante de um sistema é nulo se e somente se o sistema é possível indeterminado ou impossível (página 132).

O Capítulo 20 define matriz inversa e mostra como calculá-la através da matriz adjunta (empregando determinantes) ou resolvendo o sistema de equações resultante da equação $AA^{-1} = 1$. Estes processos, no entanto, só são práticos para matrizes de baixa ordem. Não é feita menção à possibilidade de calcular a matriz inversa de uma matriz invertível através de operações elementares. A relação entre a matriz inversa de A e as soluções do sistema $AX = B$ só aparecem nos exercícios.

Os Capítulos 21–28 são dedicados à análise combinatória. No Capítulo 21, páginas 154–156, é motivado e apresentado o "Princípio fundamental de contagem", o princípio multiplicativo. O enunciado apresentado ("Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta k resultados distintos, então o experimento composto de A e B, nesta ordem, apresenta nk resultados distintos"), no entanto, não é geral nem preciso: o enunciado e sua demonstração sugerem (mas não explicitam) que A e B são independentes. É claro, no entanto, que o princípio vale em situações mais gerais: desde que para cada um das n possíveis ocorrências de A, B possa ocorrer de k modos distintos, o número total de possibilidades é dado por nk.

O princípio fundamental é corretamente apresentado como a técnica fundamental de contagem, sendo os alunos encorajados a utilizá-lo (possivelmente junto com o princípio aditivo, referente ao número de elementos da união de conjuntos disjuntos) ao invés de aplicar fórmulas. Por exemplo, ao finalizar a dedução da expressão para o número de arranjos simples, o autor escreve que, apesar da fórmula deduzida poder ser aplicada para o cálculo de $A_{n,p}$ é preferível a aplicação do princípio fundamental. Há, no entanto, pontos onde ocorre um excesso de fragmentação dos conteúdos. Por exemplo, podemos citar, no Capítulo 27, página 194, o item 2, "Critério para diferenciar arranjo de combinação".

Os Capítulos 29–31 tratam do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton. O estudo das identidades envolvendo números binomiais dá ênfase ao cálculo rotineiro envolvendo fatoriais, ao invés de explorar sua interpretação combinatória, muito mais interessante. O Capítulo 31 é inteiramente dedicado ao problema, de pouco interesse para o aluno, de obter o termo geral de um desenvolvimento através do Binômio de Newton.

Os Capítulos 32–36 tratam de probabilidades finitas. A apresentação, de um modo geral, é adequada, mas alguns reparos devem ser feitos. Na página 227, o autor introduz "espaços amostrais equiprováveis". Esta terminologia não é usualmente adotada: um modelo probabilístico finito é caracterizado por um espaço amostral e por uma função de probabilidade. O atributo "equiprovável" se refere à probabilidade e não ao espaço amostral. A definição de probabilidade condicional apresentada é também um pouco descuidada: a probabilidade de B, dado A, é definida como a probabilidade de B ocorrer "considerando-se que A já ocorreu". Isto pode levar o aluno a pensar que só pode se falar em probabilidade condicional quando A se refere a uma situação que temporalmente precede à referida por B. Seria mais apropriado se falar, por exemplo, em probabilidade de B, na certeza da ocorrência de A.

Uma outra crítica se refere aos exemplos e exercícios apresentados. Muitos poucos deles se referem a situações em que o cálculo das probabilidades envolvidas tenha um significado relevante para o aluno. Um dos poucos casos é o problema B.14, da página 230, que trata da probabilidade de se ganhar na Sena. A maior parte dos problemas se limita a propor o cálculo de uma probabilidade, sem que o número obtido seja utilizado em um julgamento a ser feito pelo aluno. Um grau muito maior de motivação seria obtido com a inclusão de problemas em que diferentes estratégias (apostar ou não apostar, ser o primeiro ou o segundo a jogar, etc.) são analisadas através do cálculo de probabilidades simples.

Os Capítulos 37–38 são dedicados a noções de estatística. São capítulos bastante adequados, apresentado uma boa introdução à estatística descritiva. No entanto, pelo menos nos exercícios, deveriam ser apresentados problemas de probabilidade em que a distribuição de probabilidade fosse proveniente de uma descrição estatística. Também faz falta, aqui, uma maior conexão entre os conteúdos apresentados e o uso da calculadora e, possivelmente, do computador.

Como prelúdio ao estudo da geometria, o Capítulo 39 – "Teorema – técnicas de demonstração" tenta mostrar o que é o raciocínio dedutivo. É muito importante que o aluno do Ensino Médio tenha a oportunidade de apreciar a estrutura lógico-dedutiva da Matemática. É verdade, também, que a Geometria é usualmente para exemplificar esta estrutura. No entanto, pelo menos parte da discussão contida neste capítulo deveria ter sido feito no Capítulo 0 do Volume 1, que trata justamente de Lógica.

Por outro lado, como apresentação do método dedutivo o capítulo é excessivamente resumido e incompleto. Por exemplo, o autor afirma que teorema "é toda proposição que pode ser demonstrada a partir de outras proposições previamente estabelecidas". Ora, o que é uma proposição, para o autor? O que é estabelecer uma proposição? Como formulada, a definição pode conduzir à interpretação errônea de que um teorema é uma proposição demonstrada a partir de outros teoremas, o que exclui o caso dos teoremas demonstrados diretamente a partir de um conjunto de axiomas. Aliás, o autor não menciona, neste capítulo, o que é um axioma (ou postulado). Faz isso somente no capítulo seguinte. A compreensão do que é um axioma, um teorema, uma demonstração, uma condição necessária e suficiente é comprovadamente difícil para o aluno e não fica assegurada por uma apresentação sucinta de quatro páginas, seguidas de duas de exercícios.

Nos Capítulos 40–46 é desenvolvida, de modo cuidadoso, a geometria de posição. Os postulados são claramente enunciados e, ao fim de cada capítulo, é apresentado um resumo dos postulados e dos principais teoremas lá apresentados. Há, no entanto, alguns reparos a fazer.

Logo no início da apresentação da geometria espacial, há uma referência aos 13 volumes dos Elementos de Euclides. Na verdade, o trabalho de Euclides é dividido em 13 partes, ou livros. Seria interessante explicar ao aluno que cada um destes livros corresponde ao que, hoje, chamaríamos de um capítulo.

O livro opta por definir retas paralelas (página 314) como sendo retas coincidentes ou retas coplanares sem ponto comum. Embora a maior parte dos livros didáticos do Ensino Médio faça o mesmo, esta é, no nosso entender, uma prática condenável, porque desdiz o conceito de reta paralela que o aluno traz do Ensino Fundamental. E isso sem que o novo conceito traga alguma vantagem relevante.

Uma outra definição que, apesar de comum no Ensino Médio, não é conveniente, é a de retas ortogonais, caracterizadas, no livro (página 350), por serem reversas e formarem ângulos retos. Assim, segundo o livro, retas perpendiculares não são ortogonais. Mas, em cursos mais avançados, o aluno vai aprender que retas perpendiculares passando pela origem determinam subespaços ortogonais e possivelmente vai ficar confuso. Seria muito melhor se retas ortogonais fossem caracterizadas como sendo quaisquer retas que formem ângulo reto.

Ainda no tratamento de retas e planos perpendiculares, devemos observar o pouco destaque dado ao teorema das três perpendiculares, extremamente útil nas aplicações. Ele é apresentado apenas como um exercício resolvido (página 355).

Os Capítulos 47 e 48 se dedicam à geometria métrica, abordando o cálculo de distâncias e ângulos no espaço. Logo no início apresenta uma figura, no pé da página 372, que não auxilia a compreensão do conceito de projeção ortogonal. Já na página 379, a definição de um conceito reconhecidamente difícil, a distância entre duas retas reversas, é muito concisa. Não é mostrado que existe o plano que contém s e é paralelo a r, o que muitos alunos acham difícil visualizar.

O Capítulo 49 aborda a estrutura dos poliedros. Como é comum, são abordados somente poliedros convexos, sem dizer ao leitor porque se restringir a esta classe. Assim, a relação de Euler é apresentada apenas para poliedros convexos. Certamente, mereceria um comentário o fato de que ela é válida para determinados poliedros não convexos. A demonstração da relação de Euler (página 410), que é a normalmente apresentada nos livros didáticos, apresenta problemas técnicos: não é claro que as faces possam ser acrescentadas de modo que todas, exceto a última, se conectem às já colocadas em uma seqüência de arestas adjacentes. Os exercícios do capítulo contêm exercícios usuais de manipulação envolvendo a relação de Euler. Há alguns exemplos em que o aluno é convidado a mostrar que não existem poliedros verificando certas condições (por exemplo, com número de vértices igual ao de arestas). Não há, porém, problemas em que o aluno seja instado a construir um poliedro a partir de alguma informação (por exemplo, como pode ser um poliedro que tenha 8 arestas?).

O Capítulo 50 é dedicado aos "poliedros notáveis" e demonstra que só existem 5 tipos de poliedros regulares. Os exercícios do capítulo são interessantes, levando o aluno a se familiarizar com tais poliedros.

Os capítulos restantes (51–57) apresentam os principais sólidos, dando destaque ao cálculo de seus volumes e áreas. O volume do paralelepípedo retângulo é calculado (Capítulo 51) a partir do volume do cubo unitário; só se considera, no entanto, o caso em que as dimensões do paralelepípedo são dadas por números inteiros, sem discutir, sequer, o caso de dimensões racionais.

A seguir, é apresentado o princípio de Cavalieri (Capítulo 52 – Comparação de volumes) e o utiliza, daí em diante, para calcular volumes de sólidos geométricos, começando com um prisma arbitrário. O princípio é enunciado corretamente. Sua apresentação, no entanto, poderia ser acompanhada de uma maior discussão a respeito de sua plausibilidade (por exemplo, convidando o aluno a imaginar os dois sólidos cortados em fatias bem finas determinadas por planos paralelos ao plano dado).

Os Capítulos 53–54 estudam as pirâmides. Mostra-se, no Capítulo 54, que o volume de uma pirâmide triangular é igual a $1/3$ do volume de um prisma de mesmas base a altura, empregando-se, para isto, o fato de que pirâmides de mesma base e altura têm o mesmo volume, deduzido com auxílio do Princípio de Cavalieri. As deduções são corretas, mas poderiam ser muito simplificadas se se observasse que a seção de uma pirâmide por um plano paralelo à base fornece uma pirâmide homotética e, portanto, semelhante à pirâmide original. Perde-se, aqui, uma excelente oportunidade de comentar o fato fundamental de que, se duas figuras semelhantes são semelhantes na razão k, então a razão entre suas áreas é k^2 e a razão entre seus volumes é k^3. Do modo como apresentado, o aluno fica sabendo que a razão b/B entre as áreas das bases das pirâmides é igual a $(d/D)^2$, mas não percebe que isso exprime um fato mais geral.

Nos Capítulos 55 e 56, são estudados cones e cilindros. O autor limita a sua atenção a cilindros e cones circulares, mas informa ao aluno que existem cilindros e cones mais gerais. As áreas de cones e cilindros são deduzidas através da planificação de suas superfícies e seus volumes deduzidos através da comparação, através do Princípio de Cavalieri, com prismas e pirâmides, respectivamente. Troncos de cilindro são também estudados.

O Capítulo 57 trata da esfera. A terminologia empregada é a usual no Ensino Médio, em que se faz a distinção entre esfera e superfície esférica. Deve-se comentar que esta não é a terminologia usualmente empregada em cursos mais avançados, em que esfera denomina a superfície, reservando-se nomes como "bola" ou "disco tridimensional" para se referir à união da superfície com seu interior. O capítulo começa com uma boa discussão a respeito de posições relativas entre planos e esferas (embora, alternativamente, o autor pudesse ter optado por introduzir esferas e suas propriedades métricas mais cedo). A seguir, o volume da esfera é deduzido com o Princípio de Cavalieri aplicado à anti-clepsidra. Um argumento diferencial é usado para obter a área da esfera, a partir de seu volume (calcula-se a diferença entre os volumes de uma esfera de raio $R+h$ e uma esfera de raio R e argumenta-se que, para h pequeno, esta diferença é igual ao produto de h pela área da superfície esférica). Um argumento essencialmente equivalente, mas mais simples, seria o de se considerar uma esfera como dividida em pirâmides com vértice no centro da esfera e base sobre a superfície da esfera.

Finalmente o Capítulo 58 traz uma coletânea de problemas referentes à inscrição e circunscrição de sólidos. Mais uma vez, vale o comentário de que o autor poderia ter optado pela estratégia de apresentar tais problemas, que de modo geral são interessantes e contribuem para desenvolver o raciocínio espacial, ao longo do livro, ao invés de concentrá-los neste último capítulo.

Resumo da avaliação do segundo volume

Em relação à sua proposta, expressa na contracapa como sendo a de "ao mesmo tempo em que constrói e orienta a aprendizagem, valorizar o espírito crítico e questionador do aluno", o segundo volume da obra é bem mais sucedido que o anterior.

A apresentaçào da teoria é quase sempre motivada através de um exemplo relevante. Além disso, o texto não se mostra tão quebrado, fornecendo uma maior continuidade entre os tópicos estudados. O livro apresenta exercícios interessantes, principalmente nas partes dedicadas à análise combinatória, probabilidades e estatística. Nos capítulos dedicados às probabilidades e à estatística há gráficos e tabelas.

Uma crítica que pode ser feita aos exercícios é que eles não proporcionam oportunidade para o aluno desenvolver a capacidade de modelar situações concretas em linguagem matemática. Os exercícios já dizem ou deixam implícito qual modelo matemático deve ser utilizado pelo aluno, sem permitir explorações e investigações independentes pelo aluno. Além disso, tecnologias importantes, como calculadora e computador não são mencionados (os tópicos estudados ao longo do livro certamente permitiriam menção ao seu uso).

A maior parte dos conceitos estudados ao longo do livro são apresentados de forma honesta, claramente informando ao leitor quando um resultado não é demonstrado. Um ponto do programa onde esta atitude fica patente é no estudo dos determinantes. O autor é levado a esta atitude devido à necessidade do texto abranger os programas de vestibulares. É de se lamentar que tais programas forcem este modo de proceder. Seria muito mais proveitoso para o aluno que os assuntos abordados fossem em menor número, mas permitindo a justificativa cuidadosa de cada conceito. Ao apresentar resultados sem justificativa (o que no livro sob exame ocorre pouquíssimas vezes) se está apenas contribuindo para reforçar a visão errônea que o importante em Matemática é aplicar fórmulas.

Manoel Paiva

Coleção Matemática – volume 3

Descrição sucinta do volume 3

O terceiro volume desta obra tem estrutura idêntica as dos demais. O livro está dividido em 34 capítulos, e tem 608 páginas de texto, seguidas de 45 páginas com soluções de exercícios.

As demais características deste volume são também idênticas aos dos que o precedem: cobertura detalhada dos tópicos matemáticos abordados, falta de hierarquização dos conteúdos apresentados e decomposição dos tópicos em inúmeros casos, o que fragmenta o conhecimento e pode fazer com que o aluno perca a visão de conjunto do assunto.

O volume não apresenta bibliografia com leituras suplementares para o aluno. Não são indicadas a formação e a experiência profissionais do autor. A apresentação do livro é igual às dos volumes anteriores. Mais uma vez, a composição tipográfica é de ótima qualidade e as ilustrações são muito boas.

Análise crítica do volume 3

Os capítulos de 1 a 15 são dedicados à geometria analítica. Logo na introdução do Capítulo 1, se afirma, corretamente, que "aliando a álgebra à geometria, [a geometria analítica] possibilita o estudo das figuras geométricas, associando-as a um sistema de coordenadas". Não se menciona, no entanto, que o caminho inverso é também importante: muitas vezes, se obtém informações importantes sobre propriedades de equações (principalmente algébricas) a partir das figuras que elas determinam. Por outro lado, apesar do extenso tratamento dado à geometria analítica, que compreende 294 páginas, o livro não ilustra devidamente o método da geometria analítica para resolver problemas geométricos. Em todas as ocasiões, as figuras geométricas são estudadas em um sistema de coordenadas dado e são descritos os métodos para executar as construções básicas envolvendo estas figuras. Em nenhum momento, o livro aborda problemas onde o sistema de coordenadas não é dado e sim estabelecido no processo de resolução. Um problema deste tipo é o de demonstrar que as alturas de um triângulo ABC se encontram em um ponto. Um sistema conveniente para este problema é, por exemplo, aquele em que o eixo dos x coincide com o lado BC e o deixo dos y coincide com a altura relativa a A. Neste sistema, os vértices do triângulo têm coordenadas $A(0, A)$, $B(b, 0)$ e $C(c, 0)$ e é fácil encontrar as equações das alturas e obter seus pontos de interseção. É muito importante, em problemas deste tipo, mostrar ao aluno que a escolha adequada dos eixos não prejudica a generalidade da solução.

O Capítulo 1 aborda, de maneira bastante clássica, a geometria analítica da reta. Embora correto do ponto de vista matemático, o capítulo trata o assunto com uma complexidade desnecessária. A notação apresentada, por exemplo, certamente é confusa para o aluno: $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{\overline{AB}}$ e AB representam coisas diferentes. Esta complexidade não se justifica pelo pouco uso dados a estes conceitos nos capítulos que se seguem. Ainda no Capítulo 1, deve-se observar que a definição da razão em que um ponto divide um segmento é diferente da usual. A maior parte dos autores elege definir esta razão como negativa quando o ponto é interior e negativa quando exterior. O livro faz justamente o contrário.

O Capítulo 2 trata dos conceitos básicos da geometria analítica no plano, abordando distância entre dois pontos e divisão de um segmento por um ponto, com a aplicação usual ao cálculo do baricentro de um triângulo.

O Capítulo 3 aborda a equação da reta. Para começar, falta, no início do capítulo, uma explicação sobre o que é a equação de uma figura geométrica. Em lugar disso, o primeiro parágrafo do capítulo apresenta a condição de alinhamento de três pontos expressa sob a forma de um determinante. Esta forma de expressar a condição de alinhamento é muito popular, por ser bastante mnemônica. No entanto, ela tem o grande inconveniente de revestir de mistério algo que é extremamente simples. A maior parte dos alunos não tem a menor idéia do porquê desta expressão; apenas a aplicam mecanicamente, sem ver nela qualquer propriedade essencial da reta. É muito melhor usar, por exemplo, a condição de alinhamento que calcula a declividade da reta usando um par de pontos por vez e iguala os resultados.

Uma vez estabelecida a condição de alinhamento de três pontos, o livro mostra que ela pode ser usada para estabelecer a equação de uma reta, chegando-se então à chamada equação geral da reta $ax + by + c = 0$. Não se faz nenhuma menção ao significado dos coeficientes da equação. A seguir, mostra-se como achar o ponto de interseção de duas retas, através da resolução de um sistema de equações. Não é explorado o caminho inverso, mostrando que as soluções de um sistema de equações a 2 incógnitas são os pontos de interseção das retas correspondentes às equações. Este seria um bom lugar para mostrar como a geometria analítica é uma via de duas mãos, tanto usando a álgebra para auxiliar a geometria quanto a geometria para auxiliar a álgebra.

O Capítulo 4 estuda o que o autor chama de equação fundamental da reta, que expressa a equação da reta em termos do coeficiente angular e das coordenadas de um de seus pontos. Como é usual nos livros para o Ensino Médio, o coeficiente angular é definido como sendo a tangente da inclinação, que, por sua vez, é o ângulo que a reta forma com o eixo dos x. A seguir, se mostra que o coeficiente angular é igual à taxa de variação dy/dx entre dois pontos quaisquer da reta. Seria preferível fazer o caminho inverso, por ser a segunda caracterização muito mais simples e útil para o aluno. Com o uso do coeficiente angular, o livro obtém, enfim, a condição de alinhamento cujo uso defendemos acima.

Dentro do seu estilo de fragmentar os assuntos, a equação reduzida da reta ($y = mx + q$) é deixada para o Capítulo 5. Condições para paralelismo e perpendicularismo de retas são estabelecidas para retas expressas nesta forma. Seria interessante que estas condições também fossem estabelecidas para retas na forma $ax + by + c = 0$, ainda que em um exercício resolvido.

O Capítulo 6 estuda a fórmula da distância de um ponto a uma reta e suas aplicações. A demonstração da fórmula é feita corretamente, como em todo o livro, mas de uma forma mais complexa do que o necessário. O Capítulo 7 trata de tópicos isolados relativos à equação da reta. É apresentada, com mais destaque do que necessário, a forma segmentária da reta, que poderia ser abordada sob a forma de um exercício resolvido. A seguir, é feita uma boa apresentação das equações paramétricas da reta, adequadamente motivadas como descrevendo a trajetória de uma partícula. Finalmente, feixes de planos de retas paralelas e concorrentes são estudados. Novamente, talvez bastasse abordar estes assuntos através de exercícios resolvidos.

O Capítulo 8 estuda ângulos entre retas e inequações do 1º grau. Não parece haver muita razão para que estes dois tópicos formem um capítulo (a não ser, talvez, que as figuras para ilustrá-los são parecidas). É apresentada a fórmula clássica para a expressão da tangente do ângulo entre duas retas, em termos de seus coeficientes angulares. A seguir, são estudadas inequações do 1º grau a duas variáveis. O exercício R.16, da página 125, mostra um ótimo exemplo da aplicação destes conceitos para resolver um problema de programação linear. Pela primeira vez, o aluno tem a oportunidade de ver a geometria analítica auxiliando a resolver um problema prático. No entanto, o autor quase que se desculpa por ter dado tal exemplo, declarando que “não vamos exigir, nos exercícios propostos, problemas como esse”. Em lugar disso, são apresentados exercícios que se limitam a exercitar as técnicas apresentadas, sem mostrar sua aplicação nem exigir qualquer criatividade por parte do aluno.

Os Capítulos 9 e 10 abordam a equação da circunferência. A grande virtude do Capítulo 9 é mostrar, de forma clara e pausada, como recuperar o centro e o raio de uma circunferência, a partir da equação desenvolvida, completando os quadrados dos binômios em x e y. No Capítulo 10 são estudadas posições de pontos e retas em relação a uma circunferência dada. Aproveita-se para falar em inequações do 2º grau que correspondam ao interior ou exterior de uma circunferência. Discute-se, também, a posição relativa de duas circunferências e obtém-se os pontos de interseção de duas circunferências secantes. É interessante comentar que este último problema é resolvido subtraindo as equações das duas circunferências, de modo a obter uma equação do 1º grau. Em nenhum momento, se pede ao aluno para identificar que a reta correspondente a esta equação é justamente a reta de interseção das circunferências. Este é mais um exemplo de que a ênfase está em resolver problemas de modo rotineiro e não em usá-los para levar o aluno a refletir sobre o que está aprendendo.

Os capítulos a seguir são dedicados ao estudo das cônicas. O Capítulo 11, que aborda a elipse, inicia com uma introdução bastante motivante, onde é ilustrado o processo de construção de uma elipse através de um barbante amarrado a duas estacas. As ótimas ilustrações contribuem para o maior interesse do aluno. A definição formal é dada logo a seguir. Em seguida, a definição é explorada para obter propriedades geométricas da elipse, sem a introdução de coordenadas. Não são mencionadas, no entanto, as propriedades de simetria associadas aos eixos da elipse. A equação da elipse é, então, escrita para a situação onde os focos estão em posição geral. A dedução da equação para a elipse com os focos sobre os eixos e o centro na origem é apresentada sob a forma de um exercício resolvido. A seguir, no entanto, é apresentada a dedução da equação na situação mais geral em que os eixos são paralelos aos eixos coordenados, sendo o centro arbitrário. A atitude de escrever a equação da elipse em situações mais gerais tem vantagens e desvantagens. A principal vantagem é mostrar que a equação pode ser obtida em qualquer situação. A desvantagem é perder mais uma oportunidade de mostrar que, para estudar as propriedades geométricas da elipse, é perfeitamente legítimo posicionar os eixos na posição mais favorável.

A seguir, na página 179, são caracterizados o interior e o exterior de uma elipse. Há vários reparos a fazer. A seção se inicia com uma tentativa de caracterização do interior e do exterior como sendo regiões E_1 e E_2 satisfazendo a determinadas propriedades que, no entanto, não bastam para caracterizar o interior e o exterior. Depois são apresentadas, em três propriedades separadas, caracterizações para estas regiões em termos da soma das distâncias aos focos. Seria bem melhor optar por uma apresentação mais singela e integrada, definindo o interior e o exterior como sendo os conjuntos dos pontos do plano tais que a soma de suas distâncias aos focos é, respectivamente, menor do que e maior do que $2a$ e observando que estas regiões são separadas pelos pontos da elipse, nos quais a soma é precisamente $2a$.

O Capítulo 12 aborda a hipérbole e segue a mesma linha do capítulo anterior, com as mesmas virtudes e defeitos. A apresentação é bastante completa, abordando adequadamente todos os elementos geométricos da hipérbole, incluindo as assíntotas. Novamente a hipérbole é tratada, inicialmente, em posição geral. É uma pena que não se aproveite a ocasião para mostrar que o gráfico de $y = 1/x$ é uma hipérbole (no entanto, isto é feito, posteriormente, na página 254, ao se tratar da equação geral do 2º grau). A última seção do capítulo é dedicada ao estudo das possíveis posições relativas entre uma reta e uma hipérbole. O estudo é feito de forma bastante cuidadosa, não incorrendo no erro, muito comum, de afirmar que retas tendo exatamente um ponto em comum com uma hipérbole são tangentes a ela. O livro aponta, corretamente, que retas paralelas às assíntotas cortam a hipérbole em exatamente um ponto sem serem a ela tangentes.

O Capítulo 13 aborda a parábola e é desenvolvido segundo a mesma abordagem dos anteriores. Uma omissão flagrante é não aproveitar para relacionar o conteúdo visto aqui com o estudado na 1ª série. Lá, se mencionou que curvas de equação $y = ax^2 + bx + c$ são parábolas. Não há nenhuma menção ao fato de que este resultado é demonstrado agora. Outra oportunidade é perdida no exemplo que abre o capítulo, onde se afirma que o jato de uma mangueira tem a forma de uma parábola mas não se explica, na seqüência, porque isto ocorre. Não há menção, ainda, à propriedade de reflexão da parábola, que justifica a sua utilização mais conhecida pelos alunos (nas antenas parabólicas). Novamente, o estudo da posição relativa de uma reta e uma parábola é feito de forma correta e cuidadosa.

O Capítulo 13 se encerra com um parágrafo (sob o título "Curiosidade") onde, pela única vez, se faz menção ao fato de que as curvas estudadas nos últimos três capítulos podem ser obtidas através de seções em um cone (sendo, por isso, chamadas de cônicas). Para ilustrar este fato, o livro exibe uma figura mostrando as ondas de choque, em forma de cone, produzidas por um avião, que aparentemente voa paralelamente ao chão, e afirmando que as curvas de interseção com o solo são parábolas. Esta afirmativa está errada: se o eixo do cone é paralelo ao solo (ou faz um ângulo pequeno com esta direção), a interseção do cone com o solo é um dos ramos de uma hipérbole (o outro ramo é obtido intersectando-se o prolongamento do cone com o solo).

O Capítulo 14 trata da identificação da curva representada por uma equação geral do 2º grau. O tratamento é bastante completo, ensinando-se o aluno a reduzir uma equação geral de modo a poder ser facilmente identificada, através de translação — abordada através de completamento de quadrados — ou rotação de eixos.

Finalmente, o Capítulo 15 — o último relativo à Geometria Analítica — trata do conceito de lugar geométrico. O conceito é adequadamente apresentado e são dados vários exemplos de obtenção de equações de lugares geométricos. Em todos os exemplos, no entanto, observa-se novamente que o sistema de coordenadas já é dado. Perde-se, assim, uma oportunidade de mostrar ao aluno que o método da geometria analítica é útil mesmo quando um sistema de coordenadas não é dado. Por exemplo, consideremos o problema de identificar qual é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença dos quadrados a dois pontos dados é uma constante positiva. Este problema é facilmente (e naturalmente) resolvido estabelecendo um sistema de coordenadas (por exemplo, aquele em que os pontos dados têm coordenadas $(0, -a)$ e $(0, a)$) e escrevendo a equação relativa à condição dada.

Os capítulos 16–18 tratam de números complexos. A introdução do conceito é motivada pela necessidade da ampliação do conjunto dos reais para permitir a extração de raízes quadradas de ordem par de números negativos. Não se esclarece, no entanto, porque essa ampliação é desejável. Seria bem vinda, aqui, uma nota histórica relativa à descoberta da fórmula para a resolução de equações do 3º grau, que tomou tal ampliação necessária.

O livro define, então, um número complexo como sendo um número da forma $a+bi$, onde a e b são reais e i é a unidade imaginária (esta é, de fato, a abordagem mais adequada para o ensino médio). A seguir definem-se complexos iguais como sendo aqueles que possuem partes reais e imaginárias iguais. Depois, as operações com números complexos são definidas e suas propriedades cuidadosamente estabelecidas. Em resumo, o Capítulo 16 trata de maneira adequada e competente complexos expressos na chamada forma algébrica.

O Capítulo 17 aborda a representação geométrica e a forma trigonométrica dos números complexos. Embora os conceitos sejam apresentados corretamente, há uma séria omissão: as interpretações geométricas da adição e da multiplicação de complexos não são apresentadas, o que impede que parte do potencial de utilização de complexos para facilitar a resolução de problemas de geometria fique inexplorado. São vistos alguns exemplos explorando o fato de que $|z - a|$ é a distância entre os complexos z e a, mas não se emprega, por exemplo, o fato de que multiplicar um complexo z por $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ consiste em submetê-lo a uma rotação de ângulo α em torno da origem.

O Capítulo 18 termina a apresentação dos números complexos com o estudo das fórmulas de De Moivre. Aqui, o livro enfatiza, adequadamente, a interpretação geométrica, apontando que as raízes de ordem n de um complexo formam os vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de centro na origem. Uma ilustração seria, no entanto, bem vinda.

Os Capítulos 19–22 tratam de polinômios a uma variável e equações algébricas.

O Capítulo 19 começa por colocar, corretamente, a distinção entre polinômios e funções polinomiais e por esclarecer que vai considerar polinômios complexos. A seguir, são estabelecidas as definições básicas (grau, identidade, operações, etc.). O exercício resolvido R.18 aborda o conceito de polinômios idênticos, mostrando que se $P \equiv Q$ então $P(a) = Q(a)$ para todo complexo a. A observação colocada a seguir (que diz que se pode definir polinômios idênticos como sendo tais que $P(a) = Q(a)$ para todo a) sugere que a recíproca seja verdadeira. Mas nem a afirmativa é colocada explicitamente nem é apresentada justificativa para ela.

O Capítulo 20 é dedicado à divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau, com ênfase para o dispositivo de Briot–Ruffini. Seria útil mencionar que este algoritmo fornece, também, a forma mais eficiente de se calcular o valor numérico de um polinômio.

O Capítulo 21 trata das propriedades básicas das equações algébricas. Merecia um maior destaque, no início do capítulo, o teorema de D'Alembert, visto no capítulo anterior, que estabelece que a é raiz de $P(x)$ se e só se $P(x)$ tem o fator $(x - a)$. Embora esta propriedade seja aplicada, por exemplo, logo no exercício resolvido R.1, ela é tão essencial para a resolução de equações algébricas que deveria ser mencionada na teoria. A seguir, é enunciado o Teorema Fundamental da Álgebra, com breve menção à demonstração de Gauss. Esta menção é bastante positiva, para informar ao aluno que se trata realmente de um teorema a ser visto em um curso mais avançado. Com auxílio do teorema fundamental da Álgebra e do teorema de D'Alembert é, então, enunciado e demonstrado que todo polinômio complexo de grau n pode ser fatorado como o produto de n fatores do 1º grau, o que permite definir adequadamente a multiplicidade de uma raiz. O restante do capítulo trata dos teoremas relativos a raízes conjugadas, para polinômios com coeficientes reais e coeficientes racionais.

Finalmente, o Capítulo 22 trata das relações entre coeficientes e raízes de uma equação, com diversos exemplos de aplicações, e do Teorema de Bolzano. Se menciona, de forma algo tímida, que tal teorema é importante ferramenta para a aplicação de métodos numéricos de determinação de raízes, por apontar intervalos onde existam raízes. Não custaria ilustrar esta afirmativa com o método da bisseção, que é um algoritmo que emprega exclusivamente o teorema de Bolzano para obter aproximações sucessivamente melhores de uma raiz de um polinômio.

Os capítulos restantes são destinados ao estudo de limites e funções — capítulos 23 a 35, num total de 230 páginas. Estes capítulos representam de maneira perfeita a metodologia adotada no livro. Por um lado, estes capítulos caracterizam-se por um nível de rigor análogo ao encontrado em textos universitários. No entanto, não deixam claras a importância e eficiência das idéias do cálculo para resolver problemas. Em se tratando de um livro destinado ao ensino médio, nos parece que as prioridades estão invertidas.

O Capítulo 23 trata de limites de funções reais de variáveis reais. Aqui deveria ser feita uma revisão da noção de função, fundamental para tudo o que se segue. Os exemplos intuitivos que são apresentados para sugerir a idéia de limite não são bem escolhidos, com exceção do último, que trata da aproximação do comprimento de um segmento.

Do ponto de vista histórico, o livro dá uma informação errada, pois não foram Newton e Leibniz que formalizaram o conceito de limite. Ao contrário, suas idéias sobre o assunto eram extremamente nebulosas, e só foram tornadas claras no Século XIX, por Cauchy.

O livro apresenta a definição de limite de uma função por épsilons e deltas e a exemplifica para calcular alguns limites simples. Na série de exercícios R.15–R.19, as demonstrações são artificiais, a escolha dos deltas parece um passe de mágica. Para se ter idéia do nível de rigor da exposição, cite-se que o texto demonstra, corretamente (exercício R.25), que se f é uma função real de variável real e o limite de f quando x tende para a é L, diferente de zero, então existe uma vizinhança de a da qual todo elemento tem imagem por f com o mesmo sinal de L.

Os exemplos motivadores para a definição de continuidade de uma função real de variável real são bons, embora poucos (dois). Após definir continuidade em termos de limite, são apresentados demonstrações da continuidade de algumas funções: $1/x$. x^2, $\sqrt{x}$ e raiz n-ésima de x. Como exercícios resolvidos, encontra-se que toda função polinomial é contínua, e que toda função racional é contínua nos pontos em que está definida. Demonstra-se também (seção 4, página 425) que o limite da função composta existe.

Mais um exemplo da falta de hierarquização dos conteúdos segundo sua importância é a existência de todo um capítulo — Capítulo 25 — sobre os limites e continuidade laterais. No capítulo sobre limites infinitos — Capítulo 26 — encontram-se gráficos de funções racionais.

Limites e continuidade de funções trigonométricas são demonstrados a partir do fato de que o limite quando x tende para zero de $\operatorname{sen}(x)/x$ é 1, resultado demonstrado na página 494.

O autor admite, sem demonstração, que o limite quando n tende para infinito de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ existe e convenciona representar seu valor e. A partir deste fato são calculados vários limites.

O conceito central de derivada é tratado no Capítulo 31. Trata-se de um capítulo bastante deficiente.

Em primeiro lugar, a motivação para a derivada se restringe a um exemplo, o cálculo do coeficiente angular da tangente a uma parábola. Mesmo neste exemplo, não se calculam valores do quociente de Newton $\Delta y/\Delta x$ para alguns valores do acréscimo h. Diz-se então que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função e se passa à definição formal geral de derivada. Não há outras interpretações da derivada nem se mostra ou comenta sua importância em vários contextos.

Os exercícios resolvidos limitam-se a calcular a derivada de algumas funções simples, sempre interpretando-a como a reta tangente ao gráfico da função.

O Capítulo 32 apresenta as chamadas "regras de derivação", incluindo uma demonstração correta da regra da cadeia, que permite derivar funções compostas. Já o Capítulo 33 mostra como achar a derivada de funções inversas e introduz a derivação implícita. O Capítulo 34 estuda a variação de uma função utilizando sua derivada. O tratamento é o que se encontra em qualquer texto para um primeiro curso universitário.

Infelizmente, este capítulo, que seria ocasião para um sem número de problemas de aplicações, apresenta somente dois problemas de máximos e mínimos resolvidos, os exercícios R.13 e R.14. Trata-se de uma falha grave, pois sem dúvidas uma das grandes aplicações da derivada é resolver problemas de máximos e de mínimos e este é um assunto que permite uma integração natural da álgebra com a geometria e que desperta o interesse dos alunos.

Somente no fim do texto se aborda a interpretação da derivada como velocidade ou como aceleração.

O estoque de funções discutidas fica muito aquém da teoria apresentada. Os gráficos dos exercícios resolvidos são simples e imediatos. Somente nos exercícios por resolver do Capítulo 35 encontramos funções cujos gráficos são mais interessantes e desafiadores, e que exigem realmente toda a teoria apresentada.

Resumo da avaliação do terceiro volume

O terceiro volume da coleção representa bem a obra, em suas características positivas e negativas. São abordados, neste volume, conceitos matemáticos que, de um modo geral, são mais sofisticados que os tratados nos outros volumes, tais como a equação geral do 2º grau, números complexos, teoria das equações e cálculo. Nos aspectos formais, a obra se sai bastante bem. Quase não há incorreções e praticamente tudo é corretamente justificado.

No entanto, o leitor deste livro certamente o termina com a impressão de que a Matemática é apenas um fim em si mesma. A quase totalidade das questões aqui tratadas são internas à Matemática e formuladas diretamente em sua linguagem. Mais ainda: formuladas com a linguagem específica do assunto abordado, sem mostrar conexões com outras partes da Matemática. Assim, por exemplo, o aluno faz um curso relativamente avançado em geometria analítica e termina sem vê-la aplicada a problemas práticos ou a problemas de geometria formulados sem um sistema de coordenadas (e é justamente aqui que reside a sua força maior, a de oferecer um mecanismo mais ou menos automático para estudar geometria). Da mesma forma, estuda complexos, polinômios e equações sem que um só exemplo de problema que recaia em uma equação algébrica seja apresentado. No aluno mais questionador é natural que esta atitude desperte uma indagação: é realmente importante estudar estes assuntos? E exemplos motivadores não faltam: na geometria, na matemática financeira e em muitos outros assuntos abundam problemas que recaem em equações algébricas.

O descompasso entre rigor matemático e aplicações é ainda mais nítido no estudo do cálculo. O tratamento aqui dado à teoria dos limites é mais rigoroso do que o contido em vários cursos de nível universitário. Apesar de ser louvável esta preocupação com a precisão, infelizmente o livro deixa de atender à sua necessidade maior, que é a de oferecer ao aluno do ensino médio a oportunidade de entender porque o cálculo desempenha papel de tanta relevância na Matemática.

Em resumo, trata-se de obra de autor sério e cuidadoso nos aspectos formais, mas que coloca ênfase demasiada neles e se descuida de outros aspectos igualmente importantes e que permitem que o aluno veja a Matemática como uma ciência integrada às demais e ao cotidiano. A chamada na contracapa do livro anuncia "o resgate do verdadeiro ensino da matemática". Na nossa opinião, este resgate é apenas parcial.