Dante

Matemática, Contexto e Aplicações – volume 1

Capítulo 1. Revisão

O primeiro capítulo do livro consiste numa seqüência de 79 exercícios sobre números, equações do primeiro e do segundo grau, sistemas 2×2, geometria (medidas) e gráficos estatísticos. Os exercícios são bem dosados e servem de aquecimento para o início do Ensino Médio. Há apenas um reparo a fazer: na página 13 menciona-se o quociente *entre* dois números. A terminologia usual é "o quociente *de* um número *por* outro" (do dividendo pelo divisor).

Capítulo 2. Conjuntos

Logo neste capítulo inicial sobre conjuntos, percebe-se que este livro distingue-se dos seus congêneres por adotar um ponto de vista objetivo, consciente do significado da presença deste assunto no currículo. É ressaltado em poucas palavras o papel unificador da noção de conjunto. Os exemplos apresentados de conjuntos são, em sua maioria, tirados do contexto matemático (conjuntos de figuras geométricas, por exemplo), deixando antever a inserção natural desse conceito nos vários domínios da Matemática e, ao mesmo tempo, revisando noções básicas estudadas nos anos anteriores.

A conexão entre conjuntos e lógica é feita de modo bastante claro, simples e sem alardes.

Cabem aqui algumas observações que poderiam ser acrescentadas para melhorar a apresentação: a afirmação de que $\emptyset \subset A$ para todo A não é óbvia e deveria ser acompanhada de uma explicação.

Outra ausência que deve ser reparada é a noção de contrapositiva de uma proposição. Trata-se de algo bastante útil, um instrumento freqüentemente empregado nos raciocínios matemáticos e fácil de entender. Tendo estabelecido que a implicação lógica significa uma inclusão de conjuntos, a equivalência $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$, mencionada na página 32, deveria ser, em primeiro lugar, justificada (pois não foi dita uma só palavra de esclarecimento sobre sua validade) e em seguida relacionada com a contrapositiva.

Antecipando-nos à análise a que submeteremos os capítulos posteriores, faremos agora um comentário sobre o uso da contrapositiva. Na página 81, uma função $f\colon A \to B$ é chamada injetora quando cumpre a seguinte condição: $x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Esta definição é correta e esclarece muito bem a idéia. Mas na prática, na maioria das vezes em que se quer mostrar que uma função é injetora, usa-se a contrapositiva da implicação acima: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Por isso, a definição da página 83 deveria ser seguida do seguinte adendo "... ou, equivalentemente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$".

Vejamos um exemplo: dada $f\colon A \to B$ suponhamos que exista $g\colon B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Queremos mostrar que, nestas condições, f é injetiva. A maneira mais natural de argumentar é: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$.

A propósito: o termo "injetiva" é preferível a "injetora", inclusive porque se presta à formação de derivados como "injetividade", enquanto que "injetoridade" simplesmente não existe.

Na página 31, depois de mostrar que um conjunto com 3 elementos possui 8 subconjuntos, o autor sugere que o leitor examine outros conjuntos para constatar que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Aqui caberia uma observação do tipo "isto será provado mais tarde, no vol. 2". (Com efeito, é uma conseqüência imediata do princípio multiplicativo, o qual deve estar na página 1 de toda apresentação de Análise Combinatória.)

Defeito maior se encontra na página 38. Ali, depois de verificar a relação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ num simples exemplo, é feita a afirmação: "*logo*, quando $A \subset B$ são conjuntos finitos, tem-se ... (segue-se a mesma fórmula)". O autor de um livro tem sempre a opção de demonstrar ou não suas afirmações. Mas nunca deve dar a entender que um fato geral pode ser enunciado como uma conclusão que se segue de um exemplo, ou mesmo dois, ou três. O exame de situações particulares antes de enunciar um princípio geral (ou uma definição) é uma atitude louvável, mas é preciso deixar claro que a veracidade de alguns exemplos não autoriza conclusões amplas.

A fórmula para $n(A \cup B)$ (e mesmo para $n(A \cup B \cup C)$, que é mencionada de passagem) merecia um comentário, ainda que breve, sobre a razão de sua validade. Mais ainda: na página 84, quando será discutido o conceito de número cardinal de um conjunto, não é dito que o número de elementos de um conjunto finito é o número cardinal desse conjunto. Seria interessante também observar que *contar* os elementos de um conjunto X é definir uma função bijetiva $f\colon I_n \to X$, onde $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e dizer que este n é o próprio $n(X)$. Já que em tantas ocasiões se fala em conjunto finito e conjunto infinito, ali seria um bom lugar para explicar esses conceitos. Com a capacidade de síntese que o autor mostra possuir, a tarefa não seria de difícil execução.

Os conjuntos numéricos são estudados neste capítulo. Acertadamente, os números são apresentados como resultados de contagens ou medidas, ao contrário da maioria (totalidade?) dos outros livros que os deixam sem explicação.

Talvez como uma concessão ao hábito que estará presente (e será cobrado) nos exames vestibulares, o autor adere a convenções que não são adotadas em estudos posteriores, como incluir o zero nos conjuntos $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, etc., o que leva a notações abomináveis como $\mathbb{Z}_+^*$ para indicar o conjunto que deveria simplesmente ser representado por $\mathbb{N}$.

Sobre os números irracionais, o autor explica que eles surgem da medição de uma grandeza incomensurável com a unidade adotada. Isto parece natural (e é) mas é incrível como os textos congêneres (salvo alguma possível exceção) nunca mencionam isto. Infelizmente, a explicação de que $\sqrt{2}$ é irracional não satisfaz. O livro diz: "Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, número que não é decimal exata nem dízima periódica ..." Ora, examinando o desenvolvimento decimal de um número, nunca podemos garantir que ele seja irracional. Mesmo o número π, que o livro diz ter sido calculado com 1 bilhão de casas decimais (na verdade já são 5 bilhões), poderia ser racional, com um período muito grande. Aqui poderia ser feito um breve comentário sobre o método matemático. Um raciocínio simples mostra que não existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $p^2 = 2q^2$, logo $\sqrt{2}$ não é racional. Daí decorre que a expressão $1{,}414213\ldots$ não é periódica. Este é o verdadeiro argumento. O argumento contrário não é válido. Quanto a π, também se pode provar que é irracional, mas a demonstração é muito mais difícil. Tal demonstração é o único modo que temos para saber que nenhum computador vai encontrar periodicidade no cálculo dos algarismos decimais de π, mesmo que examine alguns trilhões de dígitos.

No final da página 44, encontramos o seguinte trecho: "Com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a reta fica completa ...". Ora, com ou sem os números reais, a reta sempre foi completa. Os números racionais é que não bastavam para esgotar os pontos da reta.

Também faltou dizer como se faz a correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta. (Escolhendo na reta uma origem, um sentido de percurso e uma unidade de comprimento.)

No final do Capítulo 1 é dado o critério geométrico para decidir a desigualdade entre números reais. Ficou faltando o critério aritmético: representando os números dados como decimais, como saber qual é o maior? (Cuidado com a igualdade!) E o critério algébrico: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$.

Capítulo 3. Funções

Este capítulo contém uma das melhores apresentações do importante e fundamental conceito de função para os alunos do Ensino Médio. Após uma introdução em que são mostrados vários exemplos, a definição de função é dada do modo correto, em duas linhas, sem o entulho dos formalismos tolos e irrelevantes usados pela maioria dos livros congêneres, que definem função como um subconjunto do produto cartesiano, após uma longa e estéril discussão sobre relações binárias. As funções são apresentadas aqui do modo como ocorrem na Matemática, nas Ciências em geral e no dia-a-dia da vida real: mediante fórmulas, tabelas e gráficos.

Há alguns reparos a fazer neste capítulo.

Na página 56, falando sobre a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, está escrito o seguinte: "Como o quadrado de um número real é sempre um número real não-negativo, isto é, positivo ou nulo, então o conjunto imagem é $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\} \ldots$". Não é bem assim. A premissa mencionada permite apenas concluir que a imagem de f está contida no intervalo $[0, +\infty)$. O que assegura que a imagem de f é $[0, +\infty)$ é o fato de que todo número real ≥ 0 possui raiz quadrada real.

Aliás, em outras ocasiões posteriores, que assinalaremos no decorrer desta análise, o autor passa ligeiramente pela sobrejetividade de certas funções. Seria interessante salientar que se, por um lado, a injetividade de uma função é quase sempre fácil de verificar, a sobrejetividade é geralmente mais difícil, porque provar que um elemento $b \in B$ pertence à imagem da função $f\colon A \to B$ significa que a equação $f(x) = b$ possui pelo menos uma solução $x \in A$. E foi exatamente por isso que os números reais apareceram. Certas equações que não tinham raízes em $\mathbb{Q}$, ou seja, certas funções $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ou $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$, que não eram sobrejetivas passaram a sê-lo em $\mathbb{R}$.

É claro que não se espera que se prove num livro para o Ensino Médio que todo número real ≥ 0 possui raiz quadrada. Mas este fato deve ser mencionado como a razão pela qual $f(x) = x^2$ tem por imagem o intervalo $[0, +\infty)$.

Apesar da variedade de exemplos interessantes apresentados, faltou exibir algumas funções *matemáticas* que não são definidas por fórmulas.

Exemplo: $f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos polígonos do plano e, para cada $P \in \mathcal{P}$, $f(P) =$ área de P. Outros exemplos matemáticos importantes são as funções definidas geometricamente, como as rotações do plano, as reflexões relativas a retas do plano ou a planos do espaço, etc. São ocorrências belas e úteis da noção geral de função, que são fáceis de explicar, que podem ser empregadas mais tarde no estudo da Geometria e que mostram que nem toda função interessante na Matemática (mesmo Elementar) assume valores numéricos.

Na página 75, as definições de função par e função ímpar só fazem sentido se o domínio é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Na página 81 (definição de função injetiva), já observamos antes que o critério $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ deveria ser mencionado. Além disso, a palavra "componente" (linha -9) não faz sentido. Provavelmente foi um erro de digitação. O autor talvez quisesse dizer "correspondente", mas mesmo esta palavra, que é utilizada na linha seguinte, não é adequada. Em vez de "Não há elemento em B com mais de um correspondente em A", deveria ser: "Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A".

Ao tratar de número cardinal, como observamos antes, o autor deveria dizer que isto inclui o número de elementos de um conjunto finito. Aqui seria um bom lugar para dizer o que significam "finito" e "infinito", palavras que se usam tanto em Matemática, mesmo neste nível.

Ao ensinar como se faz para determinar a inversa de uma função dada, o autor sugere quatro passos, o segundo dos quais é permutar os símbolos x e y. Embora neste nível (inclusive nas provas de vestibular) não se costume ter $x = g(y)$, ou seja, não se chame de y a variável independente, este passo nos parece desnecessário e pode levar a erros. O próprio autor incorre no erro a que nos referimos quando, na página 90, diz que duas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ são inversas uma da outra se, e somente se, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Estas igualdades só fazem sentido quando $A = B$, pois $f(g(x))$ pertence a B e $g(f(x))$ pertence a A. No caso geral, dever-se-ia dizer: $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

O segundo gráfico da página 88 está errado. Nele aparece um segmento, que deveria ser substituído por uma curva em forma de pétala.

Na página 83 (3º exemplo) devia ser "função sucessor" em vez de "função sucessora".

Capítulo 4. Função Afim

O tratamento das funções afins, seguindo o padrão dos capítulos anteriores, é objetivo, bem motivado e com uma profusão de gráficos de boa qualidade. Sua leitura conduz às observações que se seguem.

Na definição da função linear $f(x) = ax$ (página 87), não há necessidade nem conveniência de supor $a \neq 0$. A função identicamente nula é linear.

A taxa de variação da função afim é definida como $[f(x+h) - f(x)]/h$ e o leitor é convidado (no quadro "para refletir") a provar que ela é igual a a se $f(x) = ax + b$. Dada a extraordinária importância do conceito, isto devia ser tarefa do autor, que diria então ser a característica principal das funções afins o fato de que essa taxa é constante. É extremamente relevante destacar que as funções afins são as únicas funções monótonas para as quais acréscimos iguais dados a x provocam acréscimos iguais em $f(x)$. Este fato deveria ser ilustrado graficamente. Uma conexão deveria também ser feita com o movimento retilíneo uniforme, com a definição de velocidade nesse movimento e com diversas outras situações modeladas pela função linear, nas quais o número a é o valor unitário (correspondente a $f(1)$ no modelo matemático).

As expressões "não-vertical", "não-paralela", etc. devem ser hifenadas.

O leitor do livro possui maturidade e conhecimentos de Geometria Plana que lhe permitem entender a prova (de resto bastante simples) de que o gráfico de toda função afim é uma linha reta. No livro, isto sequer é mencionado de modo geral, até chegar na página 105, onde se encontra a frase: "*Já vimos* que uma função afim $f(x) = ax + b$ tem como gráfico uma reta ..."

O autor, felizmente, não adere ao lamentável hábito de considerar uma reta como paralela a si mesma. Mas, na página 109, fala no coeficiente angular de uma função afim. Reta tem coeficiente angular; função afim tem taxa de variação. A inclinação da reta que lhe serve de gráfico depende da escolha das unidades nos eixos.

Outra terminologia que deve ser evitada é a de mencionar raízes de uma função. Função tem zeros; equação é que tem raízes.

No estudo das inequações do primeiro grau deveria ser esclarecido que resolvê-las requer o emprego adequado das propriedades monotônicas da adição e da multiplicação de números reais, as quais deveriam ser explicitamente enunciadas.

Na página 120 (exercício 67) há uma questão de vestibular que deveria ser omitida ou, pelo menos, comentada pelo autor. Um ser vivo não pode absorver nem eliminar uma substância com uma taxa constante, salvo em termos aproximados e num breve lapso de tempo.

O último tópico do Capítulo 4 é a relação entre função afim e proporcionalidade. O conceito de proporcionalidade é um dos mais antigos da Matemática. Ele tem origem milenar mas não incorreremos em erro se dissermos que ainda hoje ele é o mais importante de todos os que são estudados na Matemática Elementar. (Até mesmo em nível superior, se levarmos em conta a posição central da Álgebra Linear entre os instrumentos matemáticos, teóricos ou aplicados.) É bom dizer (como faz o autor) que a função linear $f(x) = ax$ é o modelo matemático para a proporcionalidade. Mas é bom também lembrar que, em muitas questões que envolvem proporcionalidade, o coeficiente a não é fornecido e/ou é irrelevante. Isto ocorre, por exemplo, no Teorema de Tales: uma paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais. Quem já se ocupou em determinar o fator de proporcionalidade? Ele, por acaso, é o quociente de dois senos, mas isto é inteiramente irrelevante.

Numa observação ao final do capítulo, é feita uma tímida menção ao verdadeiro sentido da proporcionalidade, a qual fica perdida pois não é seguida de comentários, explicações nem exemplos. É uma pena, pois serão várias as ocasiões, durante todo o Ensino Médio, em que esta noção necessitará ser usada adequadamente, a saber: sempre que ocorrer uma regra de três.

Capítulo 5. Função Quadrática

O tratamento dado às funções quadráticas é simples, objetivo, bem motivado e com boas ilustrações. Por outro lado, as aplicações, que poderiam ser numerosas e variadas, são muito poucas. Não nos referimos às pseudo-aplicações, nas quais é dada uma fórmula que não se sabe de onde veio e pede-se para trabalhar com ela. Queremos dizer verdadeiras aplicações, em que uma situação real pode ser modelada por uma função quadrática, cabendo ao aluno achar essa função e, em seguida usar os conhecimentos adquiridos no estudo do livro para resolver o problema proposto. Por incrível que pareça, há apenas um exercício proposto que é deste tipo (o último do capítulo). Será muito fácil preencher essa lacuna pois é possível formular dezenas de problemas atuais e atraentes, em cujos enunciados não aparece a função quadrática mas ela ocorre na solução.

Outra deficiência do capítulo situa-se na parte teórica. As definições são dadas corretamente mas há omissões diversas, como relações entre os coeficientes e as raízes, forma fatorada, completar o quadrado e a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$. Os dois primeiros destes tópicos presume-se que foram estudados nas séries anteriores (sabe-se lá como) mas não custa reapresentá-los neste novo contexto. O completamento do quadrado é uma ausência injustificável e a forma canônica, que se segue dele, é extremamente útil, inclusive para visualizar o gráfico de $f(x)$. A bem da verdade, a forma canônica aparece timidamente nos exercícios 51 e 52. Mas ali não é dito que toda função quadrática pode ser escrita desta forma.

No todo, o capítulo é apresentado de modo bastante intuitivo, o que em si não é mau, mas deveria, em prol do equilíbrio, ganhar um pouco mais de caráter matemático.

Seguem-se as observações pontuais.

O capítulo começa, apropriadamente, com um problema modelável por uma função quadrática e promete que, com o conteúdo que se segue, o leitor poderá resolvê-lo. Todo capítulo de todo livro de Matemática deveria começar assim. Mas há um reparo a fazer: a resposta do problema é um terreno quadrado, cercado por 200 metros de tela, contendo uma quadra de basquete. O quadrado não é a forma natural para conter a quadra. Um retângulo seria mais apropriado. Para obter um retângulo como resposta, o autor deveria informar-se da razão comprimento/largura de uma quadra de basquete e propor que o terreno tivesse as mesmas proporções. Dar um caráter de realismo aos problemas é importante para que a Matemática seja considerada como necessária para a vida moderna.

Na página 123, a fórmula para calcular o número de partidas de um campeonato merecia uma rápida justificativa, além da tabela: $n^2 - n$ é o número de pares ordenados (olhe o "mando de campo"!) menos os jogos de cada time consigo mesmo, que não existem.

Ainda na página 123, a frase "dada $f(x)$, calcular x" não é clara. E o exemplo que se segue não está bem redigido. Devia ser: sabendo que $f(x) = 1$, qual é o valor de x?

Na página 127: "O ponto V é chamado de *vértice* da parábola". (Mas que ponto V?) "A parábola apresenta sempre uma simetria ..." (Por quê?) "Quando $a > 0$, o vértice fica para baixo ..." (Por quê?). Estas coisas, e mais o estudo da abertura da parábola (bem-vindo) ficariam bem fáceis de justificar usando a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$. Lembrando que, nesta fórmula, tem-se $m = -b/2a$, a complicada obtenção da abscissa do vértice (página 131) e o estudo do valor mínimo (ou máximo) também se tornariam imediatos.

Como observamos ao comentar o Capítulo 3, a imagem da função quadrática é identificada sem maiores cuidados, a partir da figura. Seria interessante mostrar (ou propor como exercício) que a equação $ax^2 + bx + c = d$, com $a > 0$, tem sempre solução se $d > f(m)$, $m = -b/2a$. (Calcule Δ.)

O sinal da função quadrática, tão bem ilustrado por figuras, teria seu estudo facilitado pelo uso da forma fatorada e o resultado final deveria ser enunciado simplesmente com palavras, assim: "$f(x)$ tem sinal oposto ao de a quando x está entre as raízes, e tem o sinal de a quando x está fora do intervalo das raízes ou quando não há raízes."

Na página 150, onde se lê "velocidade = ..." deveria ler-se "velocidade média num intervalo de tempo = ..."

Finalmente, a leitura que encerra o capítulo não parece ter serventia alguma, nem dá para entender o que ela pretendia esclarecer.

Capítulo 6. Função modular

As funções que nossos textos chamam de modulares nada têm a ver com as verdadeiras funções modulares estudadas na Análise Complexa. Sua presença no currículo deve-se principalmente ao fato de que ocorrem em questões do exame vestibular. O tratamento que lhes é dado neste livro é moderado e claro. Como sempre, algumas observações merecem ser feitas.

Na página 157 o símbolo $\Rightarrow$ de implicação lógica é incorretamente utilizado como se significasse "então".

Na página 159, ao destacar algumas propriedades do módulo, as importantes relações $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $|x + y| \leq |x| + |y|$ não são mencionadas. Também $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ deveria ocorrer, pelo menos como exercício.

É sensato que o autor não demonstre que $|a - b|$ é a distância entre os pontos A e B cujas coordenadas são respectivamente a e b. Mas não é correto dizer, depois de examinar alguns exemplos: "Podemos então escrever ..."

Depois de estudar alguns gráficos, o livro apresenta alguns exercícios resolvidos sobre equações modulares. Todas as equações apresentadas teriam suas soluções obtidas imediatamente se fossem traçados os gráficos respectivos. Por que não fazê-lo? Tudo bem que se façam as soluções analíticas. Mas é instrutivo ter a outra abordagem, que neste caso é muito mais transparente.

Observação semelhante pode ser feita em relação ao exercício resolvido número 4 (página 162). Seria muito esclarecedor explicar que o gráfico da função pode ser obtido imediatamente a partir do gráfico de $f(x) = |x|$ após uma translação de 2 unidades para a direita seguida de uma translação de 1 unidade para baixo.

De um modo geral, o livro inteiro (volumes 1, 2 e 3) se beneficiaria de uma observação geral a respeito do gráfico de $f(x - a) + b$, comparado com o gráfico de $f(x)$.

Capítulo 7. Potenciação

Este capítulo tem um caráter inteiramente manipulativo, não contendo aplicações nem considerações teóricas. Nas manipulações não se vê nenhum conselho aos iniciantes nem sugestões que visem tornar os cálculos mais expeditos, nem como evitar erros.

Ao contrário dos outros, este capítulo não possui figuras. Bem que poderiam ser apresentados os gráficos de algumas funções do tipo $f(x) = x^n$ exibindo suas propriedades de monotonicidade, seus comportamentos para $|x| < 1$ e $|x| > 1$, bem como a comparação entre elas para diferentes valores de n.

Na convenção $a^0 = 1$ (página 176) a implicação $a^0 \cdot a^1 = a^1 \Rightarrow a^0 = 1$ necessita a hipótese $a \neq 0$, que não foi feita.

Na justificativa (página 177) da convenção $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, deveria ser dito explicitamente que se deseja preservar a igualdade $(a^r)^n = a^{r \cdot n}$ quando r é racional.

É correto definir potências de expoente irracional por meio de valores aproximados. Mas, para que o aluno não se sinta perdido em abstrações, o livro poderia perfeitamente exibir algumas dessas aproximações, como

$$2^{1{,}4} = 2{,}639015; \quad 2^{1{,}41} = 1{,}657371; \quad 2^{1{,}414} = 2{,}664749$$

e o valor final $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665144\ldots$

Neste ponto, a calculadora se impõe. O livro deveria estimular seu uso sempre que for conveniente.

Na página 180, ao mencionar a notação científica, deveria ser dito que sua principal utilidade é a de fornecer, num relance, a idéia da ordem de grandeza de um número que, se fosse escrito por extenso, não daria essa informação de modo tão imediato.

Não conseguimos entender a finalidade dos itens 10 e 11 (págs. 182 e 183).

Capítulo 8. Função exponencial

O capítulo começa com um exemplo concreto, referente ao lançamento de uma moeda ou, mais geralmente, de n moedas distintas, tendo-se, é claro, 2^n resultados possíveis quanto a caras e coroas. O autor poderia muito bem ter usado este exemplo para provar que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Mas como exemplo de função exponencial não é o melhor. No máximo, poderia ser usado para ilustrar o conceito de progressão geométrica. Uma motivação bem mais adequada para a função exponencial seria uma cultura de bactérias que dobra a população em cada hora. Em realidade, como será observado mais adiante neste capítulo, nas aplicações a função exponencial pura $f(x) = a^x$ raramente ocorre. Do mesmo modo como uma progressão geométrica nem sempre tem primeiro termo igual a 1, também na maioria das aplicações as funções são do *tipo exponencial*, $f(x) = b \cdot a^x$. No exemplo das bactérias, o modelo matemático é $f(x) = b \cdot 2^x$, onde b é a população de bactérias existente no início da experiência e x é o tempo decorrido. Na prática, as bactérias podem desenvolver-se sobre uma camada de alimentos e sua população é medida pela área que ocupa. Insistimos neste ponto porque consideramos da maior importância que o ensino da Matemática apresente um equilíbrio entre a conceituação teórica, as manipulações práticas e as aplicações realísticas.

A característica fundamental da função exponencial (e, mais geralmente, do tipo exponencial) pode e deve ser constatada nos gráficos: se calcularmos a população das nossas bactérias nos instantes x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $\ldots$, isto é, em intervalos de igual duração h, veremos que cada população é igual à do instante anterior multiplicada pela mesma constante k: $f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot k$, $f(x_0 + 2h) = f(x_0 + h) \cdot k$, etc.

Isto fica muito claro quando se tem um capital empregado a juros fixos, capitalizados continuamente.

Esta propriedade é característica das funções do tipo exponencial. É importante destacar isto porque o estudante que se depara com problemas que usam essas funções vê sempre que elas acompanham os dados da questão, mas nunca sabe de onde vêm nem por que são usadas. Tal é o caso deste capítulo. O exercício 37 é o único, dentre os 52 nele contidos, em que a função exponencial não aparece no enunciado.

Na página 189 afirma-se que a função exponencial é injetora e sobrejetora mas nenhuma razão é apresentada para isto. A injetividade decorre da monotonicidade mas a sobrejetividade merecia uma palavra explicativa. Mesmo porque ela é essencial para que se possa falar em logaritmo.

O autor apropriadamente avisa ao leitor que a injetividade e a monotonicidade da função exponencial são os fundamentos necessários para resolver equações e inequações exponenciais.

Na página 197 é feita a observação, acompanhada de figura, segundo a qual os gráficos de a^x e a^{-x} são simétricos em relação ao eixo y. Devia ser dito que isto nada tem a ver com funções exponenciais. Seja qual for a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, os gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$ gozam dessa simetria. Além disso, a definição dada deixa a impressão de que $f(-x)$ é sempre a função recíproca de $f(x)$.

O número e merecia um pouco mais de destaque. Em particular, a consideração da seqüência $(1 + 1/n)^n$ precisava ser explicada. Por que ela? O autor poderia informar ao leitor que esta seqüência converge muito lentamente para e e, com auxílio de uma calculadora, ver quão grande deve ser n para que se tenham 5 algarismos decimais exatos.

A leitura da página 202, sobre a "definição recursiva da função exponencial" é, no mínimo, curiosa. Termina dizendo que $f(n) = 2^n$ (n natural) é conhecida como "função exponencial de base 2." Achamos que isto é uma progressão geométrica de razão 2.

Exibir, por meio de um gráfico, as raízes da equação $2^x = x^2$, foi uma boa idéia.

Capítulo 9. Logaritmos

Talvez porque tenha apresentado potenciação e função exponencial em capítulos separados, o livro traz um capítulo intitulado "Logaritmos" antes de "Função logarítmica." A separação não faz muito sentido. O Capítulo 7 é que devia ter sido chamado Função Potência (e ter incluído gráficos).

O problema que serve de introdução ao capítulo foi bem escolhido. Nele encontramos a seguinte afirmação:

"Não é possível resolver esta equação transformando-a em uma igualdade entre potências da mesma base, como vimos no capítulo anterior. Para resolvê-la, precisamos utilizar logaritmos".

Ora, usar logaritmos é exatamente transformar a equação em uma igualdade entre potências da mesma base. O que deveria ter sido dito era: "A fim de transformar uma equação exponencial numa igualdade entre potências da mesma base, usaremos a noção de logaritmo." A definição de logaritmo inclui a inútil terminologia de "logaritmando" e "antilogaritmo". Ela é apresentada de modo formal, quando bastava dizer que se $b = a^x$ então o expoente x chama-se o logaritmo de b na base a.

A fim de assegurar que todo número positivo possui logaritmo na base a (a positivo $\neq 1$) devia ser lembrado que a função a^x é sobrejetiva.

Na definição dada, inicialmente b é a base mas a partir daí a base é sempre indicada por a.

De modo geral, as ilustrações do livro são boas mas há um erro que se repete inúmeras vezes: parábolas são desenhadas como se fossem semi-círculos. (V. págs. 206 e 207, por exemplo.)

Nas propriedades dos logaritmos, nunca é dito explicitamente que $\log(1/N) = -\log N$.

O uso de calculadoras é finalmente encorajado. O livro não incide no anacronismo dos seus congêneres que ainda desperdiçam longas páginas inutilmente com o uso das tabelas. Só uma observação: em algumas calculadoras, para obter $\log N$ digita-se primeiro log e depois N.

A importante noção de meia-vida de uma substância é apresentada meio escondida, num exercício proposto, quando deveria ter figurado com desaque, já no capítulo anterior.

Os exercícios 79, 80 e 81 são interessantes pois não trazem fórmulas nos enunciados. Mas eles não estão formulados realisticamente. Na prática, o índice mais fácil de constatar é a meia-vida (ou o tempo de duplicação). Deveriam ser propostos problemas em que se dá a meia-vida e se pede a quantidade da substância existente em diferentes tempos.

Uma observação: o que se chama aqui "taxa de crescimento" não é o mesmo conceito definido nos Capítulos 4 e 5. Esta nova taxa deveria ser chamada de "taxa de crescimento relativo" pois é igual a $f(x+h)/f(x)$. É precisamente o fato de que ela é independente de x que caracteriza as funções do tipo exponencial.

No final do capítulo uma leitura (desta vez com a fonte identificada) menciona a lei de Weber-Fechner, segundo a qual "A sensação varia com o logaritmo da excitação." Na verdade, esta lei não é uma modelagem matemática exata. Ela é análoga ao princípio dos retornos decrescentes em Economia. Significa que quando se aumentam muito as excitações, as sensações, já um tanto saturadas, aumentam proporcionalmente menos e menos. Isto se traduz pela concavidade da função logarítmica. No capítulo seguinte, ao mostrar o gráfico dessa função, este fato deveria ser salientado: uma secante deslizando para a direita sobre o gráfico de $\log x$ vai ficando cada vez mais próxima da horizontal.

Capítulo 10. Função logarítmica

A exposição sobre função logarítmica que este capítulo traz é inteiramente manipulativa. Não há aplicações por meio de problemas em cujo enunciado não apareça a palavra “logaritmo”. Aliás, pura e simplesmente não há problemas, salvo os de manipulação e adestramento. Tampouco ocorrem esclarecimentos e observações de natureza conceitual. Nunca é dito explicitamente, por exemplo, que dados a e b (positivos, $\neq 1$) os gráficos de $\log_a x$ e $\log_b x$ se obtêm um do outro multiplicando todas as ordenadas por uma constante. Em todo o livro não há um comentário sobre como a função exponencial cresce rapidamente (lembram-se dos tempos da inflação galopante?) nem como o logaritmo cresce lentamente.

Alguns gráficos de $\log x$ estão mal feitos, dando a impressão de que a curva tem uma assíntota horizontal (v. págs. 227 e 238).

A função logarítmica é corretamente definida como a inversa da função exponencial. Faltou destacar as igualdades $a^{\log_a x} = x$ para todo $x > 0$ e $\log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, salientando que elas resultam da definição de função inversa.

A segunda figura da página 228 está errada. Foram trocados os gráficos de $\log_a x$ e a^x.

Na página 241, a seção “Vendo o logaritmo como área” é interessante mas requer um pouco de explicação (ou referência). Assim como está, parece caída do céu.

Capítulo 11. Progressões

Este longo capítulo (quase 50 páginas) trata conjuntamente das progressões aritméticas e geométricas. Ele começa com a noção geral de seqüência, que não é definida explicitamente mas é dado a entender de que se trata de um conjunto ordenado, embora o quadrinho “para refletir” diga que não é bem assim (página 243). Ficou faltando a simples, direta e clara definição: uma seqüência é uma função que tem por domínio o conjunto dos números naturais (seqüência infinita) ou o conjunto dos números naturais $\leq n$ (seqüência finita, com n elementos). Não dá para entender a relutância dos autores em apresentar seqüências como funções pois estão sempre usando fórmulas para exprimir o n-ésimo termo como função de n.

Não é feita a representação geométrica dos termos de uma progressão aritmética como pontos igualmente espaçados sobre uma reta, nem também é exibido o gráfico de uma seqüência no plano cartesiano. Este último deixaria claro que uma progressão aritmética é simplesmente a restrição de uma função afim ao conjunto $\mathbb{N}$ ou ao conjunto dos números naturais $\leq n$ para um certo n. Esta conexão entre progressão aritmética e função afim é útil e deveria ser feita. Em primeiro lugar, por uma questão geral de princípio. Assuntos aparentemente diversos porém relacionados devem sempre ter sua conexão ressaltada. Em segundo lugar porque, feita a ilação, pode-se usar propriedades de um conceito para obter propriedades do outro. Por exemplo: dois pontos do plano determinam uma reta; uma função afim fica determinada por dois de seus valores e dois termos de uma progressão aritmética a determinam inteiramente. A função afim que tem os dois valores dados está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e fornece portanto todos os termos da interpolação aritmética vista na página 255.

Na fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética faltou explicitar S_n como função de n, deixando claro que se trata de uma função quadrática.

Precedendo a definição de progressão geométrica, o livro usa novamente a expressão "taxa de crescimento" com significado diferente daquele introduzido na página 98. Como já mencionamos antes, o termo adequado para este contexto seria "taxa de crescimento relativo" ou "taxa de variação relativa".

Não-nulo é hifenado.

O livro acertadamente observa que muitas vezes é conveniente começar uma progressão geométrica (poderia incluir progressão aritmética) com a_0 em vez de a_1. Por outro lado, apesar de escrever o termo geral como $a_n = a_0 \cdot q^n$, não aproveita a ocasião para fazer a conexão com a função exponencial. Uma progressão geométrica é simplesmente a restrição aos números naturais de uma função do tipo exponencial $f(x) = a_0 \cdot q^x$. Isto deixa óbvio como interpolar meios geométricos, por exemplo. E deixa claro por que os problemas de matemática financeira (e muitos outros análogos) podem ser estudados via progressão geométrica ou via exponenciais.

O tratamento do que o autor chama "soma dos termos de uma progressão geométrica infinita" deixa a desejar. Em primeiro lugar, na página 277, tendo observado que na progressão geométrica de termo geral $1/2^n$ tem-se S_{n+1} mais próximo de 2 do que S_n, ele concluir que S_n converge para 2. Ora, com o mesmo argumento concluiríamos que S_n converge para 3 (ou 4, ou qualquer número maior do que 2).

Em segundo lugar, afirma que se $|q| < 1$ então q^n tende a zero quando $n \to \infty$ mas não dá uma só palavra para justificar essa afirmação. Em seguida, para calcular a "soma" dos termos da progressão geométrica acima citada escreve uma igualdade absurda. Finalmente, põe $S = a_1/(1-q)$ como definição.

A geratriz de uma dízima periódica (simples ou composta) é apropriadamente identificada como soma dos termos de uma progressão geométrica.

Alguns exercícios, como 165, 168 e 169 são artificiais e sem muito sentido. O mesmo se pode dizer sobre alguns exemplos, como o da página 260. Não é realístico que uma fábrica aumente sua produção em 20% durante 5 anos seguidos.

Seria mais natural uma questão análoga com os rendimentos mensais de um capital investido.

Na leitura da página 286 não havia necessidade de chutar o resultado. A fórmula da soma dos n primeiros números naturais ímpares já estava disponível. O que se tem aí é uma interpretação geométrica da mesma.

Na página 289, o item "Curiosidade" deveria concluir com uma observação sobre se a superfície terrestre seria suficientemente grande para conter uma plantação de trigo com aquele número de grãos.

Capítulo 12. Matemática Financeira

Este breve capítulo recorda algumas noções básicas sobre proporções, introduz os conceitos de juros simples ou compostos e apresenta alguns exemplos e problemas singelos porém bem escolhidos. Este assunto costuma suscitar o interesse dos alunos. Pena que tenha sido colocado no final do livro, o que pode ter como resultado sua omissão em vários cursos. Pena também que o tema não se tenha estendido um pouco mais.

Gostaríamos de comentar o problema que abre o capítulo. Ele é bastante simples porém bem realístico e apresenta uma característica muito positiva. Nele se pede que o leitor decida entre duas opções. É muito positivo que o estudante aprenda a usar os conceitos matemáticos para julgar objetivamente as opções que lhe são oferecidas. Em muitas ocasiões nos capítulos anteriores houve lugares em que problemas deste tipo poderiam ser propostos. Infelizmente isso não foi feito.

Considerações finais sobre o Volume 1

O autor procura ser fiel ao subtítulo do livro (contexto e aplicações). Precede os capítulos com problemas que necessitam do conteúdo do mesmo para serem resolvidos e procura aplicar os resultados a situações concretas, embora deixe a impressão de que precisaria pesquisar mais para diversificar e melhorar seus problemas. Muitos dos defeitos e cacoetes que proliferam em livros congêneres foram evitados neste. A parte de manipulações é boa. A conceituação deixa um pouco a desejar no que diz respeito ao emprego (moderado) do método dedutivo, que está muito ausente.

Dante

Matemática, Contexto e Aplicações – volume 2

Capítulo 1. A Trigonometria no triângulo retângulo

Os sete primeiros capítulos do livro, num total de 159 páginas, são dedicados ao estudo da Trigonometria. Essa prolixidade, tão comum aos autores brasileiros, é conseqüência de ênfases mal colocadas e é a causa principal da desnecessária dificuldade que muitos alunos (e mesmo professores) sentem em relação ao assunto.

Este capítulo inicial, que trata das funções trigonométricas dos ângulos agudos, tem o grande mérito de apresentar um número substancial de problemas atraentes, o que sem dúvida contribui para despertar a atenção dos alunos pela matéria.

Cabem, entretanto, algumas observações.

Em primeiro lugar, não parece haver ganho algum em estudar seno, cosseno e tangente apenas nos triângulos retângulos. O capítulo inicial seria ainda bastante simples se tratasse de triângulos quaisquer, mas ganharia interesse porque permitiria expor as leis dos senos e dos cossenos, as quais, por sua vez, conduziriam à resolução de triângulos. Tudo isso sem sair do contexto de funções trigonométricas de ângulos.

Expliquemos.

Uma coisa que o livro não deixa claro (e seus congêneres nacionais tampouco) é que, quando se estuda a trigonometria do triângulo, as funções seno e cosseno têm como domínio o conjunto A de todos os ângulos do plano, menores do que ou iguais a dois ângulos retos. Essas funções $\operatorname{sen}\colon A \to \mathbb{R}$ e $\cos\colon A \to \mathbb{R}$ são independentes da forma como se medem os ângulos. Logo dispensam a consideração de arcos de círculo, radianos, etc., temas que requerem alguns cuidados, como veremos ao analisar os capítulos seguintes, onde $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são consideradas como funções reais de uma variável real.

O livro não dá o devido destaque ao papel da semelhança de triângulos como base da Trigonometria. Em particular, não esclarece o significado das tabelas trigonométricas.

Dentro do princípio de que sempre é aconselhável fazer conexões com temas já estudados antes, deveria ser lembrado que a igualdade $\operatorname{sen} 30° = 1/2$ equivale ao seguinte teorema: num triângulo retângulo, quando um ângulo agudo é o dobro do outro, a hipotenusa é o dobro do menor cateto.

Capítulo 2. O ciclo trigonométrico

Este capítulo tem por finalidade definir o radiano e introduzir a noção de arcos que medem um número real qualquer de graus ou radianos. O autor não é bem sucedido em seu objetivo, deixando vários pontos obscuros.

Logo de início, um arco é definido como “uma parte da circunferência determinada por dois de seus pontos”. Além de ser uma frase vaga, pois não diz de que modo tal parte é determinada, esta tentativa de definição impede que haja arcos de mais de $360°$, como ocorrerão logo a seguir.

Um arco de 1 radiano é definido como aquele que tem comprimento igual ao raio da circunferência, mas não é dita uma palavra sequer sobre o significado do comprimento de um arco.

Pior do que isso: a importante propriedade de que dois arcos com a mesma medida em radianos (ainda que contidos em circunferências diferentes) subtendem ângulos centrais congruentes nunca é mencionada, embora seja usada a todo momento, explicita ou implicitamente como por exemplo, ao transformar radianos em graus e vice-versa. Logo a seguir (página 35) lê-se: “o ângulo central α da figura mede 2 rad”.

Esta propriedade resulta da semelhança entre as circunferências, mas a semelhança entre figuras planas é quase sempre passada ao largo, embora seja um conceito essencial em toda essa ordem de idéias.

De repente, na página 38, sem nenhum aviso prévio, ocorre a frase: “Na segunda figura, o ponto deslocou-se uma volta inteira e mais $\pi/3$”. Até este momento, nada havia sido dito sobre ponto algum se deslocando.

A maneira correta de se tratar este assunto é introduzir a função $E\colon \mathbb{R} \to C$ (função de Euler), com valores na circunferência unitária $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$. Intuitivamente, E pode ser visualizada imaginando-se C como um carretel onde se enrola a reta $\mathbb{R}$. Se $E(t) = (x, y)$ então $x = \cos t,\ \ u = \operatorname{sen} t$ e t é uma das possíveis determinações em radianos do arco que liga o ponto (1,0) ao ponto (x, y). Isto está explicado convenientemente em “A Matemática do Ensino Médio”, vol. 1, livro citado na bibliografia.

“Ciclo trigonométrico” é mais uma terminologia exclusiva dos autores brasileiros de livros para o Ensino Médio.

Capítulo 3. Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

Neste capítulo, são utlizadas 22 páginas e 77 figuras para dizer o que significam $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$, onde x é um número real, e observar algumas relações de simetria, tipo $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$. O pior é que ora x é a medida de um arco em graus, ora em radianos. É claro que esta indefinição afeta a determinação das funções $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas o livro não leva isto em conta. E a extensão do capítulo explica por que o tratamento da Trigonometria é tão longo.

Os exercícios são burocráticos. Não há questões provocativas, como: quanto vale $\operatorname{sen} 2$? Qual é o sinal de $\operatorname{sen}\sqrt{10}$? Qual é o maior, $\cos 8^\circ$ ou $\operatorname{sen} 80^\circ$?

Na página 50, logo após "Valores de $\operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$", tem-se o cálculo de $\operatorname{sen} 390^\circ$. Ora, 390° não é um número real.

A definição de $\operatorname{tg} x$ é dada geometricamente. A relação $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$ foi estabelecida, nas primeiras páginas, para ângulos agudos. Na página 62, anuncia-se que esta igualdade será estendida para x qualquer. A prova, porém, se baseia numa figura em que x é um ângulo agudo.

Capítulo 4. As funções circulares

Mau título. São funções trigonométricas.

Neste capítulo, seno e cosseno serão definidos como funções reais de uma variável real. As primeiras palavras são a definição de $\operatorname{sen} x$. Ou melhor, deveriam ser. Na verdade, não há definição alguma. Em primeiro lugar, não é correto definir um conceito matemático com referência a uma figura (embora o livro faça isso mais de uma vez). Mesmo assim, a definição é de $\operatorname{sen} x$ mas não há x algum na figura. Ainda que o leitor descobrisse que x é a medida do arco AP, não está especificada a unidade: graus ou radianos. Em todo o livro esta indefinição persiste. Temos duas funções: $\operatorname{sen}_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para todo número real x, $\operatorname{sen}_1 x$ é o seno do arco que mede x radianos e $\operatorname{sen}_2 x$ é o seno do arco que mede x graus. São duas funções diferentes mas são tratadas no livro como se fossem a mesma. (Quando chegar a hora de calcular derivadas, uma delas terá de ser escolhida.)

A definição da função cosseno sofre dos mesmos defeitos. A cossenóide é apresentada mas o leitor não é advertido de que não é realmente uma nova curva. É apenas a senóide transladada de $\pi/2$ para a direita. Novamente aqui faz falta a observação, que deveria ter sido feita no vol. 1, sobre o gráfico de $f(x - a)$.

A função tangente também é mal definida. Não é feita nenhuma observação sobre o crescimento de $\operatorname{tg} x$ para valores de x próximos de $\pi/2$. Embora os gráficos o sugiram, não é mencionada a noção de assíntota, apesar das verticais tracejadas.

As funções $\sec x$ e $\operatorname{cossec} x$ (que não servem para nada neste nível) têm seus gráficos apresentados sem nenhuma explicação. Perdeu-se assim a única ocasião em que essas funções teriam alguma serventia. Inclusive para mencionar que as verticais que aparecem pontilhadas no gráfico chamam-se assíntotas.

O segundo gráfico na página 82 está mal feito. Exemplos como o nº 6 deveriam ser mais explorados, inclusive sob o ponto de vista de translação, dilatação e compressão dos gráficos, principalmente os de combinações de funções como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Os exercícios 7 e 8 na página 83 estão mal resolvidos. Se $f(x)$ tem período p então $f(x+a)$ também tem período p e $f(bx)$ tem período p/b. Esta observação resolve tudo.

Apesar de tantas ilustrações, elas faltaram na hora necessária. Para explicar $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$ e $\operatorname{arc\,tg} x$ seria esclarecedor e imprescindível mostrar os gráficos de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ nos intervalos adequados. Aqui, o conceito de restrição de uma função (tão simples e nunca usado) viria a calhar: $\operatorname{sen} x$ não é bijetiva mas sua restrição ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ é. A função $\operatorname{arc\,sen} x$ é a inversa dessa restrição. As definições da página 86 deviam ser completamente reescritas. Estão muito confusas. O último desenho daquela página é bom mas não foi convenientemente explicado nem explorado.

A leitura, no final do capítulo, é tão confusa quanto o texto que a precede, com o agravante de que não cai no vestibular. Pode ser dispensada.

Capítulo 5. Relações trigonométricas

Este capítulo, de natureza inteiramente manipulativa, é típico da Matemática que se ensinava nas escolas brasileiras há 60 anos ou mais. Só que mais comprido e menos organizado. Neste ponto talvez caiba uma observação que certamente repetiremos no final da análise do livro: dá impressão de que este segundo volume não foi escrito pelo mesmo autor do primeiro. Onde estão as contextualizações, as aplicações, a concisão e a objetividade? É quase certo que a estruturação e o conteúdo deste livro são em grande parte determinados pelo exame vestibular. A profusão de problemas precedidos de siglas o comprovam. E a qualidade daqueles problemas é consonante com a exposição contida aqui.

Deveria porém ser observado que não é necessário descer àquele nível para habilitar o aluno a resolver tais tipos de problemas. Pelo contrário, uma apresentação concisa, inteligente, escrita com espírito crítico e contendo recomendações esclarecedoras traria melhores resultados.

Aceitando o capítulo como está, seguem-se algumas observações pontuais.

A definição de funções idênticas na página 95, é inadequada. Em Matemática, “idêntica” é uma maneira enfática de dizer “igual”. Duas funções iguais devem ter o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e os mesmos valores. A definição dada significa que as restrições de f e g a $D_1 \cap D_2$ são iguais.

O capítulo não contém problemas em cuja solução seja usada uma equação trigonométrica.

Nenhuma das equações propostas requer uma discussão como, por exemplo, $\operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

Não explora gráficos. A simples equação $\operatorname{sen} x = \cos x$ seria uma bela oportunidade para isso.

Em suma: mesmo admitindo um tratamento manipulativo (e principalmente por isso), é preciso dar ao leitor oportunidade de usar sua imaginação, provocando alternativas, discussões, propondo problemas com múltiplas respostas, chamando a atenção para erros comuns que podem ser evitados, etc.

Nada disso foi feito.

Capítulo 6. Transformações trigonométricas

Este capítulo tem como tema principal as fórmulas de adição $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$, que são obtidas corretamente.

Os exercícios são todos de aplicação direta das fórmulas. Nenhum deles contém aplicações das mesmas a problemas fora da Trigonometria.

Uma seção, intitulada “Fórmulas de Fatoração”, paga tributo a uma tradição, há muito ultrapassada, de transformar somas como $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ em produtos, a fim de torná-las calculáveis por logaritmos. Este objetivo já não faz sentido hoje em dia mas as fórmulas ainda têm interesse, desde que sejam lidas da direita para a esquerda. Noutras palavras, o importante é o contrário: transformar $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$ numa soma, a fim de integrar. Esta (é claro) não é a atitude do livro.

Outro aspecto interessante das fórmulas de adição é seu uso para representar $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ como funções racionais de $\operatorname{tg}(x/2)$. Isto é feito, sem maiores comentários, num exemplo. Seria educativo mostrar como essas simples expressões servem para dar uma parametrização racional da circunferência unitária.

É incrível como são ausentes neste livro acenos a coisas belas da Matemática, sem falar nos desafios à inteligência e à criatividade. O estudante tem mesmo razão de achar esse estudo sem graça e cansativo.

Capítulo 7. Resolução de triângulos quaisquer

Como já observamos antes, o material deste capítulo usa apenas seno, cosseno e tangente de ângulos (não de números reais) e não depende de desenvolvimentos posteriores, logo deveria fazer parte do Capítulo 1 do livro. Outra observação de caráter metodológico é a seguinte: ficou faltando uma discussão do problema geral de resolução de triângulos: dados 3 elementos de um triângulo, sendo pelo menos um deles um lado, calcular os outros 3 elementos. Casos particulares são considerados mas o tratamento genérico não é feito, em que pesem as 159 páginas de Trigonometria.

O capítulo abre com um problema que pretende ser real (o que é um progresso, comparando com os anteriores). Mas, numa situação real, os dados que são fornecidos no problema dificilmente ocorreriam. Além disso, para ser mesmo real, o enunciado do problema deveria dizer como foram obtidas as medidas ali mencionadas. O livro daria um belo exemplo de como valorizar o conhecimento matemático se tomasse um acidente geográfico conhecido, efetuasse *de fato* as medidas e calculasse alguma distância com ajuda da Trigonometria.

No exemplo da página 149, que precede a lei dos cossenos, a pretensa situação real é, na verdade, bastante artificial. Se as tripulações de dois navios conseguem calcular (com auxílio de satélites, presumivelmente) suas distâncias a um farol, poderiam do mesmo modo determinar a distância de um navio ao outro.

Nas deduções das leis dos senos e dos cossenos, o caso do triângulo retângulo deve ser mencionado ligeiramente, mas não com o mesmo detalhe do caso geral, supervalorizando uma trivialidade.

E acaba a longa apresentação da Trigonometria sem que seja mencionada a mais simples e mais freqüente de suas aplicações: se o segmento AB forma um ângulo α com um eixo, sua projeção ortogonal sobre aquele eixo tem comprimento igual a $\overline{AB} \cdot \cos \alpha$. Analogamente, a área da projeção ortogonal de um polígono P sobre um plano Π é igual a área de $P \times \cos \alpha$, onde α é o ângulo do plano de P com o plano Π.

Capítulo 8. Estudo das matrizes

Embora as matrizes possuam inúmeras aplicações em Matemática, sua presença no Ensino Médio deve-se apenas à sua utilização no estudo dos sistemas lineares. Este capítulo e o seguinte constituem, de fato, uma preparação para o Capítulo 10. Os três juntos são uma espécie de introdução à Álgebra Linear.

Infelizmente, não apenas neste livro mas em todos os seus congêneres nacionais, essa introdução é muito mal concebida e igualmente executada. Apresentadas inteiramente fora de contexto, as matrizes surgem como um objeto sujeito a manipulações banais, inconseqüentes e não justificadas. Em seguida, vêm os determinantes, com a desculpa de que serão utilizados para resolver sistemas lineares, via a Regra de Cramer. Ora, não se conhece método mais ineficiente para isso do que aquela regra. E finalmente são estudados os sistemas lineares. Depois de 67 páginas de preparação, é forçoso utilizar a parafernália introdutória para resolvê-los. Então a sensatez e a objetividade desaparecem. Questões óbvias são respondidas com o uso de máquinas pesadas, uso esse às vezes errôneo. A grande variedade de problemas interessantes que conduzem a sistemas lineares é inteiramente ignorada. Não há aplicações.

A ordem em que esses três temas (matrizes, determinantes e sistemas) são apresentados deveria ser invertida, a bem da boa didática. As ênfases também estão muito mal colocadas. A própria presença dos determinantes (que são um importante conceito matemático) é discutível, dado o inadequado emprego que deles é feito.

Por outro lado, nesta ordem de idéias, há ausências indesculpáveis. Para abordar de modo simples, elementar e eficiente os problemas sobre sistemas lineares, a noção mais importante é a de combinação linear. Um sistema $m \times n$ tem solução se, e somente se, a coluna do segundo membro é combinação linear das n colunas dos coeficientes. Um sistema $n \times n$ tem solução única se, e somente se, nenhuma coluna (ou linha) de sua matriz é combinação linear das demais. Um determinante é zero se, e somente se, alguma de suas linhas ou colunas é combinação linear das outras. Etc., etc. Pois este conceito crucial, indispensável e extremamente simples (muito mais simples do que a noção de determinante) nunca é mencionado. Em nenhum livro didático atualmente em uso nas escolas brasileiras!

Outra ausência lamentável é a dos vetores, um importante conceito matemático que os alunos usam diariamente nas aulas de Física mas que foi banido dos nossos textos de Matemática. Isto sem falar nas coordenadas no espaço tridimensional, que permitem interpretar um sistema 3×3 como a busca do ponto de interseção de três planos e enxergar num determinante 3×3 o volume de um paralelepípedo. (Vide "A Matemática do Ensino Médio", vol. 3.)

As observações acima se aplicam a todos os livros didáticos para a Matemática do Ensino Médio em uso hoje no Brasil. Todos seguem o mesmo padrão, preocupados principalmente em adestrar seus leitores para o exame vestibular. Por sua vez, este exame acompanha o conteúdo dos livros didáticos, num círculo vicioso difícil de quebrar, mas que precisa ser quebrado.

Passemos a analisar o Capítulo 8.

Ele contém uma longa série de definições a respeito de matrizes. Os exemplos são artificiais. Os exercícios idem. Alguns deles são tão tolos que parecem perguntas feitas a crianças do pré-primário.

O produto de matrizes é motivado por um exemplo sobre a copa do mundo. Mas a definição geral é mal apresentada. Deveria ser precedida do caso $(1 \times n) \cdot (n \times 1)$ pois o ij-ésimo termo da matriz produto AB é o produto da i-ésima linha de A (pensada como matriz $1 \times n$) pela j-ésima coluna de B (pensada como matriz $n \times 1$).

As propriedades das operações são listadas sem comentários. Deveria ser observado que a associatividade é mais complicada de provar do que as outras. E deveria também ser explicado que $A + B = B + A$ porque $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, etc.

Como vários outros, o autor deste livro usa a palavra "inversível" em vez do termo correto, que é "invertível".

É calculada a inversa de uma matriz 2×2. O exemplo é bom. Mas deveria ser observado que, usando o mesmo método, para calcular a inversa de uma matriz $n \times n$ tem-se de se resolver n sistemas lineares $n \times n$. Convenhamos que não é um método muito prático. Aliás, a inversa de uma matriz é uma noção de grande importância teórica mas é inútil como auxiliar para a resolução efetiva de um sistema linear.

Capítulo 9. Estudo dos determinantes

Na abertura do capítulo, o estudo dos determinantes é justificado pelo fato de que eles são utilizados para resolver sistemas lineares.

Há muitos séculos, é claro, não havia recursos computacionais além dos ábacos (e estes mesmos eram usados apenas no Oriente). Naqueles tempos, um sistema linear com um número elevado de incógnitas era, portanto, um objeto de puro interesse teórico. Ninguém pensava em resolvê-lo efetivamente. (Ao contrário de hoje, quando problemas tecnológicos de diversas naturezas requerem resolver sistemas com milhares e milhares de incógnitas). Por isso os determinantes, ao permitirem a obtenção de fórmulas contendo soluções explícitas para os sistemas determinados, despertaram interesse e sua teoria teve grande desenvolvimento. Mas, quando se necessita resolver numericamente um sistema linear com um número elevado de incógnitas, (mesmo determinado) a Regra de Cramer é um desastre.

Aos autores de livros didáticos que afirmam serem os determinantes utilizados para resolver sistemas lineares, pediríamos que resolvessem um sistema 5×5 pela Regra de Cramer e depois por escalonamento.

E que lessem a Revista do Professor de Matemática, número 23 (segundo semestre de 1993), página 16. Lá está escrito o seguinte: um computador que execute 1 milhão de multiplicações ou divisões por segundo levaria 2 milhões, 754 mil e 140 anos para resolver um sistema 20×20 usando a Regra de Cramer (e calculando os determinantes via Laplace). O mesmo computador, pelo método do escalonamento, levaria 6 milésimos de segundo para resolver o mesmo sistema!

Determinantes são um importante conceito matemático, não por terem relevância computacional mas por outros motivos. Do ponto de vista algébrico eles constituem a única função multilinear alternada das colunas de uma matriz $n \times n$

e que assume o valor 1 na matriz identidade. Do ponto de vista geométrico, eles representam o volume de um paralelepípedo (em n dimensões) cujas arestas são os vetores coluna da matriz. Do ponto de vista analítico, eles ocorrem de modo crucial na fórmula de mudança de variáveis nas integrais múltiplas. Mesmo a Regra de Cramer é um fato teórico interessante e muitas vezes útil pois permite fazer estimativas da solução de um sistema em função dos dados.

Talvez os determinantes no Ensino Médio devessem limitar-se aos casos 2×2 e 3×3, com aplicação aos volumes de paralelepípedos e áreas de paralelogramos, com uma breve menção ao caso geral, descrevendo-o como função multilinear alternada das colunas de uma matriz. Mas, nos dias de hoje, tratá-los como instrumento computacional é um anacronismo.

Vamos ao livro.

Fugindo da definição tradicional, que usa a paridade das permutações, os livros didáticos preferem hoje a definição indutiva do determinante, via desenvolvimento de Laplace.

Ocorre que essa definição traz em seu bojo alguns problemas que os autores ignoram, ou admitem mas não os enfrentam.

O maior desses problemas é saber se a definição dada é consistente, ou seja, se o resultado é o mesmo seja qual for a linha ou coluna em relação à qual os cofatores são tomados. No presente caso, este problema é ignorado.

O segundo problema é que, a partir da definição indutiva, não é fácil provar algumas das propriedades mais básicas e imprescindíveis dos determinantes, como por exemplo o fato de que uma matriz com determinante $\neq 0$ é invertível.

Na verdade, o desenvolvimento de Laplace é um interessante método de calcular o determinante (dentro das suas limitações, naturalmente), desde que já se disponha de uma definição do mesmo. Na verdade, é para isso que ele é usado no livro. As principais propriedades são apenas enunciadas.

O livro traz uma lista de 10 propriedades dos determinantes. Algumas dessas são conseqüências imediatas das outras mas isto não é mencionado. Salvo o fato de que $\det A^t = \det A$, as demais 9 propriedades resultam imediatamente de que $\det A$ é uma função linear de cada coluna e muda de sinal quando se trocam as posições de duas delas (função alternada). Mas a linearidade não está entre as 10 propriedades. Ela está embutida no que o autor chama de Teorema de Jacobi. (Não provado, naturalmente.)

A adjunta clássica (aqui chamada simplesmente de adjunta) é apresentada como o método de calcular a inversa. Embora teoricamente interessante, o método é extremamente ineficaz. Além disso, como já dissemos, o cálculo da inversa é um exercício bastante inútil.

Capítulo 10. Sistemas lineares

A única coisa boa neste capítulo (e realmente elogiável) é a seção final, que trata de alguns problemas de Programação Linear. Nela se tem um exemplo de contextualização, em que os estudantes podem ter uma pequena amostra de como noções simples de Matemática podem ser aplicadas para resolver problemas atuais e relevantes.

Fora isso, há muito o que criticar no capítulo.

Começa com o 3º exemplo, no preâmbulo (pág. 227). Que conhecimento matemático é necessário para concluir que um carro jamais poderá alcançar outro que corre com a mesma velocidade e está 20 km na frente? Exemplos desse tipo exibem a Matemática como uma complicação desnecessária.

Funções têm variáveis; equações têm incógnitas.

O livro interpreta geometricamente a solução de um sistema 2×2 como a interseção de duas retas. Pena que não se faça a interpretação geométrica de um sistema 3×3.

Na página 232 o leitor inicia seu processo de viciar-se na Regra de Cramer. Convenhamos que é um absurdo resolver um sistema 2×2 calculando 3 determinantes. Mas isto não é o pior. Mais grave é usar a Regra de Cramer para discutir um sistema linear. O método apresentado só é válido no caso 2×2. E neste caso é muito mais simples, mais direto, mais óbvio e de mais bom senso checar diretamente a proporcionalidade dos coeficientes.

Um sistema 2×2 é indeterminado quando as duas equações são proporcionais. É impossível quando os primeiros membros são proporcionais mas as equações inteiras não são. E é determinado quando os primeiros membros não são proporcionais. Só isso. Nada de Cramer, nada de determinantes. Tudo fácil e direto.

Na página 238, um erro grave. Está escrito que $D = D_x = D_y = D_z = 0$ implicam que o sistema é possível e indeterminado. Esta afirmação errônea é repetida por vários autores, mesmo depois de ser apontada na RPM 23 e no livro "A Matemática do Ensino Médio", vol. 3, página 145.

A razão para esse erro é provavelmente a seguinte. Na dedução da Regra de Cramer, mostra-se que se (x_0, y_0, z_0) é uma solução do sistema então $x_0 \cdot D = D_x$, $y_0 \cdot D = D_y$ e $z_0 \cdot D = D_z$. *Se* $D = D_x = D_y = D_z = 0$ *então* tem-se $x_0 \cdot 0 = 0$, $y_0 \cdot 0 = 0$ e $z_0 \cdot 0 = 0$. Isto não permite tirar conclusão alguma sobre x_0, y_0 e z_0. Como todo terno (x, y, z) cumpre $x \cdot 0 = 0$, $y \cdot 0 = 0$ e $z \cdot 0 = 0$, pode-se erroneamente pensar que todo terno (x, y, z) é solução do sistema, porém esta afirmação não tem fundamento. É preciso observar que o "se" e o "então" no enunciado acima caracterizam uma implicação, cuja recíproca pode ser falsa. A recíproca é verdadeira no caso $D \neq 0$ simplesmente porque, neste caso, já se deve ter provado que existe uma solução do sistema e ela é única.

Uma das coisas que o professor (e, com mais razão, o livro didático) deve estimular no aluno é a prática da autocrítica e o uso do bom senso. Em particular, para que usar um método complicado para resolver um problema se ele pode ter uma solução imediata? Somente para ter um processo automático, que dispense a necessidade de pensar?

Neste capítulo, vários sistemas que teriam soluções óbvias são resolvidos pela Regra de Cramer. Por exemplo, no exercício 11, página 239, bastava somar as 3 equações. No exercício 17, bastava escrever $y = x - z$ (2ª equação), substituir na primeira equação, obtendo $x = -z$ e entrar com este valor na 3ª equação. No exercício 9 (pág. 238) é claro que a 3ª equação é a soma das outras duas.

O aluno deve ser estimulado a pensar, a ter iniciativa, em vez de ser adestrado no uso de métodos automáticos, mesmo que esses métodos fossem eficazes e corretos (o que não é o caso).

O tratamento da Programação Linear, cujos méritos foram destacados acima, deveria trazer uma explicação do motivo pelo qual o máximo ou o mínimo ocorre num vértice da região.

A definição de sistema escalonado está errada.

O processo de escalonamento, de longe o mais eficiente para a resolução de sistemas lineares, não tem sua organização passo a passo adequadamente apresentada.

Além disso, não é correto dizer que "o processo de escalonamento pode também ser utilizado na discussão de sistemas lineares, caso seja conveniente". Ele *deve* deve ser usado. É *sempre* conveniente. E um número muito maior de exemplos deveria ser apresentado.

Não há problemas contextuais sobre sistemas lineares neste capítulo. É indesculpável. Poderiam ser apresentados exemplos e problemas provenientes de ligas, dietas, reações químicas, etc.

Capítulo 11. Áreas – Medidas de superfícies

É feita neste capítulo uma revisão das fórmulas para cálculo de áeas de polígonos, círculos e setores circulares. São propostos inúmeros exercícios mas apenas dois deles são realísticos. Não é feita, sequer de maneira intuitiva, tentativa alguma de explicar o significado da área. Salvo a área do círculo, da qual é dada uma boa explicação geométrica, as demais fórmulas são apenas apresentadas sem nenhuma palavra de esclarecimento. A fórmula de Heron para a área do triângulo (um substancial exercício de manipulação) é estabelecida.

Uma boa conexão de áreas com Trigonometria teria sido a fórmula da área da projeção ortogonal de uma figura plana sobre outro plano ($A' = A \cdot \cos\alpha$). Outro fato de grande importância, omitido aqui mas que fará falta no cálculo dos volumes de pirâmides e cones, é a relação $A' = k^2 \cdot A$ entre as áreas de figuras semelhantes, onde k é a razão de semelhança. Não só por sua aplicação nos capítulos seguintes mas por seu interesse intrínseco, esta relação mereceria ser destacada (juntamente com sua análoga tridimensional), mas não é ao menos mencionada.

A área de um setor circular é calculada em função do arco subtendido e em função do ângulo central (em graus e radianos). Mais uma vez aparece a sempre presente regra de três sem justificação. Mais uma vez o conceito de proporcionalidade se faria necessário, pois nem sempre uma grandeza que é função crescente de outra é proporcional a essa outra. É preciso usar o princípio fundamental da proporcionalidade para garantir o emprego da regra de três.

Capítulo 12. Geometria espacial – Uma introdução intuitiva

Este capítulo contém uma série de definições, enunciados e figuras. Ao terminar de estudá-lo, o aluno terá recebido muitas informações mas sua formação terá lucrado muito pouco, talvez nada. Algumas definições são criticáveis, como a de dizer que uma reta são "duas paralelas iguais", e o mesmo para planos. Os fatos estabelecidos nos enunciados são chamados "propriedades" e são impostos sem justificativas, embora alguns deles (como o teorema das três perpendiculares) estejam longe de ser óbvios.

A Geometria, desde Euclides até hoje, é organizada sob a forma de definições, axiomas (ou postulados), teoremas, construções e problemas. No limiar do século 20, culminando uma seqüência de avaliações críticas, a exposição de Euclides foi aperfeiçoada e posta sob forma logicamente impecável por Hilbert. Outras abordagens corretas se seguiram, devendo-se salientar a de G. Birkhoff, modificada por A. V. Pogorelov, que a simplificou e tornou acessível aos milhões de estudantes russos, que têm estudado em seus livros nos últimos 40 anos, com grande êxito.

Outra notável exposição da Geometria, surgida também no início do século 20 é as "Leçons de Géométrie", de Hadamard, um modelo de equilíbrio, bom gosto e bom senso. Hadamard não se preocupa em explicar o óbvio, mas respeita o leitor, provando as afirmações que requerem prova, estabelecendo as conexões lógicas entre os temas afins e fazendo construções geométricas.

Não é didaticamente defensável (nem se está propondo isto) que a Geometria seja apresentada aos alunos sob o padrão logicamente impecável de Hilbert. Isto seria um extremo absurdo. Mas igualmente errado é o outro extremo.

A Geometria é um lugar ideal para mostrar aos alunos a estrutura lógico-dedutiva da Matemática, casada com a visão intuitiva do espaço que nos cerca. Mesmo sem ir aos limites extremos do rigor, estabelecer axiomas e demonstrar teoremas elementares é educativo para a formação do estudante. Estimula o raciocínio e ensina a desenvolver o espírito crítico. Questionando fatos e corrigindo erros de argumentação, ajuda a formar cidadãos mais conscientes e argutos.

Da forma como este capítulo está escrito (e, de um modo geral, quase toda a Geometria apresentada no livro), o estudante é submetido a uma atitude passiva, tendo que aceitar o que lhe é imposto como verdadeiro, a partir da autoridade do autor e de desenhos mais ou menos bem feitos.

É claro que requer certa arte trilhar o caminho equilibrado entre os abismos do excessivo rigor e a dieta insossa da exposição descritiva e peremptória. Muitas gerações que nos antecederam, durante séculos, enfrentaram este problema e propuseram soluções. Pogorelov e Hadamard são exemplos bem sucedidos. Entre nós, o livro de Paulo Cezar P. Carvalho intitulado "Introdução à Geometria Espacial" (da Coleção do Professor de Matemática, da SBM) é um belo modelo, mostrando como esse equilíbrio pode ser alcançado com moderação, objetividade e elegância. Embora tenha sido escrito para professores do Ensino Médio, pode facilmente ser adaptado e servir de guia para uma apresentação do assunto destinada aos alunos.

Na lista de "propriedades" que este capítulo contém há sérias lacunas como, por exemplo, o Postulado de Euclides ou a existência e unicidade da perpendicular a um plano tirada a partir de um ponto dado. Algumas das mencionadas propriedades clamam por uma justificação, ainda que intuitiva, ou uma demonstração.

Entre as definições também há ausências indesculpáveis, como a de ângulo entre uma reta e um plano, ou de ângulo entre dois planos.

Às vezes, a linguagem é inadequada. Por exemplo, seria melhor dizer "distância de um ponto a uma reta", em vez de "entre um ponto e uma reta". O termo *entre* é mais apropriado para figuras iguais, como em "distância entre duas retas".

Como uma espécie de desencargo de consciência, o capítulo termina com "Algumas demonstrações". São quatro teoremas demonstrados, sendo dois deles de Geometria Plana e dois de Geometria Espacial. As provas se baseiam em outras propriedades aceitas sem demonstração, de modo que não contribuem para transmitir a idéia do método dedutivo.

Talvez o maior defeito do capítulo seja o de não distinguir, entre as propriedades listadas, aquelas que são intuitivamente aceitáveis, e portanto podem ser tomadas como axiomas, daquelas que requerem demonstração. O método peremptório não educa; mal informa.

Capítulo 13. Poliedros

A rigor, a noção de poliedro não é definida. Aresta e vértice também não são definidos. Está escrito, por exemplo: "A interseção de duas faces *dá origem* a uma aresta". Em primeiro lugar, não se sabe o que significa "dar origem". Em segundo lugar, como não foi dito como as faces estão situadas em relação uma às outras, a interseção de duas delas pode ser muito variada. Um caso simples é o de duas faces com um ponto apenas em comum. Como poliedro foi mal definido, muita coisa estranha pode acontecer. Em matéria de definições, o capítulo deixa muito a desejar, como veremos adiante.

A relação de Euler, que deveria ter sido escrita sob a forma $V - A + F = 2$ para destacar o número 2, chamado a "característica" dos poliedros convexos, merecia uma explicação. Há várias demonstrações simples para ela. Além disso, deveria ser observado que $V - A + F$ pode assumir valores diferentes de 2 se o poliedro não é convexo. E ainda: deveria ser dito que, dados três números V, A, F que cumpram essa relação, nem sempre existe um poliedro que tenha V vértices, A arestas e F faces.

Na definição de poliedro regular, não foi dito que as faces são todas congruentes nem que o poliedro é convexo, mas isto é admitido tacitamente, sem nenhum comentário.

As definições de prisma, pirâmide, cilindro e cone estão todas erradas. Um prisma, por exemplo, não é um conjunto de segmentos de reta. Seus elementos são pontos e não segmentos. O prisma é uma *reunião* de segmentos de reta paralelos a um segmento dado. A noção de prisma, bem como a de cilindro (da qual é um caso particular) está inerentemente associada à de translação, do mesmo modo que a de pirâmide (ou, mais geralmente, cone) está ligada a semelhança ou, mais especificamente, a homotetia. Mas, é claro, estas importantes transformações geométricas, embora presentes no cotidiano e nas aplicações mais simples da Matemática, não são mencionadas neste livro, apesar das simplificações e da clareza que seu uso trariam.

Há milênios, em Matemática, área é a medida de uma superfície e volume é a medida de um sólido. Volume é, portanto, um número e não uma região do espaço. "Medida do volume" é, no mínimo, um pleonasmo. Além disso, a noção de volume merecia uma explicação, pelo menos intuitiva.

A fórmula do volume de um bloco retangular (no livro chamado de paralelepípedo reto retangular) está muito mal explicada, mesmo no particularíssimo caso em que as arestas têm medidas inteiras. Seria facílimo tratar o caso em que as arestas têm comprimentos racionais. Mesmo a situação geral resultaria simples e elegante usando o princípio fundamental da proporcionalidade. Em vez disso, é negada ao leitor a oportunidade ver um exemplo concreto do que o autor mencionou no vol. 1, quando disse que número real é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade.

Para obter a fórmula que exprime o volume de um prisma, é usado o fato de que as seções deste sólido por planos paralelos às suas bases são todas congruentes. Mas nenhum esforço é feito para justificar isto nem para se desculpar por não o ter feito. O mesmo vai ocorrer, é claro, no volume do cilindro. Na verdade, o que for feito para prismas e pirâmides (salvo as áreas laterais) será repetido para cilindros e cones, desnecessariamente pois, como já observamos antes, aqueles são casos particulares destes.

Na página 339, para obter a fórmula que dá o volume de uma pirâmide, o livro diz que se p e P são semelhantes então a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança. Em primeiro lugar, observando cuidadosamente a página, não se sabe o que são p e P. Portanto, não se sabe o que é a razão de semelhança entre essas coisas. Em segundo lugar, em nenhum momento anterior se justifica que a razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Mais grave ainda é que a geometria espacial foi, neste livro, precedida de um capítulo a respeito de áreas de figuras planas mas, em nenhum lugar, se falou de áreas de figuras semelhantes. Voltando à página em questão, no final o livro diz: "Já vimos que ...". Não é verdade. Nunca se viu tal relação.

O livro não cita que uma seção por um plano paralelo à base de uma pirâmide destaca uma pirâmide menor que é semelhante à original (poderia falar em miniatura). Mas, muito depois, quando a mesma coisa é feita em um cone, o livro dirá que o cone menor é semelhante ao maior. Aliás, a noção de semelhança não é sequer comentada. Homotetia, muito menos.

O cálculo do volume da pirâmide triangular, na página 340, é incompreensível. O livro faz a decomposição correta do prisma triangular em três pirâmides. Mostra o desenho separado de cada uma e as numera com I, II e III. Em seguida afirma: "Estas três pirâmides, I, II e III, têm a mesma base e a mesma altura". Não é verdade.

A explicação correta é a seguinte:

a) As pirâmides I e II têm bases iguais e alturas iguais. De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de D ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF) - altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.

b) As pirâmides II e III também têm bases iguais e alturas iguais. De fato, o triângulo CEF é congruente com o triângulo BCE pois cada um deles é a metade do paralelogramo $BCFE$, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de D ao plano $(BCFE)$. Logo, II e II têm mesmo volume.

A fórmula do volume do tronco da pirâmide, na página 346, é difícil de gravar.

O leitor deveria ser aconselhado, na prática, a subtrair o volume da pirâmide menor do volume da maior. Se apenas a altura h_1 do tronco for conhecida, a altura h da pirâmide total é facilmente calculada a partir da relação $b/B = (1 - h_1/h)^2$. Esta é uma boa ocasião para mostrar que aprender o método é geralmente melhor do que decorar a fórmula.

Capítulo 14. Corpos redondos

Cilindros e cones são considerados somente quando a base é circular. Como dissemos antes, suas definições estão erradas.

A área da superfície lateral de um cone é calculada por meio de uma regra de três, como sempre não justificada.

A dedução da fórmula do volume do cone está muito descuidadamente redigida. O uso da semelhança, como sempre, fica implícito e as conclusões se tornam misteriosas. (Pede-se que o leitor as justifique.) A frase "proporcionais às bases nas mesmas proporções" é obscura. As igualdades área $(\beta \cap C) = B$ e área $(\beta \cap P) = B$ não são verdadeiras. E numa demonstração não se deve usar notação que ocorre na figura sem explicar seu significado.

Pior do que isto é o argumento da página 373 para obter a fórmula do volume do tronco de cone. O Princípio de Cavalieri está muito mal empregado e a dedução é completamente inválida. Seria necessário completar o cone e a pirâmide e depois usar semelhanças (homotetias) para justificar o uso do Princípio.

Ainda na página 373, a frase "usando a semelhança entre os dois cones" é descabida, pois não se baseia em nada que tenha sido dito antes. Fica mais uma vez comprovada aqui a enorme relevância que tem o conceito de semelhança para o estudo de áreas e volumes. Esse conceito, intimamente associado à noção de proporcionalidade, deveria ter merecido maior atenção no livro.

As figuras estão muito bem apresentadas e os exercícios são bons.

O volume da esfera é obtido pelo Princípio de Cavalieri e a área da superfície esférica tem uma justificação intuitiva convincente.

Capítulo 15. Análise combinatória

O capítulo inicia com um problema real e adequado. Em seguida procura motivar o princípio multiplicativo e os exemplos são muito bons.

O enunciado do princípio multiplicativo não está correto. Ele deveria dizer que para *cada* possibilidade da primeira etapa existem m possibilidades para a segunda etapa.

O livro claramente procura dividir os problemas de combinatória em aplicações de permutações, arranjos e combinações. Desta forma, para cada problema novo, o aluno tentará encaixá-lo em uma dessas categorias. Esta atitude não é apropriada.

O conceito de arranjo tende a desaparecer nos textos modernos de combinatória. As duas primeiras ferramentas de contagem são a combinação (que corresponde à atitude intuitiva de *escolher*) e a permutação (que corresponde à noção intuitiva de *misturar*). O arranjo nada mais é que uma combinação seguida de uma permutação. Por isso, não deve ter o mesmo "status" que as duas ferramentas fundamentais.

No item permutação, o livro mostra uma árvore dos anagramas da palavra ANEL e daí conclui que a permutação de n elementos é $n!$ Ora, se o princípio multiplicativo está em vigor, por que não apresentar o raciocínio geral? Tenho um conjunto com n elementos. Quantas filas posso formar? Simples: de quantas formas posso escolher o primeiro elemento da fila? Resp. n. De quantas maneiras posso escolher o segundo elemento da fila? Resp. $n-1$. Prosseguindo desta forma, e usando o princípio multiplicativo, fica claro que a permutação de n elementos é $n!$

As combinações são obtidas dos arranjos. Perde-se a pureza do conceito de obter subconjuntos de um conjunto dado. E esta é a essência das combinações. Mas, mesmo descartando os inúteis arranjos, a Combinatória não se resume só nisso. No nível do ensino médio, a Combinatória é um capítulo que deve ensinar o aluno a *contar* de forma eficiente. Para isso são necessários raciocínio, estratégias, métodos e eventuais truques para facilitar as coisas. Mas, nada disso é desenvolvido ou estimulado neste livro. Não há problemas resolvidos que incluam expressões do tipo "pelo menos" ou "no máximo". Não há uma recomendação de quando devemos contar tudo e descontar o que não interessa.

O livro inclui corretamente as permutações com repetição mas poderia dispensar perfeitamente os arranjos com repetição. Para justificar isto vejam os exemplos do próprio livro: 1º) Usando os algarismos 1, 4, 7, 9 quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar? O correto é pensar assim: 4 escolhas para o primeiro algarismo, 3 para o segundo e 2 para o terceiro. Simples, mas o livro sugere arranjos. Para que? 2º) Usando os algarismos 2, 4, 7, 9 quantos números de 3 algarismos podemos formar? O correto é pensar assim: 4 escolhas para o primeiro algarismo, 4 para o segundo e 4 para o terceiro. Simples. Para que serve então a fórmula de arranjos com repetição?

Em suma, o capítulo não induz o aluno a pensar. Não fornece métodos nem estratégias de contagem. O aluno que estudar este capítulo permanecerá extremamente limitado e inseguro nesta matéria.

O tema binômio de Newton é assunto chato, sem utilidade no ensino médio e, em geral (com justa razão), odiado pelos estudantes. Mas, como é assunto que pode cair no vestibular, os livros se esmeram em desenvolver essa inutilidade. Não há demonstrações. No máximo são exibidos casos particulares e depois, *generalizando* ..., aparece a fórmula. Neste ponto, o livro que estamos comentando não é diferente dos demais. O triângulo “mágico” de Pascal é apresentado e propriedades são estabelecidas por simples observação. Ficam no ar as perguntas: é correto ensinar aos alunos que a Matemática é um conjunto de observações? É correto ensinar aos alunos que uma vez que tenhamos observado alguns resultados possamos concluir que eles sejam sempre válidos? É claro que a respota é não para as duas perguntas e os autores de livros didáticos deviam enfatizar isto mas não o fazem. Vejamos o exemplo da relação de Stifel (no livro, Stiffel). No livro ela é fruto de três observações do misterioso triângulo de Pascal. Mas seria muito fácil justificar. Vamos ver.

Considere, por exemplo um conjunto A com 10 elementos. Quantos subconjuntos de 3 elementos podemos formar? A esposta é C_{10}^{3}. Seja agora x um dos elementos de A. Em quantos subconjuntos de A o elemento x está presente? A resposta é C_{9}^{2}. Em quantos subconujuntos de A o elemento x não está presente? A resposta é C_{9}^{3}. A conclusão óbvia é que $C_{9}^{2} + C_{9}^{3} = C_{10}^{3}$. Esta é a relação de Stifel. O raciocínio que utilizamos é exatamente o mesmo do caso geral.

Capítulo 16. Probabilidade

Contrastando com os capítulos anteriores, este é bem cuidadoso em explicar os novos conceitos. Deveria dizer logo de início que tudo se refere a conjuntos finitos. O capítulo se desenvolve com preocupação pelo bom entendimento e definindo corretamente os termos novos: espaço amostral, evento, eventos mutuamente exclusivos, eventos independentes, etc. Os exercícios são simples mas conduzem a um treinamento eficiente dos novos conceitos. As aplicações à genética foram bem-vindas fazendo uma conexão com a biologia que os outros livros não comentam.

Agora a crítica. Para que servem probabilidades? Para que se conheça a *chance* que um evento tenha de ocorrer. O conhecimento desse resultado permite a uma correta tomada de decisão nos problemas reais. Por exemplo, o que é melhor: comprar dois bilhetes de uma loteria ou comprar um bilhete em cada uma de duas loterias distintas? Faltam no capítulo problemas em que os alunos sejam estimulados a tomar uma decisão.

Considerações gerais sobre o volume 2

Houve uma queda acentuada de qualidade em relação ao volume 1.

O equilíbrio do trinômio conceituação–manipulação–aplicações, que deve orientar o ensino da Matemática, é fortemente violado com a tradicional predominância da manipulação. Muitos conceitos são impropriamente definidos e mal motivados. A ligação com situações reais raramente é feita. Há erros de definição. O leitor não é estimulado a pensar, a tomar decisões, a usar o espírito crítico. Ênfases mal colocadas (como Regra de Cramer) levam a uma visão anacrônica da Matemática e afastam-na do bom senso. A Trigonometria é inflacionada e algumas de suas noções básicas são mal apresentadas. A Geometria é apresentada como uma coleção de definições e afirmações peremptórias. Noções importantes, como semelhança e proporcionalidade são passadas ao largo, isto sem mencionar o conceito ausente de combinação linear, que deveria ser a base dos capítulos 8, 9 e 10. O tratamento da Análise Combinatória é tradicional e muito incompleto. Pontos altos: a inclusão de Programação Linear, o capítulo de Probabilidades, os exercícios sobre áreas e volumes e as ilustrações dos capítulos finais.

Dante

Matemática, Contexto e Aplicações – volume 3

Capítulo 1. Geometria analítica: ponto e reta

Segundo as normas gramaticais, Geometria Analítica escreve-se com iniciais maiúsculas.

O livro diz que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e os pares ordenados de números reais e que, para estabelecer tal correspondência, são usadas duas retas perpendiculares. Mas não diz como definir essa bijeção. Na verdade, são dois *eixos* (retas orientadas com origem fixada) os quais, além de perpendiculares, devem ter a mesma origem. Teria sido esclarecedor dedicar meia dúzia de linhas sobre coordenadas num eixo, antes de falar em coordenadas no plano. Além disso (e principalmente) não existe apenas *uma* correspondência. Cada sistema de eixos ortogonais no plano determina uma correspondência. Este ponto é importante a fim de que o aluno se sinta livre para escolher os eixos de acordo com a conveniência, conforme o problema que abordar.

Os quatro primeiros exercícios teriam soluções mais simples se fosse feita a observação de que distâncias são iguais se, e somente se, seus quadrados o são. As raízes quadradas são ali inteiramente desnecessárias. No terceiro, para verificar o teorema de Pitágoras, tomam-se 3 raízes quadradas e depois elas são elevadas ao quadrado! Não se deve esquecer que o bom senso precede as regras, as fórmulas e os métodos.

Fazem muita falta no livro problemas de Geometria cujas soluções façam uso de coordenadas. Neles, o aluno aprende a escolher os eixos de forma objetiva. Uma oportunidade para isso foi perdida no Exercício 15 (página 13), onde se pede para mostrar que as diagonais de um retângulo têm comprimentos iguais.

No Exercício 19 (página 13), lê-se: "Lembre-se que ..." ($a^2 \lesseqqgtr b^2+c^2$ conforme o ângulo A seja agudo, reto ou obtuso). Mas o leitor não pode lembrar-se pois, ao tratar da lei dos cossenos, isto não foi observado como devia ter sido.

O modo de obter as coordenadas do ponto médio de um segmento (teorema de Tales) daria, sem esforço adicional algum, as coordenadas do ponto que divide um segmento numa razão dada, e daí, imediatamente, as equações paramétricas da reta.

O Exercício 25 (página 18) deveria ser generalizado e destacado, pois contém a regra para deslocar um segmento paralelamente a si mesmo, ou seja, a condição necessária e suficiente para que dois segmentos sejam paralelos e do mesmo sentido.

Para obter a condição de alinhamento de três pontos, o livro começa pondo o problema em termos da igualdade $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$ mas abandona bruscamente essa idéia e saca um determinante, cuja origem não explica. E conclui com a condição expressa sob a forma de um determinante 3×3 igualado a zero. Inexplicavelmente, essa maneira complicada, obscura e injustificada de caracterizar o alinhamento de 3 pontos é a favorita dos autores brasileiros. O significado geométrico daquele determinante é que seu valor absoluto é igual a 6 vezes o volume da pirâmide cujo vértice é a origem e cuja base é o triângulo ABC, onde $A = (x_1, y_1, 1)$, $B = (x_2, y_2, 1)$ e $C = (x_3, y_3, 1)$. Quando A, B e C estão alinhados a base ABC se degenera num segmento e o volume da "pirâmide" fica igual a zero. Convenhamos que é um modo um tanto extravagante de tratar a questão.

A maneira mais natural de verificar se os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ estão alinhados é ver se os segmentos AB e BC estão igualmente inclinados em relação ao eixo OX, ou seja, se $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)$. Em qualquer caso concreto um aluno sabe fazer isso de cabeça. Para que complicar as coisas? Para que fazer mistério?

Os exercícios, resolvidos e propostos, ficariam bem mais fáceis sem os determinantes.

O livro leva 3 páginas e usa 3 nomes (inclinação, declividade e coeficiente angular) para falar de algo que poderia ser explicado em 3 linhas. A ênfase é mal colocada. O ângulo não é o mais importante. O que interessa é o quociente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, que é sua tangente trigonométrica.

Em seguida são apresentadas várias formas da equação de uma reta.

Ao comparar essas diversas formas, está dito na página 34 que a equação $ax + by + c = 0$ *não identifica nenhum elemento* [da reta] *em especial.* Isto está longe de ser verdadeiro. Em primeiro lugar, esta equação fornece, de imediato, uma informação geométrica reveladora: a reta é perpendicular ao segmento OA, onde $A = (a, b)$. Se $a^2 + b^2 = 1$, a distância dessa reta à origem é $|c|$. Sua declividade é $-b/a$ e ela corta os eixos nos pontos $(-c/a, 0)$ e $(0, -c/b)$. Quantos dados importantes sobre a reta podem ser obtidos a partir da equação $ax + by + c = 0$!

Aliás, a melhor forma de apresentar esta equação é $ax + by = c$. Assim ela aparece como a linha de nível c da função $\varphi(x, y) = ax + by$.

Uma propriedade relevante que o autor não menciona é que as equações

$ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ representam retas perpendiculares se, e somente se, $aa' + bb' = 0$.

Tampouco é dito que as equações acima definem a mesma reta se, e somente se, $a' + k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ e $c' = k \cdot c$ para uma certa constante k e retas paralelas quando $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ mas $c' \neq k \cdot c$. Nem é observado que, mantendo fixos a, b e fazendo c variar, obtêm-se retas paralelas.

Ainda na página 34, diz-se que a equação da reta por meio de determinante identifica dois pontos da mesma. Ora, a equação da forma $y = mx + n$ nos dá logo que os pontos $(0, n)$ e $(1, m + n)$ pertencem à reta.

A importante forma paramétrica da reta, tão conveniente para resolver diversos problemas, é apresentada por meio de um exemplo particular e nunca é definida geralmente.

O desenho ao pé da página 37 está mal feito. O ponto A deveria estar abaixo da reta ED.

A explicação (página 38) de que duas retas r e s coincidem quando $r \cap s = r$ é descabida. Ou o leitor não a entende ou passa a não dar importância aos esclarecimentos oferecidos pelo livro. Como se não bastassem as "paralelas iguais".

As retas cujas equações são $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 1 = 0$ são paralelas porque a primeira equação é equivalente a $4x - 6y + 10 = 0$, a qual é obviamente incompatível com $4x - 6y - 1 = 0$. As soluções dos problemas sobre paralelismo apresentadas pelo livro são todas em termos do coeficiente angular, o que as faz mais complicadas.

O livro não dá a equação da reta que passa por um ponto dado e é paralela a uma reta dada. Isto simplificaria consideravelmente a solução de exercícios como o 34 (página 41).

Depois de 149 páginas de Trigonometria no volume 2, é ridículo usar as fórmulas de $\operatorname{sen}(a + b)$ e $\cos(a + b)$ para ver que $\operatorname{sen}(a + \pi/2) = \cos a$ e $\cos(a + \pi/2) = -\operatorname{sen} a$ (página 47). Embora a conexão com assuntos anteriores seja recomendável, deveria ser pelo menos observado que não é necessário usar Trigonometria para obter a condição de perpendicularismo das retas $y = mx + n$ e $y = m_1 x + n_1$. Além disso, o trabalho que ocupa a página 48 quase toda é desnecessário para provar a recíproca. A perpendicular pelo ponto P é única e tem aquele coeficiente angular, logo coincide com s.

Como já dissemos, nem uma palavra sobre a condição de perpendicularismo das retas $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$.

Na página 49: para achar a equação da mediatriz do segmento AB, bastam as coordenadas de A e B. Não é preciso encontrar a equação da reta AB.

Não há um único exercício em que seja aplicada a equação da mediatriz de um segmento. Exemplo: sobre uma reta dada, achar um ponto equidistante de A e B.

Como fazem muitos dos seus congêneres, o livro não deduz a fórmula da distância de um ponto a uma reta. O leitor deve aceitá-la sem prova "devido à complexidade e à longa extensão" do argumento que a estabeleceria. Isto, porém, não é verdade. Sabendo que a reta $ax + by + c = 0$ é perpendicular ao segmento OA, com $A = (a, b)$, a fórmula decorre facilmente.

O ângulo entre duas retas tem sua expressão deduzida no caso das mesmas serem dadas por equações do tipo $y = mx + n$. Não se faz referência ao caso em que as retas são dadas por equações do tipo $ax + by + c = 0$, para as quais o cosseno desse ângulo tem uma expressão bem conhecida. Nem é observado que, para o ângulo entre duas retas ser bem definido as mesmas devem estar orientadas. Já o ângulo entre duas semi-retas está sempre bem definido. Outro ponto a ser esclarecido é a vantagem de se ter o cosseno em vez da tangente, pois $\cos\theta = \cos(-\theta)$ enquanto $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$.

A área de um triângulo é calculada num exemplo e enunciada em geral.

Em resumo, este capítulo ressente-se das seguintes falhas:

Não há aplicações da Geometria Analítica para resolver problemas de Geometria Plana. Particularmente, o aluno não tem ocasião de escolher o sistema de coordenadas que melhor lhe convenha.

Não há aplicações a outras matérias, como a Cinemática.

Não há problemas contextuais.

Embora vá usar vetores no capítulo sobre número complexos, eles não são estudados aqui, como deveriam, a fim de ajudar a esclarecer muitas situações.

Não há referências a feixes de retas nem a regiões definidas por desigualdades lineares.

A forma $ax + by + c = 0$ e a forma paramétrica da equação da reta não são adequadamente estudadas.

Capítulo 2. Geometria analítica: circunferência

Para o nível do livro, este capítulo está bem apresentado, de forma clara e sem maiores defeitos. Os reparos a serem feitos são de pequena monta. Gostaríamos que o importante método de completar os quadrados, mencionado no Exercício 3, página 70, fosse mais destacado. E que, ao resolver o problema de achar a equação da circunferência que passa por 3 pontos dados (Exercício 14, página 81) fosse apresentada mais uma solução, que é geometricamente significativa, a saber, a de considerar as mediatrizes de dois desses segmentos. Além disso, deveria ser feita (tanto na solução apresentada no livro como na que sugerimos) uma análise da existência da solução, conforme os pontos dados sejam colineares ou não.

O livro não tenta caracterizar as equações do segundo grau em 2 variáveis que definem circunferências. Com isso, evita cometer o erro comum a todos os demais, segundo os quais duas equações que definem a mesma curva têm coeficientes proporcionais. Desse modo, a omissão resultou em ponto positivo.

Capítulo 3. Geometria analítica: secções cônicas

Logo na abertura do capítulo, três sérias críticas.

Primeira: O gráfico da função $y = k/x$ é dito representar a relação entre o volume x e a pressão (de quê?). Supondo que seja de um gás, deveria ser mencionado que a temperatura deve ser constante. É afirmado ainda que esse gráfico é uma hipérbole mas, ao estudar esta curva, a equação obtida para ela não será sequer parecida com $y = 1/x$.

Segunda: Na figura que mostra a superfície parabólica de um holofote (ou refletor) os raios de luz são desenhados bastante divergentes, mas deveriam ser paralelos pois é para isso que a parábola é usada.

Terceira: Um erro feio. A seção de um cone por um plano paralelo ao eixo é chamada de parábola. Na verdade é uma hipérbole.

Na página 89, o leitor é convidado a marcar uma série de pontos de uma parábola mas o livro não diz como. Assim de olho, isso não é uma tarefa fácil. Acontece que existe um método prático, com régua, esquadro, barbante e lápis, bem conhecido, que ensina como fazê-lo.

O vértice da parábola é definido (?) como "o ponto V" de uma figura mal feita, sem maiores comentários.

São apresentadas 12 formas diferentes da equação da parábola, acompanhadas de 21 figuras mas em nenhuma ocasião se justifica o nome dado ao gráfico da função quadrática no volume 1 do livro.

Para obter a equação reduzida da parábola, uma equação é elevada ao quadrado mas não se explica por que isto não resulta na introdução das chamadas "raízes estranhas". A Observação da página 82 talvez signifique isto mas é muito obscura e, além disso, é uma afirmação peremptória, sem justificativa.

O segundo desenho da página 94 mostra uma parábola com um bico.

A elipse é apresentada como a seção de um cone por "um plano inclinado em relação ao eixo". Ora, dito somente isso, a seção pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

Novamente são marcados a olho vários pontos de uma elipse. Nenhum método para obtê-los é mencionado. Nem com um barbante amarrado aos focos nem com o compasso.

Na dedução da equação da elipse duas vezes se eleva uma equação ao quadrado. Mas o livro não se preocupa em provar (ou ao menos dizer) que a equação final não é satisfeita por outros pontos além dos que pertencem à elipse inicial.

Há uma observação no quadro "para refletir" que talvez queira dizer isto mas é muito hermética e difícil de decifrar.

Em muitas das figuras de elipses os focos estão fora do lugar.

Como no caso da parábola, são apresentadas várias formas particulares da equação da elipse, todas elas obtidas por translação dos eixos. (Mas é claro que a palavra "translação" não aparece aqui, nem em lugar algum dos livro.) Esse tipo de generalização banal não tem grande valia. O que deveria ser (pelo menos) mencionado era que a equação geral do segundo grau em 2 variáveis representa sempre uma cônica, salvo em casos excepcionais facilmente identificáveis, em que representa um par de retas.

A hipérbole é apresentada como seção de um cone duplo por um plano paralelo ao eixo. Assim, para o livro, cada ramo de hipérbole é uma parábola. Na verdade, todo plano que corte os dois cones os secciona segundo uma hipérbole. A seção paralela ao eixo é a hipérbole de excentricidade máxima.

Os 13 primeiros desenhos de hipérbole estão errados. Vendo-os, o aluno não fará idéia de como é aquela curva.

Mais uma vez, o leitor é induzido a marcar pontos na hipérbole sem nenhuma indicação de como fazê-lo.

Mais uma vez se elevam equações ao quadrado repetidamente sem justificar a não introdução de raízes estranhas.

Mais uma vez são apresentadas variações óbvias da equação da hipérbole, obtidas por translação dos eixos. No máximo, essas banalidades poderiam ocorrer nos exercícios. Por outro lado, uma grave omissão é cometida: em lugar algum se diz que a equação $xy = 1$ representa uma hipérbole.

Há 4 desenhos corretos de hipérboles.

Assíntotas são mencionadas mas seu significado não é esclarecido.

O capítulo não contém exemplos ou problemas nos quais as noções nele estudadas sejam relacionadas com assuntos apresentados nos volumes ou capítulos anteriores (como, por exemplo, o gráfico de uma função quadrática ou da função $y = 1/x$). Não são mencionadas aplicações (como as propriedades refletoras da parábola da elipse e da hipérbole). Em particular, antenas parabólicas e holofotes não são citados, nem órbitas de planetas. Em suma, as seções cônicas são estudadas a fim de resolver problemas sobre seções cônicas.

Capítulo 4. Números complexos

O livro motiva a introdução dos números complexos pela necessidade de resolver equações como $x^2 + 1 = 0$. Menciona o problema, abordado por Cardano, de achar dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40, e apresenta a resposta $x = 5 + \sqrt{-15}$, $y = 5 - \sqrt{-15}$. Nenhuma pista é fornecida sobre o modo de chegar a esses valores. Encontrar dois números conhecendo a soma e o produto deles é um problema conhecido há 4000 anos. É mais simples e natural aplicação da equação do segundo grau. Mas este livro não o considerou no volume 1, por isso é obrigado a ser peremptório agora.

A verdade histórica, entretanto, é diferente. Se um problema conduzia a uma equação do segundo grau cuja solução formal envolvia a raiz quadrada de um número negativo, o problema era simplesmente considerado sem solução. Durante dezenas de séculos foi assim. Somente depois da descoberta da fórmula das raízes de uma equação do terceiro grau é que os números complexos forçaram seu reconhecimento matemático, pois as raízes *reais* daquelas equações eram representadas por expressões contendo raízes quadradas de números negativos.

Outra imprecisão histórica é a afirmação, na página 126, de que Gauss "passou a usar o símbolo (a, b)", para representar o número complexo $a + bi$ e definiu as operações entre complexos como operações entre pares ordenados, de modo inteiramente formal, como faz o livro. Com base nessa alegação infundada, as definições de soma e produto de números complexos (especialmente esta última) são dadas artificialmente, sem motivação.

Na lista das propriedades dessas operações aparece a afirmação, não comentada nem esclarecida, de que todo complexo $z \neq 0$ possui um inverso multiplicativo. Somente 12 páginas depois é que se esclarece o mistério e $1/z$ é calculado, embora num exercício, quando devia ter mais destaque.

Na página 136 é feita a interpretação geométrica da soma de dois complexos. Ali, a palavra "vetor" aparece (e continua a surgir nas páginas seguintes) sem nenhuma explicação, talvez porque o autor a considera conhecida pelos alunos em suas aulas de Física.

Acontece que vetor é um conceito matemático, não físico. É bom que ele seja estudado nos livros de Matemática. Ele deveria ter aparecido, e teria sido muito útil, no tratamento da Geometria Analítica. Ou mesmo nos capítulos de Álgebra Linear do volume 2. Não há justificativa para essa omissão.

O conjugado de um número complexo é apresentado adequadamente, com interpretação geométrica e com a demonstração de suas propriedades algébricas. O mesmo comentário positivo vale para o módulo. Faltou apenas destacar que $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ e que $z^{-1} = \overline{z}$ quando $|z| = 1$. Os complexos de módulo 1 merecem atenção especial. Em particular, o conjunto deles (S^1) é fechado em relação à soma e ao inverso. Também deveria ser feita a importante observação de que, pensando em z e w como pontos do plano, tem-se $|z - w| = d(z, w)$.

A multiplicação e a divisão de complexos são interpretadas geometricamente. No caso da divisão, a justificativa é obscura. Merece mais explicação.

O capítulo se ressente da falta de aplicações. Os números complexos são um instrumento de grande valia para resolver problemas de Geometria Plana. Um exemplo simples: dados dois vértices de um triângulo equilátero, encontrar o terceiro.

A nota histórica à página 167, da forma como está escrita, é ininteligível e as interpretações nela contidas erram o alvo.

Capítulo 5. Polinômios

No estudo de polinômios há três aspectos a considerar: o aritmético, em que se consideram as propriedades de divisibilidade, análogas às dos números inteiros, o algébrico, em que se trata da resolução de equações, e o analítico, em que os polinômios são vistos como uma importante categoria de funções de uma variável.

Evidentemente, esses três pontos de vista se entrelaçam e se complementam. Neste livro, o aspecto analítico é praticamente não-existente, a divisibilidade se resume ao fator $x - a$ e a Álgebra, que predomina, é incipiente.

A motivação inicial, apresentada na abertura do capítulo é artificial. A troco de que se fala no volume de um cubo cuja aresta é $x + 2$?

A definição de polinômio, como "a expressão que define a função polinomial" não é feliz.

Logo no começo do capítulo há um erro grave. Com um fraseado ambíguo, o polinômio nulo é definido como aquele que assume o valor zero para todo valor de x e daí, sem nenhuma explicação, o livro conclui que seus coeficientes são todos iguais a zero. Duas páginas depois, polinômios idênticos são definidos como aqueles que assumem o mesmo valor para todo x e, novamente sem explicação, conclui-se que seus coeficientes são iguais. Isto é uma propriedade fundamental. O livro poderia até optar por não prová-la (o que não consideramos recomendável). Mas de modo algum deveria tratá-la como óbvia conseqüência de uma redação obscura.

Na página 173, a frase "se $p(\alpha) = 0$ então o número α é raiz do polinômio $p(x)$" parece ser a definição de raiz. Mas está redigida sob forma de uma implicação lógica. (Em vários outros lugares na coleção este modo inadequado de formular definições é encontrado.)

A última afirmação destacada na página 190 é tautológica logo dispensável.

A pesquisa das raízes racionais de uma equação com coeficientes inteiros é feita com base numa regra peremptória, sem nenhuma justificativa ou pelo menos uma desculpa. Este tipo de atitude deve ser evitado pois dá uma falsa idéia de como se faz Matemática.

Ao estudar a função polinomial, o livro deveria ter apresentado gráficos de algumas delas, pelo menos para que o aluno percebesse a diferença entre os casos de grau ímpar e grau par. Então ficaria claro que toda equação algébrica de grau ímpar e coeficientes reais possui ao menos uma raiz real.

A nota histórica da página 208 é correta. Mas não há no texto (nem na nota) referência à resolubilidade por radicais das equações de grau superior ao quarto. Uma deficiência ainda mais grave é a falta de menção aos métodos numéricos, a fim de que o aluno ganhasse a percepção de sua eficiência em contraste com a enganosa ilusão das fórmulas fechadas.

Capítulo 6. Estatística

Este capítulo é melhor que os similares nas outras coleções. Considerando que o objetivo é fornecer noções elementares de estatística aos alunos do ensino médio, o livro cumpre seu objetivo. Ensina como coletar dados e arrumá-los em uma tabela, ensina a calcular freqüências absoluta e relativa, mostra como interpretar dados em uma tabela. O livro mostra os gráficos estatísticos usuais com exemplos pertinentes: gráfico de segmentos, gráfico de barras e gráficos de setores. As medidas de tendência central estão bem exemplificadas e a variância e o desvio padrão estão bem apresentados.

Ficou faltando a natural conexão com probabilidades. Não só explorando mais os exemplos apresentados como estimando probabilidades através de experiências repetidas muitas vezes.

Capítulo 7. Introdução aos limites

Este capítulo e o seguinte, que encerram o volume e a coleção, contêm uma apresentação introdutória do Cálculo Diferencial, como prelúdio ao estudo que o aluno fará na universidade.

A inclusão do Cálculo no currículo matemático do Ensino Médio é um assunto debatível. Colocado entre os temas estudados nesse nível, principalmente por influência do matemático alemão Felix Klein, ele fazia parte do antigo Curso Complementar (correspondente ao 2º e 3º anos do Ensino Médio atual) nas escolas brasileiras, onde foi ensinado, junto com noções de Cálculo Integral, até a reforma de 1943. Na reorganização do ensino em Ginásio e Colégio, caiu o Cálculo Integral, permanecendo o diferencial até nova mudança, quando deixou de haver um currículo nacional obrigatório. Então desapareceram também as derivadas; porém pouco a pouco elas estão voltando a ser incluídas no 3º ano do Ensino Médio.

O Cálculo é um assunto fascinante, principalmente por suas notáveis aplicações à Física, à Geometria e, cada vez mais, a outras áreas como Biologia, Economia, etc. Sua apresentação rigorosa está certamente fora do alcance do aluno médio das escolas, pois requer um grau de abstração elevado para o raciocínio. Assim sendo, para ser objeto de estudo nesse nível, a ênfase maior deve recair nos aspectos de manipulação e aplicações, principalmente estas últimas. A manipulação deve ter um caráter auxiliar, na medida em que seja indispensável para as aplicações.

As aplicações que podem ser feitas a nível do Ensino Médio são muitas e podem ser extremamente atraentes. Só para citar algumas: gráficos de funções, problemas de máximos e mínimos, movimento (velocidade, aceleração, etc.) e as várias manifestações do crescimento exponencial.

O grande dilema do ensino do Cálculo a nível médio situa-se na conceituação. Admitindo que a fundamentação rigorosa dos conceitos (basicamente topológicos) está fora de cogitação nesse contexto, o problema reduz-se a uma questão de senso didático, bom gosto, equilíbrio e, acima de tudo, a honestidade intelectual que consiste em dizer a verdade sem ser obrigado a dizer toda ela. O êxito da tarefa vai estar na eficiência surpreendente das aplicações, justificando o uso adequado da intuição. A situação aqui é análoga à do ensino da Aritmética nos 4 primeiros anos escolares.

Vejamos então como este livro se sai da empreitada.

O Capítulo 7 abre com seis exemplos que visam dar ao leitor uma primeira idéia do que seja limite. Os três primeiros desses exemplos são vagos, imprecisos e erram o alvo. Os três últimos tratam de situações significantes mas não tocam no ponto fundamental, no cerne da questão, deixando ainda no ar a noção de aproximação, pois não tratam das desigualdades ou comparações que a caracterizam.

Em seguida, ao tentar ser mais preciso, o livro continua igualmente vago, pois nas explicações que dá para as igualdades $\lim(1/n) = 0$ e $\lim[n/(n+1)] = 1$ simplesmente diz: "observamos que, à medida que n cresce indefinidamente (tendendo ao infinito) o termo $a_n = 1/n$ (ou $a_n = n/(n+1)$) tende a zero (ou vai tendendo a 1)".

Seria fácil explicar melhor. Como seria fácil justificar por que $a > 1 \Rightarrow \lim a^n = +\infty$, o que o livro não faz (só afirma).

O exercício resolvido da página 247 está mal explicado, como também a afirmação, no alto da página 249 sobre $0{,}333\ldots = 1/3$.

Fica difícil explicar que $\lim(1+1/n)^n = 2{,}718\ldots$ quando se vê que o centésimo termo desta seqüência ainda é 2,7048. Seria mais convincente usar a série que define e, cuja convergência é muitíssimo mais rápida. Exemplo muito mais convincente ainda seria o de calcular $\sqrt{10}$ (por exemplo) começando com $x_1 = 4$ e pondo $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$. Aí a convergência é muito rápida mesmo.

Em suma, os exemplos apresentados não ilustram adequadamente o conceito de aproximação, por isso não ajudam muito a entender a idéia intuitiva de limite.

Ao abordar o limite de uma função, o livro continua vago. Em particular, não menciona o domínio da função e, conseqüentemente, não pode fazer (e não faz) a importante observação segundo a qual, em todos os casos relevantes de limite, na expressão $\lim_{x\to a} f(x)$, o ponto a não pertence ao domínio de f.

A definição de função contínua é formulada de tal modo que uma função é descontínua em *todos* os pontos que não pertencem ao seu domínio.

O único exemplo concreto de limite de uma função num ponto que não pertence ao seu domínio é $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x/x) = 1$, o qual só é válido se x é a medida de um arco em radianos. A demonstração dada usa a desigualdade $x < \operatorname{tg} x$, que não é óbvia de maneira alguma. Seria muito mais convincente usar uma desigualdade entre áreas, mas o livro não poderia fazê-lo pois, ao estudar a Trigonometria tão extensamente, não se estabeleceu a fórmula da área do setor circular em função do arco subtendido. Além disso, a demonstração usa a continuidade de $\cos x$ no ponto $x = 0$, o que não foi provado nem mencionado antes.

O curioso é que, após usar a continuidade de $\cos x$ no ponto $x = 0$ para provar que $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x/x) = 1$, duas páginas depois este limite é usado para provar aquela continuidade, da qual a continuidade de $\operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$ se segue pois $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, sem precisar conhecer $\lim(\operatorname{sen} x/x)$. Portanto a seção intitulada "Algumas aplicações importantes do limite fundamental trigonométrico" fica inteiramente esvaziada.

Ao lado de $\lim(\operatorname{sen} x/x)$, outro limite importante é $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$, motivo pelo qual a função exponencial de base e merece grande destaque. Ele não é sequer mencionado. Também não são mencionados limites de somas (séries numéricas). Em particular, aqui seria o lugar certo para justificar as manipulações feitas com a série geométrica, que foi considerada no Volume 1 e que envolve, de modo essencial, a noção de limite. Mas nada é dito sobre o assunto.

Capítulo 8. Introdução ao estudo das derivadas

As derivadas são estudadas de modo extremamente breve. A única aplicação relevante é a velocidade de um ponto móvel, considerada pelo livro como $\frac{ds}{dt}$, onde s é o comprimento do caminho percorrido pelo móvel, decorrido o tempo t. Esta noção de velocidade não é a usual, a menos que o movimento seja retilíneo e o deslocamento se dê sempre na mesma direção.

É feita a interpretação geométrica da derivada e as regras de derivação conhecidas são apresentadas de modo peremptório. Nem ao menos a derivada de $\operatorname{sen} x$ é calculada, o que seria fácil já que se tem $\lim(\operatorname{sen} x/x)$. Ficam os mistérios pendentes sobre como surgiram aqueles resultados. Por exemplo: por que a derivada de $\ell n\, x$ é $1/x$? A regra da cadeia e a derivação da função inversa são apenas resultados apresentados. Nada de explicação. São resolvidos e propostos alguns problemas rotineiros sobre máximo e mínimos e uns poucos gráficos simples são esboçados.

Uma nota histórica de sete linhas menciona a origem do Cálculo de modo inteiramente incompleto, chama Cauchy de Carechy e não menciona Newton.

Este capítulo é falho dos pontos de vista conceitual e manipulativo. Além disso é muito pobre em aplicações.

Observação final sobre o volume 3

Falta de objetividade no tratamento dos temas, pouquíssimas aplicações e conceituação deficiente. Estilo muitas vezes peremptório. Não oferece oportunidades ao aluno para exercer espírito crítico, imaginação nem criatividade.