*Giovanni e Bonjorno*

# Coleção Matemática 2º Grau – volume 1

## Introdução

Neste livro, ao contrário do que devia acontecer, se perdem as oportunidades de tornar a Matemática desafiadora e instigante para o aluno. De acordo com ele, as atividades matemáticas que cabem ao aluno são aplicar fórmulas e receitas, e fazer contas. Não é tarefa do aluno traduzir matematicamente uma situação-problema proveniente da realidade, ou mesmo oriunda do desenvolvimento da própria Matemática. Não cabe ao aluno enfrentar uma situação nova, ou concluir de maneira racional uma propriedade de natureza geral, por mais simples que seja. Ao longo da análise detalhada, encontraremos vários exemplos desta atitude, mas por ora vamos dar um exemplo típico.

Na pág. 19, o fato de que o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos tem $2^n$ elementos é uma "observação" (!), e não um teorema, ou uma propriedade que se justifica matematicamente. O enunciado do fato é apenas seguido de: "... assim, observando o exemplo ...", e segue-se um (único!) exemplo, com um conjunto com 3 elementos, isto é, $n = 3$. Como nesse exemplo, o conjunto das partes tem 8 elementos, "conclui-se" que a fórmula é $2^n$. O aluno poderia perfeitamente achar que a fórmula fosse $n + 5$. Logo em seguida, vêm os únicos "problemas" a esse respeito: o exercício 2 da pág. 20: "Determine o número de elementos de $P(A)$, quando: ...", com 4 exemplos em que se deve aplicar a fórmula, e o exercício 3, em que se dá o número de elementos do conjunto das partes igual a 2048, e pede-se o número de elementos de $A$.

Na realidade, a fórmula é que é o único problema interessante aqui, um problema aliás rico de idéias e perfeitamente abordável no Ensino Médio. "Quantos elementos tem o conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos" deveria ser um problema, e depois um teorema. O aluno poderia ser desafiado a trabalhar em vários exemplos (e não apenas um), e a partir daí conjecturar a fórmula. Num segundo momento, ser desafiado a justificar a fórmula, o que poderia ser feito, por exemplo, por um raciocínio do tipo indutivo: se $p(n)$ for o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto com $n$ elementos, então $p(n + 1) = p(n) + p(n) = 2p(n)$, já que, quando se acrescenta um elemento ao conjunto, as partes ficam naturalmente divididas em dois grupos: aquelas às quais o novo elemento pertence e aquelas às quais o novo elemento não pertence, cada um dos quais com $p(n)$ elementos. Outros métodos poderiam também introduzir novas idéias e novas técnicas de resolução de problemas, como, por exemplo, em cada parte, rotular os elementos de $A$ com $S$, se pertencem à parte, e $N$, se não pertencem, o que conduz diretamente ao resultado de $2^n$.

Este procedimento repete-se praticamente sempre, como veremos no decorrer da análise detalhada, à qual passamos agora. Os erros encontrados nos exercícios e os erros ortográficos encontram-se nos Apêndices.

## UNIDADE 1: CONJUNTOS

### Capítulo 1. REVISÃO

A Unidade se inicia com uma Revisão. A idéia de começar por uma revisão é boa, pois facilita o trabalho do professor. No entanto, a Parte A (Cálculo Numérico) e, principalmente, a Parte B (Cálculo Algébrico) consistem num festival de carroções, de utilidade apenas para manipulação. Dos 90 exercícios de revisão, apenas 14 (parte C: números de 57 a 66 e parte D: números 84, 85, 89 e 90) são problemas.

Na Parte B, há pouco cuidado nos enunciados e (nas respostas) com as restrições sobre as variáveis.

### Capítulo 2. CONJUNTOS

Deve ser observado inicialmente que não é feita nenhuma ligação entre as propriedades dos conjuntos e as leis da Lógica, o que é uma falha. Vamos destacar agora outros pontos negativos deste capítulo.

Na pág. 16, após "Observe os conjuntos ...", segue: "Daí define-se: dois conjuntos são iguais quando ...", com o "daí" dando a impressão de que a definição é uma conclusão das observações.

Na pág. 17, os autores introduzem os "principais símbolos lógicos", que "utilizaremos com freqüência": $\exists$, $\forall$, etc. (total de 6 símbolos). Cinco destes símbolos não são usados em momento algum do capítulo, inclusive nos exemplos que ilustram este texto. Além disso, nas poucas vezes que são usados em outros capítulos, quase sempre o são de modo inadequado, como, por exemplo, na pág. 60:

$$(\forall\, x_1, x_2,\ x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

em vez de

$$(\forall\, x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Na pág. 18: "Adotaremos: vazio contido em $A$". A convenção usual é adotada sem nenhuma motivação, sem nenhuma explicação, perdendo-se a oportunidade de discutir uma questão de lógica que ocorre freqüentemente em Matemática, a da "implicação vazia".

Na pág. 24, é citada a propriedade do número de elementos da união, a qual só é válida para conjuntos finitos, mas isto não é mencionado. Há, de modo geral no livro, pouco cuidado na apresentação de propriedades que dizem respeito a conjuntos finitos, nunca sendo mencionadas as restrições convenientes. O mesmo acontece mais adiante, por exemplo na pág. 43, a respeito do número de elementos do produto cartesiano.

Em que universo o livro situa a divisibilidade está longe de ser claro. Na pág. 16, o exemplo ilustrativo de conjunto vazio é: "números primos menores que 2". "Não há números primos menores que 2". Se a divisibilidade for encarada só nos naturais, isto é verdade. No entanto, o exercício 5 da pág. 18 fala em "divisores inteiros e positivos ...", o que mostra que o autor admite divisores negativos, e, neste caso, o exemplo dado para ilustrar o conjunto vazio não é vazio. Já na pág. 18, exercício 5: "Seja ... o conjunto dos divisores inteiros e positivos do número real $a$". O conceito de divisibilidade nos reais não têm interesse algum, já que todo real não nulo tem um inverso. Mas parece que os autores nem perceberam isto, pois a resposta está em inteiros.

Finalmente, note-se que não há nenhum esforço dos autores em propor exercícios para aumentar a capacidade de abstração dos alunos. Apenas o exercício 7 da página 27 propõe algum raciocínio abstrato. O próprio exercício 7 apresenta problemas de formulação. $A \subset (A \cap B)$ é verdadeiro ou falso? Para o autor é falso, embora seja claro que a afirmação será verdadeira se for $A = B$. Seria melhor ter perguntado se $A \subset (A \cap B)$ para quaisquer conjuntos $A$ e $B$, ou em que condições ocorre a igualdade.

## Capítulo 3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

A apresentação da existência de números irracionais (pág. 30) é inteiramente insatisfatória. "Consideremos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ e vamos determinar (!) sua representação decimal:". Seguem-se as primeiras 7 decimais destes números, sem nenhuma explicação, e: "Observamos que existem decimais infinitas não periódicas", "... que não podem ser escritas na forma $a/b$".

Como pode ser observado que existem decimais infinitas não-periódicas, simplesmente a partir das 7 primeiras decimais desses números? E como se sabe que não podem ser escritas na forma indicada?

Ainda nesta página, aparece o erro: "define-se o conjunto dos números reais como: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionais}\}$". Na realidade, não se sabe o que é um irracional antes de definir real.

Na pág. 32, nos exemplos sobre ordem nos reais, não há um único exemplo com $\leq$, que é o que justamente causa maior dificuldade aos alunos. Percebe-se, aliás, de modo geral, uma intenção de evitar dificuldades, omitindo-as.

Na pág. 32, ocorre um fato curioso. Em edições anteriores, aparecia a absurda definição de intervalo: "Chamamos de intervalo a qualquer subconjunto dos números reais". Talvez alertados sobre o erro, os autores mudaram para: "Chamamos de intervalo a determinados subconjuntos de números reais", o que não define nada. Ou se caracterizam os intervalos (como os subconjuntos dos números reais que contêm qualquer número que esteja entre dois de seus elementos), ou simplesmente se listam os diversos tipos de intervalos, e se menciona que esses são chamados de intervalos. Além disto, para a compreensão do que é um intervalo, seria importante dar exemplos de subconjuntos dos reais que não sejam intervalos, como o conjunto dos inteiros, por exemplo, o que não ocorre no livro.

Uma conseqüência desta má definição aparece logo na pág. 35, onde, ao final do exemplo, há o comentário: "neste caso, a reunião não é um intervalo, pois ..." (segue-se, aliás, uma mistura incompreensível de símbolos). Como os intervalos não foram caracterizados, fica impossível para o aluno saber por que $A \cup B$ não é um intervalo.

## UNIDADE 2: FUNÇÕES

### Capítulo 4. RELAÇÕES

Na pág. 43, ocorre mais uma vez o fenômeno que mencionamos na Introdução. A propriedade de que o número de elementos do produto cartesiano é o produto dos números de elementos dos fatores é apresentada como uma observação (!). Depois, vêm os exercícios 7 e 8, que são de mera aplicação desta fórmula. Por fim, os autores perdem a oportunidade de explorar situações como a do exercício 9, um problema de contagem que justamente poderia servir de motivação para a fórmula.

No exercício 4 da pág. 42, os autores conseguem calcular a área da figura formada pela união de 6 pontos e encontrar uma resposta diferente de zero. O mesmo ocorre no exercício 20, pág. 47, onde é dito explicitamente: "calcule a área da figura formada pela união dos pontos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ e $A$", e a resposta é 60.

Pág. 44: "Representa-se $AXB$ de 2 formas". Na verdade, a segunda só vale para conjuntos numéricos, e a distinção não é observada.

Pág. 44: Em mais uma "observação": "Como $A$ e $B$ são intervalos, o produto ... será o ... hachurado ...". Esta frase é verdadeira, mas impossível de ser entendida pelo leitor, já que os intervalos não foram caracterizados (ver comentário relativo à pág. 32). Como se pode então caracterizar seus produtos?

Pág. 45: Aqui aparece a definição de relação como conjunto de pares ordenados, sem nenhuma alusão ao sentido usual (abstrato) da palavra "relação" na linguagem comum. Isto terá conseqüências. Na pág. 48, para introduzir funções, os autores dizem: "... encontramos em Matemática relações entre duas grandezas variáveis ...", e aí as relações que aparecem são no sentido abstrato, ou seja, não aparecem como conjuntos de pares ordenados.

**Capítulo 5. FUNÇÕES**

Toda a introdução à idéia de função (pág. 48–50) é confusa. Como já foi observado (ver comentário relativo à pág. 45), o capítulo começa apresentando funções a partir de "relações" (no sentido comum da palavra), destacando corretamente a idéia de que "a cada valor de ... está associado um único valor de ...". Mas logo em seguida, a palavra "função" aparece na expressão "em função de", e logo se fala de "fórmula matemática desta função", ou seja, aparece um objeto "função" não descrito anteriormente. E não fica claro que a idéia de "fórmula matemática" não é essencial à idéia de função.

Entretanto, subitamente, funções tornam-se coleções de pares ordenados, com o único comentário de que: "Vamos agora estudar função, usando a teoria dos conjuntos, pois as colunas vistas nas tabelas ... representam conjunto numéricos". Em primeiro lugar, não há "teoria" alguma aqui. Apenas vai ser usada a abordagem conjuntista. Em segundo lugar, os diagramas de flechas aqui introduzidos só são utilizados em 8 das restantes 150 páginas da Unidade, deixando a impressão de que foram colocados aí apenas para cumprir um espécie de obrigação, mas que de fato não são necessários para resolver os problemas sobre funções.

Na pág. 49, afirma-se que $\pi = 3{,}14$ (não é aproximadamente igual; para os autores é igual!), e na pág. 52, aparece um consumo medido em km/$l$, quando consumo se mede em $l$/km.

Pág. 50: "... uma grandeza é função da outra ... a primeira depende da segunda. A cada valor da segunda grandeza corresponde um valor da primeira e, se a segunda muda, a primeira também muda". De acordo com esta concepção errônea, todas as funções seriam injetoras.

Pág. 53: Foi utilizada a nomenclatura "Conjunto de chegada", para relações, na pág. 46, e agora se usa "contradomínio", para funções. Já que funções foram apresentadas como relações particulares, cabia pelo menos um comentário.

Pág. 55: Na resolução do Exemplo 3 da pág. 55, está escrito erradamente que "$\sqrt{x-2}$ só é possível se $x - 2 > 0$".

Pag 56: Gráficos são apresentados em uma tabela com poucos pontos e a curva surge sem nenhum comentário.

Pág. 57: No Exemplo 2, marcam-se 5 pontos e conclui-se que o gráfico é uma reta, com a frase: "Como $D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = \mathbb{R}$, unimos todos (!) os pontos e o gráfico de $f$ é uma reta". No Exemplo 3, não há nada que justifique o aspecto do gráfico. No Exemplo 4, perde-se uma oportunidade de discutir o significado da concavidade. Poderia ser um excelente exemplo, se discutido adequadamente.

O exercício 5 da pág. 58 é muito interessante. No entanto, está relegado apenas ao lugar de último exercício de aprendizagem. Situações reais como esta é que deveriam ser melhor exploradas, em lugar de um predomínio de exercícios de manipulação.

Pág. 60–64: Os conceitos de função injetora, sobrejetora, par ou ímpar, crescente, etc., são introduzidos sem nenhuma motivação, sem nenhuma "conversa" prévia, como é o estilo habitual do presente livro. Idem para composta de funções. Além disto, misturam-se diversas classificações de funções, segundo pontos de vista totalmente diferentes. Por exemplo, o conceito de função par ou ímpar só se aplica a funções numéricas, enquanto o de injetora se aplica a qualquer função, mas isto não fica claro para o aluno. Há uma constante mistura das propriedades que são de funções em geral, e de numéricas em particular.

Na pág. 61, o quadro não está claro, pois falta a conjunção "e".

Na pág. 66: "A função $h(x)$ chama-se composta de $g$ com $f$". Deveria ser: "a função $h$".

Na pág. 68, escreve-se erradamente "$D = \text{Im}$ e $\text{Im} = D$", querendo significar: $D(f) = \text{Im}(g)$ e $\text{Im}(f) = D(g)$.

Na pág. 68, a respeito de inversa, surge uma "Observação importante:". Segue-se uma conversa sobre "correspondência unívoca", cuja única finalidade é acrescentar uma terminologia (em desuso) e que não será usada.

Pág. 68: "Processo algébrico para cálculo de inversa". Onde poderíamos ter um interessante problema temos mais uma receita de bolo.

Na pág. 69, o fato de os gráficos de $f$ e de $f^{-1}$ serem simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares é o produto da "observação" de dois pontos em um único exemplo, que ainda por cima é uma reta, e paralela à bissetriz!

### Capítulo 6. FUNÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU

Em todo o estudo a função polinomial do 1º grau e de seu gráfico (pág. 72–76), não há nenhuma alusão ao quociente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$, cuja constância é característica deste tipo de função. Também não aparece o termo "taxa de variação". Nenhuma menção é feita ao significado do coeficiente $a$ na expressão $f(x) = ax + b$. Nenhuma menção é feita às situações em que a função afim é adequada à modelagem do problema. Nenhuma aplicação relevante é feita.

Pág. 73: É confusa a classificação das funções afins, fruto da tentativa de correção das classificações inusitadas das edições anteriores do livro. Além disso, a função constante igual a zero não é linear para os autores.

Pág. 73: O enunciado do segundo exemplo traz o absurdo "... calcular $f(2)$ para todo $x$ real", fruto da tentativa de correção da estranha redação de edições anteriores.

Pág. 74: No enunciado do quarto exemplo, pode-se "expressar a função que representa seu salário mensal". Não é dito em função de quê.

Pág. 74: O exercício 1 induz o aluno a pensar que a função identidade não é linear, que a função constante não é afim, etc.

Pag 75: O fato de o gráfico de uma função afim ser uma reta é uma coisa que "se nota" a partir de cinco pontos marcados em um único exemplo. A mesma observação se aplica à função linear.

Pág. 77: Aqui há uma tentativa de apresentar aplicações. Nota-se a falta de cuidado dos autores, que jamais apresentam as suposições nas quais se baseia o modelo adotado. As fórmulas surgem não se sabe de onde ("o crescimento de uma planta é dado pela função $y = 4x$") e quase sempre estão erradas, pois os autores jamais se preocupam em discutir entre que limites são válidas. Assim, há uma planta cujo tamanho cresce sem limite, há uma equação de movimento em que os autores não se preocupam em explicar o significado das letras $s$ e $t$, etc.

Pág. 78: Gráficos não-usuais (uniões de semi-retas) surgem a partir da marcação de apenas dois pontos.

Pág. 80–81: A relação entre o sinal do coeficiente $a$ na expressão $f(x) = ax + b$ e o crescimento da função é um fato experimental (o usual "observamos"), obtido a partir de dois exemplos. Mais uma vez, perde-se a oportunidade de uma discussão que é básica, em termos de funções numéricas em geral, e em particular para funções polinomiais do 1º grau.

Pág. 80: Nos exercícios em que se parte do gráfico para a fórmula, fazem falta exemplos com "várias sentenças".

Pág. 83: Querendo afirmar que $f(x) > 0$ para $x > 2$ os autores escrevem $f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$. O erro se repete cinco vezes, nesta página e nas seguintes. Essa confusão entre elementos e conjuntos é uma constante no livro. Aliás, quase sempre que os autores determinam quando $f(x) = 0$, a indicação é de um conjunto de valores de $x$, como ocorre nas páginas 85 e 115, por exemplo.

Pág. 87–92: Este trecho inclui uma série de receitas, desnecessárias e desacompanhadas de qualquer comentário prévio, sobre Sistemas de Inequações, Inequações Simultâneas, Inequações Produto, Inequações Quociente, Inequações do tipo $(ax + b)^n$, ... . Em particular, aparece a inédita distinção entre sistema de inequações e inequações simultâneas.

**Capítulo 7. FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU**

A apresentação da parábola e a construção do gráfico da função polinomial do 2º grau é totalmente insatisfatória. A concavidade e os gráficos são, como tudo no livro, frutos apenas da "observação". Aliás, é dito explicitamente: "para construirmos o gráfico da função quadrática ... vamos proceder da mesma maneira como fizemos para a função do 1º grau", ou seja, marcar alguns pontos em alguns exemplos, e concluir regras gerais. Não há nenhuma relação fundamentada com as características geométricas da parábola. A apresentação do vértice da parábola não tem relação com a forma canônica do trinômio, e as coordenadas do vértice são apenas afirmadas, perdendo-se mais uma vez a oportunidade de um estudo altamente ilustrativo, mesclando conhecimentos anteriores, álgebra e geometria.

O estudo do sinal do trinômio do 2º grau não utiliza a forma canônica, nem a forma fatorada de um trinômio com raízes reais. Aliás, estas formas nem aparecem.

Nota-se a total ausência de aplicações relevantes (problemas de máximos e mínimos, antenas parabólicas, trajetórias de cometas e projéteis, etc.). Também não se encontra nenhum exercício de modelagem, nem alusão ao modo de variação das taxas de crescimento das funções quadráticas.

Pág. 97: Sobre as tentativas de aplicações que aqui aparecem, valem as mesmas observações feitas a respeito da pág. 77. E o mesmo ocorrerá na pág. 109. Exemplo conspícuo é o exercício 6, onde é dada a fórmula do número de diagonais de um polígono de $n$ lados na forma de um trinômio do 2º grau (que seria um exercício fácil e rico de conteúdo), e o que se pede é determinar $d$, conhecendo $n$, para $n = 8$ e $n = 10$ (!). Mais uma vez se evidencia que, para os autores, a única atividade matemática que cabe ao aluno é aplicar uma fórmula e fazer as contas.

Pág. 99: Na função polinomial do 1º grau, só havia "zeros". Na do 2º grau, "zeros ou raízes". De qualquer modo, a "discussão" (sic!) da equação do 2º grau é feita a partir das fórmulas que dão a soma e o produto das raízes. Em particular, não se vê porque não há raízes quando o discriminante é negativo.

Pág. 103: Há uma observação para a construção de gráficos de funções quadráticas, que custa a crer que conste em um livro de Matemática: "Em alguns casos, não é necessário construir o gráfico tabelando a função ..." (!), "basta um esboço do gráfico ..., onde colocamos:

a concavidade para cima ou para baixo;

os pontos de interseção com o eixo $x$, se existirem".

Nenhuma menção é feita à forma da curva, à localização do vértice, ao crescimento, etc.

Pág. 117: A resposta do Exemplo 3 da pág. 117 é $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, uma das formas mais complicadas de escrever $\mathbb{R}$. E na resposta do 96d da pág. 127, aparece o inédito símbolo $\{\forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

Pág. 118: Mais uma vez, a curiosa distinção entre sistemas de inequações e inequações simultâneas. Ver pág. 87–88.

### Capítulo 8. FUNÇÃO MODULAR

Pág. 128: Na ilustração gráfica, fala-se em distância à origem, mas não aparece a origem no desenho. Isto também não fará diferença, porque a observação de que $|a|$ é a distância à origem do ponto de abscissa $a$, na realidade, nunca será usada.

A construção do gráfico da função modular ignora os "conhecimentos" adquiridos anteriormente sobre gráficos de funções afins, e o gráfico é construído a partir de cinco pontos.

Nenhuma das oportunidades para usar a interpretação geométrica de módulo como distância é aproveitada. A construção dos gráficos jamais explora propriedades de simetria ou translação.

### Capítulo 9. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Pág. 137: A idéia de introduzir a função exponencial por meio de um exemplo concreto (produção de uma empresa ao longo do tempo) é muito positiva. Porém, o exemplo escolhido é típico de expoente natural (número de meses), caracterizando mais uma progressão geométrica. Além disto, na prática, não é usual para produção de empresas um modelo exponencial, com aumentos anuais de 50%. O exemplo, aliás, não é explorado posteriormente.

Pág. 139: A discussão sobre o problema da definição de potência de expoente irracional é insuficiente, mas o simples fato de aparecer esta discussão já é um ponto positivo.

Pág. 141: Aparece uma receita: "para resolvermos uma equação exponencial, devemos transformar a equação … em igualdade de mesma base …". No entanto, em todos os exemplos abordados, os dados são preparados para que se chegue a esta forma de maneira explícita e sem uso de logaritmos ou de mudança de base. Não se faz nenhuma menção sobre se isto é sempre realizável. Uma equação do tipo $3^x = 2$ só vai aparecer na pág. 184, sob o título "Resolução de equações com o auxílio de Logaritmos", onde não é feita nenhuma menção a "equação exponencial". Dentro da visão geral dos autores, segundo a qual a atividade matemática é essencialmente de manipulação numérica, os setores da Matemática são compartimentados a partir das receitas envolvidas.

Além disto, uma vez que se chegue a uma equação do tipo $a^x = a^y$, nesse ponto os autores dispensam o conceito de função injetiva. Por que $a^x = a^y$ implica

$x = y$ ? Não há explicação. Simplesmente, no primeiro exemplo: "igualando os expoentes ...", e pronto, virou outra regra.

**Capítulo 10. FUNÇÃO LOGARÍTMICA**

Pag 151–152: Toda a apresentação de logaritmos é insuficiente. Contrariamente ao que foi feito para exponencial, agora nenhuma menção é feita sobre o problema da existência do logaritmo de qualquer número positivo em qualquer base positiva e diferente de 1. Em particular, a apresentação dos logaritmos naturais é ininteligível para um aluno. Mais uma vez, não são relacionados o logaritmo com a exponencial, nem as questões de existência com a sobrejetividade dessas funções.

Pág. 151: "A base muda de membro e carrega o $x$" pode ser considerado um exemplo de linguagem inadequada, confusa e representativa de uma mentalidade que valoriza o aspecto mecânico das contas.

Pág. 153: Os autores "mostram" que as bases devem ser positivas a partir do exemplo da inexistência do logaritmo de 5 na base $-7$. Naturalmente, em contexto análogo, o leitor poderá perfeitamente concluir que o logaritmo de 9 na base $-3$ é igual a 2.

Pág. 154: Propriedades muito simples de justificar, como $\log 1 = 0$, aparecem na 3ª linha de "observe os exemplos", sugerindo uma "má indução", quando na realidade a última linha poderia ser a justificativa. Já a 5ª propriedade (injetividade da função logaritmo, mas isto não é comentado), sai só de dois exemplos.

Pág. 157: Finalmente, aparece a primeira demonstração do livro: a propriedade de que o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos dos fatores.

Pág. 158: A propriedade do logaritmo de uma potência só é provada para expoente natural, e logo em seguida, é usada para o expoente $1/n$.

Jamais fica claro que igualdades do tipo $\log 2 = 0{,}3$ são apenas igualdades aproximadas. Isso cria inconveniências do tipo $\log_8 600 = 3$ (ou seja, $600 = 8^3 = 512$), no exercício 1d da página 165.

Na resposta do exercício 1b, pág. 167, não está clara a posição da assíntota. Aliás, assíntotas não são mencionadas. Os gráficos são construídos por pontos; jamais se aproveitam propriedades geométricas para a construção dos gráficos. O exercício 3 pede a construção dos gráficos de $y = \log_4 x$ e de $y = \log_{\frac{1}{4}} x$. Não se explora o fato de um dos gráficos poder ser obtido do outro por uma simetria em relação ao eixo das abscissas.

Pág. 183: A aplicação de logaritmos ao cálculo do número de algarismos de uma potência é boa. Mas a aplicação ao cálculo de uma raiz cúbica está totalmente ultrapassada pelas calculadoras.

Há um sério problema de ênfase. A impressão que se tem, do texto e dos exercícios, é que logaritmos não têm utilidade, fora de seu próprio contexto. Isto fica claro, por exemplo, no "estudo" de Cologaritmos, à pág. 163. De fato, cologaritmos são muito úteis para resolver exercícios sobre cologaritmos.

Nos exercícios de fixação, apenas a última meia dúzia usa logaritmos para resolver equações exponenciais.

**Capítulo 11. LOGARITMOS DECIMAIS**

Aparece aqui um capítulo dedicado ao uso de tábuas de logaritmos, assunto totalmente ultrapassado pelo desenvolvimento tecnológico.

No fim da pág. 174, há afirmação "é evidente que quando tomamos o número 200, que fica entre 100 e 1.000, seu logaritmo será um número que fica entre 2 e 3". Na realidade, isso é tão "evidente" quanto tomar o número 2, que fica entre $-3$ e 4, e concluir que o seu quadrado fica entre 9 e 16. Não há nenhuma ligação entre o fato citado e a monotonicidade da função logarítmica.

Pág. 175: As "definições" de característica e de mantissa são erradas. A contradição surge na primeira frase após a definição, pois se a mantissa é a parte não-inteira, como pode a mantissa ser zero?

Na página 176, os autores afirmam que como $\log 0{,}2 = -1 + 0{,}301$, a mantissa de $\log 0{,}2$ é 301, quando deveria ser 0,301. O mesmo ocorre na pág. 177, nas respostas do exercício 2 (itens a, b, c, d, e, f, g). O conceito de mantissa está errado. Se a mantissa fosse o que está no livro, e como $2{,}1 = 2{,}10$, teríamos $1 = 10$.

A propriedade da mantissa citada na página 177 não é apresentada como um teorema, e sim, como sempre no livro, fruto da observação de alguns exemplos.

Pág. 179: Para interpolar na tábua de logaritmos, admite-se uma proporcionalidade inexistente, sem jamais se deixar claro que se está fazendo uma aproximação. Apenas é dito: "devemos proceder da seguinte maneira".

Pág. 180: Finalmente, aparece no livro uma seção sobre o Uso de Calculadoras, o que é bem-vindo, embora pareça que calculadoras só possam ser usadas em logaritmos. Antes, não tinham nenhuma utilidade para as outras funções. Mas há, nesta seção, erros e omissões inaceitáveis.

A regra para calcular o logaritmo de um número positivo não se aplica, por exemplo, à maior parte das calculadoras de algumas marcas comuns no mercado.

Não há um único exercício de determinar o número, dado o logaritmo, como se as calculadoras fossem incapazes de calcular exponenciais.

Pág. 181: Na seção "Operações com Logaritmos Decimais", o Exemplo 1 é surpreendente. Para calcular $\log 2 + \log 3$, os autores recomendam que se procure na tábua os valores de $\log 2$ e de $\log 3$ e que se efetue a adição. E isto, imediatamente depois da seção “Uso da Calculadora”.

Pág. 181: No Exemplo 3, para fazer a conta $3 - 0{,}397940$ os autores fazem $3-1+1-0{,}397940 = 2+0{,}602060$. A frase final do referido exemplo é um modelo de obscuridade (“a subtração é efetuada através da adição dos cologaritmos no lugar do subtraendo”) (!), além de um bom exemplo de como não deve ser usada a palavra “através”. Algo análogo ocorre na pág. 182, para efetuar a divisão de logaritmos: “Para logaritmos de característica negativa, deve-se separar a característica da mantissa e tornar a característica um número divisível pelo qual se deseja dividir o logaritmo (!); para tanto, devemos somar à característica e à mantissa números simétricos”. (!)

Pág. 183: Em “Os Logaritmos e suas Aplicações”, depois de dizer que “os logaritmos hoje em dia são utilizados na Química, na Biologia, na Física, na Sociologia ... Vejamos alguns exemplos de suas aplicações.”, aparecem os dois primeiros exemplos: calcular (do modo que se fazia há mais de três séculos atrás) $\sqrt[3]{15{,}2}$ e $6{,}21^8$.

Pág. 184: No quarto exemplo aparece um inédito conceito financeiro, o de “montante de uma firma”. Como sempre, a fórmula cai do céu, e o verdadeiro exercício é: aplicar a fórmula. Mais uma vez, a calculadora é deixada de lado. Além disso, a resposta está errada. A resposta correta é: R\$ 1.772.946,53.

O quinto exemplo, que poderia ser interessante, é jogado, sem explicação do motivo de se usar pH.

Não há nenhuma aplicação que use logaritmos naturais. Quem estudar logaritmos por este livro, ficará certamente com a impressão de que logaritmos naturais não servem para nada.

## UNIDADE 3: PROGRESSÕES

### Capítulo 12. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Pág. 205: Embora a definição de sucessão reze: “Sucessão ... é toda função cujo domínio é um conjunto de número naturais”, não fica clara a ligação com o que o leitor supostamente sabe sobre função, já que não há menção nem de conjunto de pares ordenados, nem de correspondência, e nem mesmo de uma identificação do tipo: $a_1 = a(1)$, etc.

Pág. 206: Os exemplos dados tendem a levar a crer que há sempre uma fórmula para o termo geral. Seria necessário enfatizar exemplos de sucessões definidas por recorrência (como aparecem nos exercícios 6 e 255), e de outros tipos de sucessões, como a do número primos, por exemplo.

Pág. 209: A classificação das progressões aritméticas é extravagante: uma progressão aritmética não é crescente por ser uma seqüência crescente; é crescente, por definição, por ter $r > 0$ e não se faz nenhuma ligação com as noções de função crescente e decrescente, já vistas no mesmo volume.

O exercício 4, pág. 210, é altamente deseducativo. Para um corpo em queda livre, espera-se que o aluno "perceba", a partir de apenas três termos, que as distâncias formam uma progressão aritmética. Nenhuma discussão sobre o modelo de queda livre é feita, e se fosse feita, ficaria claro, como é sabido, que a distância percorrida por um corpo em queda livre não varia com o tempo segundo uma progressão aritmética, e sim segundo um modelo quadrático.

Na pág. 210, apesar da frase: "neste item demonstraremos ...", na realidade não é demonstrada a fórmula do termo geral de progressão aritmética. Ele é apenas conjecturado a partir de 4 exemplos, e indevidamente generalizado. E tratava-se de uma demonstração facílima.

Pág. 213: Usa a expressão "Termo do meio" indevidamente, primeiro sem distinguir se $n$ é ímpar. Em seguida, aparece o caso par, sem exemplo, e não deixa claro que $r$ não é a razão, o que confunde o aluno, pois a letra $r$ tinha sido usada sistematicamente para designar a razão das progressões aritméticas.

Pág. 216: A propriedade dos termos eqüidistantes é fruto da observação de um único exemplo! Interessante é que antes desta propriedade, já havia "observações que podem facilitar a resolução de problemas", com $x - r,\ \ x,\ \ x + r$. Os autores não perceberam a relação entre as duas coisas, deixando clara a dicotomia: macetes $\times$ propriedades, que perpassa o livro.

## Capítulo 13. PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Pág. 222: Tal como acontecia nas progressões aritméticas, a classificação das progressões geométricas é extravagante: uma progressão geométrica não é crescente por ser uma seqüência crescente; é crescente, por definição, por ter $q > 1$ e $a_1 > 0$ (ou $0 < q$ e $a_1 < 0$), e não se faz nenhuma ligação com as noções de função crescente e decrescente, já vistas no mesmo volume.

Se os autores definem progressões geométricas como seqüências de termos não-nulos, na pág. 222 deveria estar $q \in \mathbb{R}^*$.

Na pág. 224, ocorre, com as progressões geométricas, exatamente o mesmo que ocorreu na pág. 210 com as progressões aritméticas, isto é, o termo geral da progressão geométrica é apenas conjecturado a partir de exemplos, e indevidamente generalizado.

Na segunda observação da pág. 227, a expressão "produto entre eles" é, no mínimo, bastante original. A observação em si é fútil, pois está presente para resolver um único problema, o de determinar uma progressão geométrica de três termos conhecendo a soma e o produto dos termos. Além disso, é altamente duvidoso se a introdução de denominadores facilita as coisas.

Pág. 230–232: A apresentação de Limite da Soma dos Termos não é má. O exemplo geométrico introdutório é útil, e há o mérito de calcular o $S_n$, antes de passar ao limite, o que é feito discutindo corretamente a parcela que está tendendo a zero. Entretanto, a linguagem é contra-indicada: "pintar" é uma "operação", "soma de partes pintadas", etc. E a apresentação dos limites infinitos deixa muito a desejar. Sem mais nem menos, aparecem coisas como $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, e ainda se pergunta: "por quê?", para um aluno que provavelmente nunca viu este símbolo. No caso $-1 < q < 0$, podia ser dado pelo menos um exemplo, em vez de dizer: "analogamente, pode-se mostrar que ...".

As qualidades exibidas na página 231 são anuladas pela confusão feita entre $S_n$ e seu limite, nos exemplos da pág. 232.

Pág. 234: O livro dedica uma seção ao estudo do produto dos termos de uma progressão geométrica. Provavelmente não foi percebido que é mais fácil escrever os termos e multiplicá-los: aparece a soma dos termos de uma progressão aritmética no expoente de $q$ e aí basta usar o que se aprendeu no capítulo de progressão aritmética. Ao invés disto, ocorre aqui o mesmo que ocorreu com as progressões aritméticas na pág. 216, a respeito de termos eqüidistantes dos extremos.

A resolução do primeiro exemplo, pág. 235, contém um erro grosseiro. Após encontrar os valores de $x$, os autores, em vez de substituírem estes valores na equação do 1º grau do sistema, fazem-no na do 2º grau, introduzindo, assim, raízes estranhas. Encontram então duas "soluções" para o sistema: $x = 9$, $y = 6$ (na verdade, a única solução) e $x = 4$, $y = 4$ (falsa solução criada por imperícia). A partir daí, os autores se deparam com um problema: que fazer com a "solução" $x - 4$, $y = 4$, que daria origem a uma "progressão aritmética" de termos 12, 4, 4? Optando por sua atividade matemática preferida, a observação, concluem, fazendo desaparecer num toque de magia a "solução: $x = 4$, $y = 4$". "Portanto, vamos observar que os valores pedidos são $x = 9$ e $y = 6$."

Se os autores seguissem seus próprios conselhos, contidos nas observações para a resolução de problemas de progressões, o segundo exemplo da pág. 235 seria resolvido de modo bem mais simples.

A caracterização das progressões geométricas como seqüências nas quais é constante a taxa relativa de crescimento dos termos não é feita. Ou seja, os alunos jamais reconhecerão progressões geométricas quando elas aparecerem em contextos reais. Apenas se insinua tal fato em um único exercício (15, pág. 225), o qual, ainda por cima, está com resposta errada.

## COMENTÁRIOS FINAIS

O livro em questão não contribui positivamente para a aprendizagem da Matemática.

Em primeiro lugar, sua conceituação muito fraca. Como se pôde ver através da análise detalhada, ele apresenta erros conceituais, definições e notações inconvenientes, imprecisão, obscuridade, confusão de conceitos e até mesmo contradições. São encontrados erros na resolução de exemplos e de exercícios, erros de cálculo e de arredondamento, erros de linguagem.

Muitas vezes existe desconexão entre conceitos apresentados em uma seção e suas aplicações que surgem mais adiante, as quais muitas vezes nem são percebidas. Diversos conceitos, notações e técnicas são introduzidos, e nunca mais são utilizados.

O livro não estimula o raciocínio dedutivo, uma das características do pensamento matemático. Mesmo propriedades importantes e fáceis de justificar racionalmente são apresentadas como generalizações indevidas a partir de poucos exemplos, e às vezes até de um único exemplo.

Também não estimula o sadio raciocínio indutivo, onde uma questão é apresentada primeiro em casos particulares mais fáceis, provocando uma conjectura e gerando o desafio de demonstrá-la. Em vez disto, prefere-se apresentar uma fórmula ou uma receita, como uma "observação", e a tarefa própria do estudante é aplicá-las.

Há um número insuficiente de aplicações dos conceitos estudados, seja fora da Matemática, seja em outras áreas da Matemática. Poucas vezes essas aplicações aparecem como motivação inicial para uma certa idéia. Além disto, os supostos problemas de aplicações muitas vezes não passam de exercícios de manipulação, disfarçados de aplicações irreais.

Não há nenhuma menção à modelagem, tão importante no estudo de funções, e tão ilustrativa, mormente nos casos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

O estudo das funções afins e das funções quadráticas é extremamente superficial. Não se define parábola, não se citam suas propriedades geométricas e sua utilidade, não há aplicações relevantes a problemas de máximos e mínimos, não se apresenta a forma canônica da função quadrática, não se apresenta a fórmula de fatoração, não se relaciona o coeficiente $a$ da função afim $f(x) = ax + b$ com a sua taxa de crescimento.

É extremamente deficiente a parte de aplicações de funções, de logaritmos e de progressões. A Matemática Financeira, por exemplo, quase não é explorada, e quando o é, apresenta erros.

Todo o capítulo de logaritmos decimais e seu uso em tábuas é anacrônico, exceto pela seção de uso da calculadora, que é extremamente deficiente, e não é aproveitado, nem no próprio capítulo, nem em outras partes do livro. Não há nenhuma alusão ao uso de computador.

Finalmente, deve ser dito que este livro tem-se modificado ao longo de diversas edições, sem que este fato seja mencionado na ficha catalográfica. professor e os alunos podem estar adquirindo edições diferentes sem o saber, como aliás não o sabem as próprias livrarias. Acresce que, como se viu na análise detalhada, muitas vezes essas modificações conduzem a textos mutilados ou incompreensíveis.

Uma pergunta que fica é se algum aluno poderá gostar de Matemática, tendo estudado por um livro que lhes sonega as aplicações interessantes e a estrutura lógico-dedutiva da Matemática, dando a impressão que a Matemática reduz-se à aplicação de fórmulas misteriosas obtidas a partir da observação de uns poucos exemplos. Além disto, o presente livro pode estimular em alguns professores de Ensino Médio o mau hábito de refugiar-se atrás de um algebrismo mecânico e estéril, ao invés de enfrentar, junto com seus alunos, as questões desafiadoras que constituem a beleza e a utilidade da Matemática.

## APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios

Pág. 56: O exercício 5 pede o domínio de uma "expressão designatória", termo não mencionado antes.

Pág. 62: No exercício 2, além de uma chave que se fecha sem ter sido aberta, diz-se que $g$ é uma função não-sobrejetora. Na realidade, $g$ não é uma função.

Pág. 124: O exercício 6 pede o impossível: "determine, relacionando os elementos, o conjunto ...". Trata-se de um conjunto infinito não-enumerável.

Pág. 126: Nos exercícios 78 e 80 aparece o absurdo "vértice da função", confusão entre a função e seu gráfico.

Pág. 172: Falta de cuidado no enunciado do exercício 197 (e se $k = 2$?).

Pág. 179: O enunciado dos exercícios deveria ser: "Usando a tábua das páginas 187–190, determine:"

Pág. 181, exercício 5: É inexplicável que, dentro de um conjunto de exercícios de aprendizagem relativo à seção de Uso de Calculadora, apareça o seguinte exercício: "escreva o número 84 como uma potência de base 10, sabendo que $2 = 10^{0,301}$, $3 = 10^{0,477}$ e $7 = 10^{0,845}$."

Pág. 195, Teste 80: Aparece o incoerente "vértice da função"; se bem que se trate de uma questão de vestibular, os autores deveriam advertir os leitores que isto está incorreto.

Pág. 199: O teste de vestibular 130 é idêntico ao 120.

Pág. 212, exercício 22: Onde está "ao lado", deveria estar "abaixo". Parte do exercício refere-se a Progressões Geométricas. Além disto, todo o exercício é do tipo "adivinhação".

Pág. 215, exercício 3: Pleonasmo: "reais e inteiros".

Pág. 219, exercício 244: Estranho termo; "inscrevendo-se nove meios aritméticos ...".

Pág. 233, exercício 10: Enunciado não deixa claro que $q$ é a razão da progressão.

Pág. 236, exercício de fixação 270: Seria necessária a restrição $x > 0$. No exercício de fixação 271, aparece um micróbio de tamanho desprezível (!).

Pág. 241: No Teste de Vestibular 4, fala-se em "Interseções entre duas Funções", em vez de seus gráficos.

## APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios

Pág. 12: Exercícios:

42: E se $a = -b$? Além disso, o processo de solução está intrinsecamente errado.

43: O processo de solução está intrinsecamente errado.

44: E se $a = -b$?

45a: Se $b = -2a$, então $x$ pode ser qualquer.

45b: E se $b + a^2 - a = 0$?

53: E se $m^2 + 2mn = n^2$?

54: E se $m^2 = 2m + 1$?

62: É encontrada solução para um problema impossível. Erro grave, que denota uma confusão entre divisão de inteiros e divisão de reais.

89: É omitida uma segunda solução.

Pág. 42: 4c

Pág. 26: Na solução do exercício 3b, usa-se a palavra "entre" incluindo os extremos, constrariando o que é feito em outras partes do livro, como, por exemplo, na pág. 29 ("entre dois inteiros nem sempre existe outro inteiro").

3c (considera 0 positivo).

Pág. 31: 1h

Pág. 37: A resposta do teste de vestibular número 5 está correta se considerarmos pares e ímpares como subconjuntos dos inteiros, contrariando o que o livro faz sistematicamente - considerar pares e ímpares subconjuntos dos naturais.

Teste de vestibular número 20: usa o conjunto $C$ não apresentado no texto.

Teste de vestibular número 22: apresenta mais de uma resposta correta.

Pág. 54: Aqui (exercício 3) surge um erro que se repete em várias partes do livro; por exemplo, exercícios 10, 11, 12, 13 e 15 da pág. 67; exercício 5 da pág. 69; exercício 3c da pág. 85; exercício 3 da pág. 99; exercícios 1, 5 e 10, da pág. 101. Pede-se o cálculo dos valores reais de $x$ e a resposta é um conjunto. Tal erro é uma marcante característica do livro, aparecendo dezenas de vezes. Aparecem na pág. 110 e nos exemplos 1, 2, 3 e 4 das págs. 114–116, coisas do tipo $f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \dots\}$. Surpreendentemente, no Exemplo 5 há uma frase bem construída: $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A maior parte das respostas dos exercícios da página 116 comete este erro. Idem nas páginas 119 e 122. A característica confusão aparece nos exercícios 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 99, 101, 102, 103, 105, 106, 108 e 111, das págs. 126–127. Também na pág. 117, depois de definir o que seja resolver uma inequação (determinar os valores reais de $x$ que ...), resolvem-se inequações e as respostas são conjuntos. Na pág. 149, exercício 135, aparece novamente a confusão entre números e conjuntos de números. Desta vez, a soma das soluções de uma equação, ou seja, uma soma de números, é igual a um conjunto. Tal erro aparece também nos exercícios 134 e 151.

Pág. 60: A resposta do exercício 2b está errada.

Pág. 71: No exercício 36, falta a restrição $h \neq 0$.

A resposta oferecida para o exercício 39b é que o domínio da função é vazio, contrariando a definição de função dos autores, que exige $A$ e $B$ não-vazios.

Pág. 85: No exercício 2, o lucro é dado por $L = 4x - 1000$, onde $x$ é "a quantidade de produtos vendidos", ou seja, $x$ é um número inteiro positivo (tanto que se pergunta qual o valor mínimo de $x$ para que haja lucro, e a resposta é 251). Mas o exercício está no contexto de números reais, com gráficos que são retas. Era necessário chamar a atenção para este ponto, estando aqui uma oportunidade para relacionar funções afins com progressões aritméticas.

Pág. 78: A resposta do exercício 5b está errada. Confusão entre as conjunções *e* e *ou*, o que, aliás, ocorre muitas outras vezes nesse livro.

Pág. 87: Exercício 4.

Pag 93: A resposta do exercício 3 não faz sentido. Confusão entre $(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$.

Pág. 94, exercício 48: Resposta errada e contradizendo as definições dos próprios autores. Os domínios destas funções não consistem de todos os reais, logo não podem ser afins ou lineares.

Pág. 101, exercício 5: Deveria ser $m < -1$ ou $-1 < m < -\dfrac{5}{6}\cdot$

Pág. 104: Exercícios 2d e 3.

Pág. 107: A resposta do exercício 6a mostra, mais uma vez, que os autores confundem as conjunções *e* e *ou*. O enunciado do exercício 6 também deixa a desejar, já que confunde a função com o seu gráfico.

Pág. 122: Exercício 3.

Pág. 125–126: A equação do exercício 96 é muito ruim "determine com intervalos", e os próprios autores não dão a resposta sob a forma de intervalos.

A resposta do problema 108 não faz sentido. Os autores, mais uma vez, confundem $(p \wedge q) \vee r$ com $p \wedge (q \vee r)$.

Exercício 111: Resposta errada.

Pág. 129: Os exercícios 2a e 2c pedem: "escreva em forma de intervalo" conjuntos que não são intervalos. Nas respostas, a união de conjuntos parece ter sido esquecida, pois aparecem conjuntos como $]-\infty, -2[$ ou $]2, \infty[$.

Pág. 135: O Exemplo 1, bem como os exercícios 1a, 1b e 1c estão errados. Mais uma vez, confusão entre as conjunções *e* e *ou*. Idem na pág. 154, exercício 4.

Pág. 145: Exercício 1d.

Pág. 149: Exercício 129b.

Pág. 159: Exercício 4.

Pág. 167: Exercício 2b.

Pág. 172: Exercícios 177, 194 e 218.

Pág. 180, exercício 1a: As tábuas não permitem obter tantos algarismos significativos. Há erro nos exercícios 1e, 2c, 2g.

Pág. 181: Erradas as respostas dos exercícios 1f, 2a, 2b, 2e, pois há erro de arredondamento no final, o que, aliás mostra que as outras só estão certas por acaso. Também não se compreende porque algumas respostas são apresentadas com 5 decimais, e outras, com 6.

Pág. 183: As respostas dos exercícios 1, m, o, q, r estão erradas. Qualquer aluno que procurar esses resultados na calculadora vai ficar surpreso quão longe estão algumas das respostas apresentadas.

Pág. 184: Exercícios 1b, 1d, 1g, 3.

Pág. 185, Exemplo 4: O correto é 28,01 anos.

Pág. 186: Exercício 2a.

Pág. 191: Nos testes de vestibulares, erros nos testes de números 30, 32, 41, 42, 65, 69, 71, 98 (apresenta várias alternativas corretas), 165 e 166.

Pág. 211: Exercício 12b.

As respostas dois dois exemplos da pág. 214, bem como as dos exercícios 3 e 10 da pág. 215, sugerem que uma progressão aritmética seja um conjunto de números, e não uma seqüência de números.

Pág. 218: Exercício 11.

Pág. 219: Exercício 23.

Pág. 225: Exercício 15.

Pág. 230: Exercício 7.

Pág. 233: Erradas as respostas dos exercícios 8b e 10. As respostas dos exercícios 1e e 1f, pág. 233, estão gravemente erradas, levando o aluno a pensar que o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica exista, mesmo que a razão não esteja compreendida entre 0 e 1.

Pág. 236: Exercício de fixação 277.

Pág. 238: Teste de vestibular 188.

Pág. 241, Questão de Vestibular 4: a resposta indica apenas os valores de $x$.

## APÊNDICE 3: Erros de datilografia ou impressão

Pág. 31, Exercício 2e: aparece $Z-$ onde deveria ser $Z^-$.

Pág. 46, Exercício 2c: Está $y'$ onde deveria estar $y$.

Pág. 83, Exemplo 1: Está escrito $a + 2 > 0$ em vez de $a = 2 > 0$.

Pág. 87, no exemplo: Troca de sinais de maior que e de menor que.

Pag 149, Exercício 129a: Erro de parênteses.

Pág. 206: Exercício 1.

Pág. 223: Desaparece o lado esquerdo da igualdade $10x^2+12x = 9x^2+12x+4$.

Pág. 231: “capa_azul1.pm6.5”.

Pág. 241: Enunciado do teste 86.

*Giovanni e Bonjorno*

# Coleção Matemática 2º Grau – volume 2

## UNIDADE 1: TRIGONOMETRIA

### Capítulo 1. A Trigonometria no triângulo retângulo

A idéia de começar o ensino da Trigonometria pelo triângulo retângulo é usual e é de fato a mais conveniente. Permite chegar rapidamente a aplicações simples e motivadoras, sem as complicações que cercam os conceitos mais elaborados de ângulo. Coerentemente com isto, os exercícios deste capítulo são bons.

No entanto, há vários problemas sérios a assinalar.

1) Os valores dos senos, co-senos e tangentes que aparecem são apresentados em aproximações pobres ou até mesmo erradas: p. 11, $\text{tg}\ 16° = 0{,}29$ (e não 0,28); p. 12, exerc. 2, $\cos 40° = 0{,}77$ (e não 0,76); p. 13, exerc. 5, $\text{tg}\ 17° = 0{,}31$ (e não 0,30). Mais importante ainda: nada é comentado sobre o fato de esses valores serem aproximados. Também não há nenhuma insinuação de como poderiam ser calculados (experimentalmente, por exemplo) tais valores. Mais uma vez, não há nenhuma menção ao uso de calculadora.

2) É surpreendente que aqui não seja sequer comentada a relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, mormente porque quando esta relação aparece (Capítulo 5, p. 60), ela é deduzida por uma figura no 1º quadrante (portanto para um ângulo agudo). O mesmo vale para $\text{sen}(90° - x) = \cos x$.

3) Na p. 13: A célebre tabelinha com senos, co-senos e tangentes de 30°, 45° e 60° é destacada em uma seção à parte (Seção 4) e apresentada como: “Uma tabela de valores muito importante”. Na realidade, esta tabela relaciona-se com o hábito de decorar “macetes” para provas e vestibulares, e o destaque que lhe é dado é altamente deseducativo.

4) Na Introdução (p. 9), lê-se: “Purback fez a primeira tábua no séc. XV”. Na realidade, os autores devem estar querendo referir-se a George Peuerback (1423–1461) de Viena, que traduziu o Almagesto diretamente do grego, livrando-o de erros introduzidos em traduções e cópias sucessivas, e que

construiu tabelas de senos mais precisas. Mas, já no século II, Ptolomeu, no capítulo II do Almagesto, construíra tabelas não propriamente de senos, mas de cordas de arcos duplos. E, no século V, os astrônomos hindus construíram tabelas de senos.

**Capítulo 2. Conceitos básicos**

Imediatamente após a trigonometria do triângulo retângulo, os autores passam à generalização dos conceitos de ângulo e arco, para introduzir as funções trigonométricas no círculo. Reconhecemos que o conceito de ângulo é um dos mais sutis da Matemática elementar, e que a maioria dos autores de livros didáticos não consegue lidar bem com arcos e ângulos no círculo trigonométrico. De qualquer modo, a conceituação que encontramos neste livro é trágica. Os autores não deixam claro o que é unidade, o que é medida, o que é comprimento de um arco. Sente-se uma pressa em livrar-se desses conceitos incômodos e passar logo para a regra de três dos exemplos da p. 19, e cair na calculeira. Conceitos até então inusitados para o aluno, como "ângulos" maiores que uma volta, aparecem sem nenhuma explicação (p. 25).

A conceituação errônea ou confusa fica patente em frases tais como:

P. 17: "Utilizando as mesmas medidas para um arco unitário (arco de medida igual a 1) e seu correspondente ângulo central, dizemos que as medidas do arco e do ângulo central que o determinam são iguais."

Seguida de: "Note que a medida de um arco não representa a medida do comprimento desse arco." (!!) Esta observação é aliás feita antes de dizer o que é comprimento de arco, que só vem na p. 21, em outra seção. A apresentação de Arco de Circunferência é tão confusa que no final da p. 16 aparece $A = B$ com $AB \neq BA$.

Na p. 21, além do estranho "arcos semelhantes" (?), aparecem absurdas igualdades entre segmentos $AB$ e $MN$ e os arcos $AB$ e $MN$.

P. 23: "Todo arco de uma circunferência orientada chama-se **arco orientado**" (sic). Também nesta página, na figura do "arco nulo", não se compreende o que está em vermelho.

P. 24: "Os quadrantes do ciclo (sic!) trigonométrico apresentam as seguintes variações em graus e radianos (sic): ...".

Como conseqüência dos mencionados erros conceituais, aparecem coisas absurdas ou estranhas, tais como:

Nos exercícios 1 e 2 da p. 24, igualdades como $-45° = \dfrac{7\pi}{4}$ rad, $-\dfrac{5\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3\pi}{4}$ rad, etc.

Na p. 29, exerc. 8: encontramos o conceito: "Três ângulos consecutivos ..." (??).

Na p. 29, exerc. 14: encontramos o "ângulo central de $12\pi$ rad" (!).

Sistematicamente é dito que os arcos subtendem os ângulos centrais, ao contrário do usual.

Deve-se registrar que os problemas do capítulo são bons, embora de nível muito superior ao dos exemplos.

**Capítulo 3. As funções circulares**

1) Não há muito o que errar nas definições das funções circulares. No entanto, na definição de co-tangente (p. 45), além de o eixo das co-tangentes surgir sem motivação, o fato de ser $\text{cotg}\ x = 1/\,\text{tg}\ x$ é apresentado sem o cuidado devido, o que pode levar o leitor a pensar que, como tg $90°$ não existe, cotg $90°$ também não exista.

Além disto (p. 43), os autores conseguem concluir o domínio da função $y = \text{tg}\ x$ a partir do gráfico da mesma no intervalo $[0, 2\pi]$ e antes de qualquer consideração sobre a periodicidade da função. O mesmo se passa com a co-tangente (p. 46).

Para mostrar que $\sec x = 1/\cos x$ (com $\cos x \neq 0$) os autores dizem (p. 48) que esta relação pode ser obtida utilizando a semelhança de triângulos, sem que seja indicado quais são estes triângulos.

2) Já a apresentação dos gráficos não está boa.

Os gráficos das funções circulares não são construídos, e nem mesmo exibidos, para $x$ negativo.

Não está claro também o que acontece quando o ângulo é em graus (fruto ainda das confusões conceituais do capítulo anterior).

Uma característica constante deste capítulo é o não-aproveitamento de simetrias, translações e outros argumentos geométricos na construção dos gráficos. Por exemplo, os autores constróem por pontos o gráfico da função $y = 2\,\text{sen}\,x$, imediatamente após terem feito o gráfico de $y = \text{sen}\,x$, não aproveitando o gráfico que acabaram de construir. O mesmo fazem nos três exemplos da página 34, de construção dos gráficos de $y = 2 + \text{sen}\,x$, $\ y = \text{sen}\,2x$ e $y = |\,\text{sen}\,x + \pi/2|$. Na p. 40, são também construídos por pontos os gráficos das funções $y = 3\cos x$ e $y = \cos x/2$, e isto imediatamente após ter sido construído o gráfico de $y = \cos x$.

Pior que isto, os autores ignoram estas relações geométricas quando, de modo inaceitável, chamam de "co-senóide" o gráfico da função co-seno. Como tal gráfico resulta de uma translação do gráfico da função seno, atribuir-lhe outro nome soa tão ridículo como chamar de parábolas as parábolas de vértice na origem e de coparábolas as de vértice fora da origem. O mesmo se passa com "co-tangentóide" (!).

Finalmente, note-se a inexistência de menção ao conceito de assíntota, cuja introdução é natural no estudo do gráfico da tangente.

3) A consideração dos períodos contém erros conceituais. É inaceitável a maneira como se justifica que o período da função seno ser $2\pi$ (p. 33). Já na p. 32, aparece a observação que mais confunde do que esclarece: "Observe que, a partir de um determinado valor de $x$ $(x/2)$, cada vez que somamos $2\pi$, a função seno assume sempre o mesmo valor $(+1)$; portanto, o período da função seno é $p = 2\pi$." A partir do que ocorre com um valor de $x$, conclui-se um fato para todo $x$ real. E assim mesmo, este fato justificaria apenas que $2\pi$ é múltiplo do período, e não que é o período. Tal erro, que induz o aluno a um conceito errado de período (exatamente na primeira vez em que ele aparece) se repetirá para as demais funções trigonométricas.

Também na p. 35, o fato de o período de $y = a \operatorname{sen} kx$ ser $2\pi/k$ (aliás, não faria mal a restrição $a \neq 0$) não é um teorema, é apenas o fruto de uma observação; aliás de um único exemplo, com $a = 1$ e $k = 2$. O mesmo acontece mais adiante com co-seno, desta vez com dois exemplos (p. 40).

4) Outros erros ou inconveniências encontrados no capítulo:

P. 31: Embora na seção anterior tenha sido apresentada a unidade radiano, em lugar algum da seção anterior foi convencionado que o símbolo *rad* poderia ser omitido. Já aqui aparece um exemplo de calcular sen $\frac{19\pi}{3}\cdot$ Ao longo desta seção e das posteriores o símbolo *rad*, como é usual, não é escrito.

P. 32: Aqui (e também na p. 39), em vez do símbolo usual para infinito, aparece $\propto$.

P. 36: No sétimo exemplo, é absolutamente injustificável a conclusão dos autores de que $f$ não é nem par nem ímpar, pois $f(x) \neq f(-x)$.

P. 42: Aparecem algumas notações bastante extravagantes tais como: $\operatorname{tg} 90° \rightarrow \nexists$. Tais notações se repetirão no estudo de outras funções trigonométricas.

### Capítulo 4. Redução ao 1º quadrante

Todas as fórmulas de redução ao 1º quadrante são feitas a partir de figuras particulares, sem que isto seja sequer comentado. Não fica claro no texto que as fórmulas apresentadas sejam verdadeiras qualquer que seja o quadrante de $x$ até mesmo porque os argumentos apresentados são específicos para o primeiro quadrante. Não obstante, elas são usadas para arcos que não pertencem ao primeiro quadrante logo no segundo exemplo da p. 58.

**Capítulo 5. Relações trigonométricas**

Trata-se de um capítulo que envolve mais a aplicação de fórmulas, com seções como a de número 2, com o surpreendente título: "Cálculo do valor de uma expressão trigonométrica" (p. 63), e que consiste apenas de exemplos e exercícios. A única dedução que aparece é a da fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, na p. 60. Como já foi comentado, ela é deduzida apenas no 1º quadrante. Depois disto, vem o decreto: "esta fórmula é válida para todos os valores de $x$".

A seção 4 intitula-se: "Identidades trigonométricas". É dito que para "provar uma identidade ... podemos utilizar ... um dos seguintes processos de demonstração". Vem então o 1º processo: "Partimos de um membro ... e chegamos ao outro". Não se discute implicação, equivalência, nada. Pior: na hora do exemplo, não se faz nem isto. Desenvolvem-se os dois membros, chega-se a $1 = 1$, e é dito: "demonstrada a identidade"(!). Denota-se aqui uma total falta de conhecimento de Lógica. Por este processo, prova-se que $1 = 2$. De fato:

$$\begin{aligned}
&1 = 2 \\
&2 = 1 \quad \text{(Propriedade simétrica da igualdade)} \\
&3 = 3 \quad \text{(Somando membro a membro)} \\
&1 = 1 \quad \text{(Subtraindo 2 a cada membro)}
\end{aligned}$$

E está provado que $1 = 2$.

O mesmo ocorre com o 2º e o 3º processos, e seus respectivos exemplos. É inaceitável que um livro didático faça isto, criando ou estimulando este péssimo hábito.

Outras observações sobre o capítulo:

P. 61: Exemplo resolvido de modo incrível: Se subtraísse as duas equações, chegaria logo a $\operatorname{sen}^3 x = 3/4$. Na maioria dos exemplos, aqui e em outros lugares, tem-se $0 < x < \pi/2$, para tornar as coisas mais fáceis. E o que o aluno vai fazer diante de um problema real, onde ele não pode escolher o quadrante? Ver p. 77 e p. 80.

P. 65: No primeiro exemplo os autores concluem que se $\operatorname{cotg} x = 1/2$ e $x$ é um ângulo do terceiro quadrante, então $x \in \left]\, \pi, \dfrac{3\pi}{2} \right[$, o que não é correto, já que, por exemplo, $x$ pode estar entre $3\pi$ e $5\pi/2$.

**Capítulo 6. Transformações Trigonométricas**

O capítulo inicia com duas frases infelizes: "... qualquer ponto da circunferência é dado através das razões trigonométricas dos arcos $a$ e $b$, positivos ou negativos", quando o termo "razões trigonométricas" havia sido reservado para ângulos agudos; e: “Até o momento, estudamos as funções trigonométricas referentes a um único arco”, o que pode sugerir a um aluno que existam senos e cosenos de pares ou trios de arcos.

Para a dedução das fórmulas de $\operatorname{sen}(a + b)$ etc., diz-se: “inicialmente vamos mostrar que as fórmulas são verdadeiras para valores positivos, cuja soma pertence ao 1º quadrante e, depois, generalizá-las, de modo que possamos aplicá-las a dois valores quaisquer”. Mas não é isto que é feito. Após uma dedução desnecessariamente complicada, feita no 1º quadrante, simplesmente não se fala mais de generalização, e o primeiro exemplo é logo no 2º quadrante. Aparentemente, para os autores, “generalizar” significa demonstrar em um caso particular e aceitar que vale para todos. Aliás, como a fórmula de $\operatorname{sen}(a + b)$ foi deduzida para o caso de $a$, $b$ e $a + b$ entre 0 e $\pi/2$, não é lícito deduzir a fórmula do $\operatorname{sen}(a - b)$ aplicando a fórmula anterior para os arcos $a$ e $-b$. O mesmo pode ser dito em relação às fórmulas do co-seno.

É importante observar que, nos exercícios deste capítulo, nota-se o hábito sistemático de fugir dos problemas que ofereçam algum tipo de dificuldade. Não se encontra, por exemplo, nenhum exercício do tipo: dado $\operatorname{sen} x$, mas não o quadrante de $x$, calcular $\cos x + \tan x$, ou do tipo: dado $\operatorname{sen} 2x$, mas não o quadrante de $x$, calcular $\operatorname{sen} x + \cos x$.

**Capítulo 7. Equações Trigonométricas**

As equações trigonométricas, por se prestarem a um número infindável de questões de provas, concursos e vestibulares, têm merecido de muitos livros e professores uma atenção freqüentemente exagerada, dando origem a um festival de manipulação de fórmulas e algebrismos, atrás dos quais se refugiam os que não têm a paciência, o gosto e o cuidado com os conceitos. Este livro não foge a esta regra. Neste capítulo encontramos seções com títulos tais como: P.91: “Equações trigonométricas que envolvem artifícios” (!) Logo no primeiro exemplo, o “artifício” é usar a definição de secante! P.96: “Equações trigonométricas num intervalo dado”, como se toda equação trigonométrica não se situasse naturalmente em um domínio dado, o que é, em geral, um intervalo ou uma união de intervalos. Títulos como estes mostram que o capítulo é um repertório de “macetes”.

A idéia de olhar no círculo trigonométrico os arcos que têm um dado seno é usual, mas é boa e, num livro especializado em “receitas de bolo”, é até mesmo surpreendente. Entretanto, essa idéia nem sempre é bem executada, como se pode ver no segundo exemplo da p. 89, onde a figura não deixa clara a relação entre $\dfrac{\pi}{6}$ e os arcos que têm seno igual a $-\dfrac{1}{2}\cdot$ Aliás, o fato de não ter sido feita uma simplificação preliminar em $\operatorname{sen}(3x - \pi)$ conduz a respostas que não estão na forma mais simples. A própria arrumação da solução

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(3x-\pi) = -\frac{1}{2}\\
&\operatorname{sen}(3x-\pi) = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(3x-\pi) = \operatorname{sen}\frac{1\pi}{6}\\
&3x-\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x-\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi
\end{aligned}$$

pode levar o leitor a crer erroneamente que $\operatorname{sen}(3x-\pi) = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ implique $3x-\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ e que $\operatorname{sen}(3x-\pi) = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$ implique $3x-\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$. Teria sido melhor passar diretamente da primeira para a terceira linha.
A mesma crítica vale para o primeiro exemplo da p. 92.

Na p. 96, a resolução do segundo exemplo está cheia de erros e de métodos confusos. Em primeiro lugar, para calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, os autores usam a fórmula de $\operatorname{sen}(a-b)$. Em seguida, substituem $\cos y$ por $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$, esquecendo-se de que $\cos y$ pode ser negativo. Elevam ao quadrado e não verificam se as soluções encontradas são ou não estranhas, o que acaba corrigindo o erro anterior. Obtêm $\operatorname{sen} y = 0$, $0 \le y \le 2\pi$, e concluem $y = 0$, omitindo a possibilidade $y = \pi$. No final, mostram que têm sorte, pois, depois de tantos erros, a resposta final acaba sendo correta.

Pode-ser observar ainda que o título "Equações da forma tg $x = t$, para todo $t$ real" (p. 91) é, no mínimo, extravagante.

Apesar de tantos tipos estudados, mesmo assim, equações muito freqüentes não são abordadas, como as da forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x = C$.

## Capítulo 8. Inequações trigonométricas

Valem aqui observações análogas às feitas no início do capítulo anterior, referentes agora à própria existência de um capítulo sobre um certo tipo de exercícios. Note-se que não aparecem desigualdades importantes, como $|\operatorname{sen} x| \le |x|$.

## Capítulo 9. Resolução de triângulos quaisquer

A resolução de triângulos é uma importante aplicação de alguns conceitos elementares da Trigonometria. É altamente contestável que essa aplicação deva ser retardada até agora, em proveito, por exemplo, de longas manipulações de equações e inequações trigonométricas de vários tipos.

Como sempre, apesar do título do capítulo, a dedução da lei dos senos (p. 103) é feita para um triângulo acutângulo e, sem nenhum comentário, o primeiro exemplo apresentado já é de um triângulo obtusângulo.

Aliás, a dedução da lei dos senos é repetitiva. Provado que $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$, a mesma figura e o mesmo raciocínio são usados para demonstrar a mesma fórmula para $b$ e $B$ no lugar de $a$ e $A$. A impressão que fica é que o que foi provado na primeira parte não é uma propriedade dos triângulos, e sim das letras $a$ e $A$.

Nos exercícios, os autores fogem do caso menos simples em que às vezes há duas soluções e às vezes não há nenhuma. Isso traz conseqüências, como a que descrevemos a seguir.

No exercício de fixação 174 da p. 109, uma das respostas é: $\operatorname{sen} \beta$ igual a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$ Em um livro tão cheio de erros, era inevitável que se encontrasse um seno maior que 1.

## UNIDADE 2: MATRIZES

### Capítulo 10. Estudos das matrizes

Nas definições iniciais para matrizes (onde encontramos o anacrônico termo "cérebros eletrônicos" para computadores — p. 121), há algumas impropriedades.

Na p. 122, não se adverte que existem "matrizes nulas" de quaisquer dimensões. O mesmo problema reaparecerá quando se falar do elemento neutro da adição (p. 127).

A notação $a_{ij}$ para o termo geral de uma matriz é apresentada como "representação algébrica" (?). Perde-se mais uma oportunidade de explorar o conceito de função. Note-se que na p. 123, no exemplo em que $a_{ij} = 3i - j$, os cálculos são feitos um a um, sem relacionar com Progressão Aritmética.

Quanto às operações com matrizes:

Não fica claro se se somam ou não matrizes de tipos diferentes (p. 126).

As propriedades da adição e multiplicação de matrizes (comutatividade, associatividade, existência de neutro, simétrico, etc.) são afirmadas sem nenhuma tentativa de justificar, sem nenhum comentário (p. 127 e p. 132).

O exemplo 2 da p. 129 usa propriedades que nem sequer foram citadas antes, tais como $(ab)A = a(bA)$.

É boa a idéia de motivar a multiplicação de matrizes por meio de um exemplo envolvendo doces e ingredientes (p. 131). No entanto: 1) Já que era para concretizar, por que colocar doces $a$ e $B$, e ingredientes $X$, $Y$, $Z$? 2) A frase "Se quisermos determinar a quantidade de ingredientes … procedemos da seguinte forma" praticamente destrói a motivação, já que não se argumenta porque se devem fazer estas operações (o que seria muito fácil), e simplesmente se decreta: "procedemos da seguinte forma". Se era para isto, era melhor colocar logo a regra da multiplicação. 3) Ainda assim, a passagem do exemplo supostamente motivador para a definição é brusca, pois o exemplo referia-se apenas a uma matriz coluna, e não há nenhum comentário sobre a generalização. 4) Nunca mais, nesse capítulo, reaparecem os doces, os ingredientes, nem em nenhum outro problema; daí por diante, só aparecem exercícios de manipulação.

As observações de que não valem a "lei do anulamento do produto" e a "lei do cancelamento" (p. 133) são feitas de modo independente. O fato de que são equivalentes não é comentado nem é objeto de nenhum exercício. Aliás, o 2º exemplo desta página contém dados demais.

Na apresentação da definição de inversa (p. 135), usa-se ora I ora In (assim mesmo), bem como a palavra "inversível" — os dicionários registram "invertível".

Mas há coisas mais sérias:

Os exemplos dados de modo algum permitem concluir que as matrizes obtidas sejam efetivamente as inversas das matrizes dadas. Pela definição, para que $B$ seja a inversa de $A$ deve-se ter $AB = BA = I$. Determinando $B$ tal que $BA = I$ e já que não foi apresentado o teorema (aliás, nesse livro isso seria, no máximo, uma observação) que garante que se $A$ é quadrada e $AB = I$ então $BA = I$, a única conclusão que se pode tirar é que ou $A$ não é invertível ou $B$ é realmente a inversa de $A$. Os autores tinham a obrigação de verificar que realmente $BA = I$. Por esse motivo, as soluções, no livro do professor, dos exercícios 3 e 4 estão erradas.

Acrescente-se que os cálculos de inversa apresentados são só para matrizes $2 \times 2$, por meio da resolução de um sistema que seria impraticável para dimensões maiores. Não há sequer um comentário de que há outros métodos mais eficientes.

Por fim, mesmo em um livro com muitos erros, merece destaque a incrível frase: "se a matriz quadrada $A$ é inversível, ela é única".

### Capítulo 11. Determinantes

O capítulo inicia por uma Introdução, onde se diz que (p. 139): "o denominador ... determina se o sistema dado é determinado ou indeterminado. Daí o seu nome **determinante**", embora só mais adiante esses termos vão ser definidos.

As expressões que servem de definição para um determinante de 2ª e 3ª ordem estão corretas, mas são apresentadas sem nenhum comentário, como, por exemplo, que em cada parcela aparece um elemento de cada linha e cada coluna. Nenhuma menção é feita sobre a permutação dos índices. Há uma pressa em chegar ao "teorema" de Laplace, que aliás é apresentado como um "métodos", dentro do estilo "receita de bolo" dos autores. Para ordens maiores do que 3, vem o decreto: "da mesma forma que fizemos ... podemos utilizar o Teorema de Laplace ...".

Dentro do espírito do livro, de apresentar a Matemática como uma disciplina descritiva, e não uma ciência dedutiva, nenhuma justificativa é apresentada para as propriedades dos determinantes (p. 148 e p. 150)! São apenas ilustradas, cada uma com um (!) exemplo. A maioria dessas propriedades também não é explorada no restante do livro. Fica-se sem saber o porquê de mencioná-las. Além disto, o exercício 2a da p. 151 faz uso de uma propriedade não citada, a nulidade do determinante das matrizes quadradas que tenham duas colunas proporcionais.

Toda uma seção é dedicada ao determinante de Vandermonde (p. 151), do qual não se vê a importância, e a expressão do mesmo é apresentada por: "demonstra-se que ...".

**Capítulo 12. Sistemas Lineares**

É boa a idéia de começar o tema de sistemas lineares (p. 157) por uma única equação com 3 incógnitas (1º exemplo), mas a idéia não é bem aproveitada, já que sequer é comentada a existência evidente de uma infinidade de soluções, o que seria muito útil mais adiante. Note-se a impropriedade de terminologia, já que as soluções começam sendo "ênuplas" ou "seqüências", mas já na página seguinte são "conjuntos ordenados" (termo impróprio).

Na definição da p. 159, sistemas são equivalentes quando "admitem a mesma solução, conceito que só serve para sistemas determinados. E de fato, o único exemplo e o único exercício referem-se a esse caso. Aliás, o próprio exemplo está intrinsecamente errado, pois o que se mostra, na verdade, é que o conjunto das soluções do primeiro sistema está contido no conjunto das soluções do segundo. É claro que sendo esta uma ocasião adequada ao uso de conjuntos de soluções, os conjuntos não aparecem nas explicações dos autores. Mas aparecem impropriamente nas respostas dos exercícios 6 da p. 158; 5, 8 e 12 da p. 171; no exemplo da p. 172.

Na p. 160, há toda uma seção para enunciar que "dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de sistemas lineares", quando a única utilização que aparece é a de escrever o sistema matricialmente.

A seção 5 (p. 161), sobre classificação de sistemas lineares, não contém nenhum texto! Em particular, não há nenhuma explicação do porquê de um sistema linear não poder ter um número de soluções finito e maior do que um.

A Regra de Cramer é mal apresentada: "... consiste num método para se resolver um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas". Fica a impressão de que a regra resolve qualquer sistema desse tipo.

Apesar de dizer "Vejamos a demonstração" (da Regra de Cramer), nenhuma justificativa aparece para o fato de que é nula a soma dos produtos dos elementos de uma coluna (há, aliás, um erro de imprensa na expressão) pelos cofatores de uma outra coluna.

Na p. 162, nada é dito sobre o que acontece se o determinante do sistema é 0.

Uma questão grave é que não se discutem as vantagens ou desvantagens de usar os diversos métodos para resolver um sistema: Cramer, escalonamento e os tradicionais. Assim, o leitor não sabe por que tem que aprender escalonamento.

Operações como "trocar as posições de duas equações" são apresentadas (p. 164) como "propriedades" (sic!). E entre essas operações é apresentada "trocar as incógnitas de posição", o que altera as soluções, que foram apresentadas na p. 157 como "ênuplas".

Não se vê como o estudante, a essa altura (p. 167), possa compreender a frase "Note que o sistema é indeterminado".

Em todos os exemplos, só aparecem sistemas indeterminados com um grau de liberdade, induzindo o principiante a pensar que, em qualquer sistema indeterminado, basta igualar uma incógnita a um parâmetro e expressar as outras em função do parâmetro. Nenhuma menção é feita a incógnitas livres, e à arbitrariedade ou não da escolha delas.

No exemplo 2 da p. 170, a afirmação "quando o número de equações é igual ao número de incógnitas, ... para que o sistema admita solução única devemos ter o determinante da matriz incompleta diferente de zero" é feita sem maiores explicações, como se fosse evidente.

P. 170: Nos exemplos 1 e 2, péssimo uso dos símbolos lógicos. Por exemplo: $SPI \Rightarrow \nexists m$. Idem na p. 172, na discussão de sistemas homogêneos.

## UNIDADE 3: ANÁLISE COMBINATÓRIA

### Capítulo 13. Estudo da análise combinatória

"Análise combinatória ... estuda o número de possibilidades ... sem, necessariamente, descrever todas as possibilidades" (p. 182). Melhor seria: "sem, necessariamente, contar uma a uma todas as possibilidades", já que descrevê-las é necessário.

Algumas definições são imprecisas. Há duas definições de "Arranjos simples" (p. 185), cada uma mais obscura que a outra: "... é o tipo de agrupamento sem repetição em que um grupo é diferente de outro pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes", ou "... todos os agrupamentos sem repetição formados com $p$ elementos diferentes ...". Como sempre, nenhuma conexão é feita com conceitos anteriores, tais como seqüências, funções injetivas, etc. Também há duas definições para Combinações na p. 190, mas dessa vez a segunda se relaciona corretamente com a noção de subconjunto.

Também é obscura a definição de Permutação (p. 193): "... é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram os elementos de cada grupo" (?)

Tanto no exemplo da p. 183 quanto no enunciado do Princípio Fundamental de Contagem (p. 184), não é destacado que o número de possibilidades da 2ª etapa é "para cada possibilidade da 1ª etapa", etc.

A "dedução" da fórmula do número de combinações (p. 191) é incrível: no exemplo, divide-se por 2, "que é o fatorial ..." de 2. Logo, na fórmula geral, deve-se dividir por fatorial de $p$ (!!). Não há nenhuma argumentação para isto. Os autores não levam em conta que a dedução de uma fórmula é um dos mais ricos exercícios sobre o assunto.

Note-se que é inconveniente o uso de palavras acentuadas como NATÁLIA para contagem de anagramas (p. 196), já que fica a dúvida se NATALIÁ é um anagrama diferente de NATÁLIA.

**Capítulo 14. Binômio de Newton**

É discutível se "Binômio de Newton" deva ser considerado como um capítulo no mesmo plano de Análise Combinatória ou Teoria das Probabilidades. Poderia ser apenas um conjunto de exercícios.

O capítulo começa (p. 200) com a definição de número binomial (até o nome já diz, número) como um "par de valores" (sic!).

Não há nenhuma explicação para o aluno de por que agora o símbolo para combinações muda. A fórmula $\binom{n}{1} = n$ não exige a restrição indicada, aliás de forma pleonástica: "para $\forall\, n > 1$".

As propriedades dos números binomiais (p. 201 e p. 202) são demonstradas somente a partir das fórmulas. Não são usadas, aliás nem mencionadas, as interessantes interpretações conjuntistas. Por exemplo, a fórmula das combinações complementares traduz o fato de que a cada subconjunto de um conjunto finito podemos associar o seu complementar e vice-versa. A relação de Stifel (e não Stiffel como está no livro) obtém-se contando os subconjuntos de um conjunto finito que contêm um certo elemento $a$ e os que não o contêm.

Aliás, no primeiro exemplo da p. 202, por que existem apenas duas possibilidades? Não é nem um apelo à observação, pois o triângulo aritmético só é apresentado na página seguinte.

Chamar uma coluna de primeira coluna, imediatamente após tê-la batizado de coluna zero, é extravagante (p. 203).

Na p. 204, a propriedade de a soma dos elementos da linha $n$ no triângulo de Pascal ser $2^n$ é concluída porque dá certo até $n = 5$, e também não é relacionada com o número de elementos do conjunto das partes.

Mais ainda: a própria fórmula do Binômio de Newton (p. 205), que é o objeto principal do capítulo, também é concluída após “observe”, até $n = 4$.

Na p. 207, os autores obtêm uma fórmula para achar a $(p+1)$-ésima parcela de uma soma sem haverem combinado anteriormente uma ordem para tais parcelas.

### Capítulo 15. Teoria das Probabilidades

É um pouco pomposo chamar este capítulo de “Teoria das Probabilidades”. Mais apropriado seria, por exemplo, “Cálculo de Probabilidades”.

Algumas definições deste capítulo deixam a desejar. Na p. 212, está errada a definição de “eventos mutuamente exclusivos”: “são aqueles que têm conjuntos distintos”.

Na p. 213, é dada a definição de probabilidade como sendo o quociente de $n(A)$ por $n(U)$, sem chamar a atenção que só vale para conjuntos finitos, e, o que é mais grave, acrescentando que ela “é válida quando o espaço amostral for eqüiprobabilístico, isto é, quando todos os elementos de $U$ tiverem a mesma probabilidade”. O definido aparece na definição.

O único exemplo para probabilidade de uma união de eventos (p. 215) é ruim como exemplo ilustrativo, pois um evento está contido no outro. Tanto que os autores fazem: “outro método”, e vem a solução direta pela definição.

Para introduzir “experimentos não eqüiprováveis” (p. 218), é apresentada uma figura, sem descrever qual é o experimento, e diz: “observe que o espaço amostral é ...”. Como se pode determinar o espaço amostral sem saber qual é o experimento? Aliás, neste texto, aparece um conceito não definido, “eventos elementares”.

Na apresentação de “Probabilidade condicional” (p. 221), aparece o estranho “sabendo-se que vai ocorrer ou já ocorreu ... $B$”.

Na p. 222, a distribuição binomial é apresentada como uma receita, e não como uma conseqüência natural do que vem antes.

## UNIDADE 4: GEOMETRIA

### Capítulo 16. Retas e Planos no Espaço

O capítulo se inicia abordando conceitos primitivos e “postulados”, que são “proposições que são aceitas sem demonstração”. São enumerados 8 postulados (há defeitos neles, mas nem vamos comentar aqui). A partir daí, o leitor poderia pensar que a abordagem seria dedutiva, e que, quando alguma outra proposição fosse aceita sem demonstração, no mínimo ela passaria a constituir um novo postulado. Mas não é isto que acontece.

Logo após os postulados, no exercício de aprendizagem 2a (p. 233), é perguntado, por exemplo: "Quantas são as retas contidas num plano?". Nenhum postulado responde diretamente a esta pergunta, e a demonstração de que há uma infinidade estaria fora do nível do livro. Naturalmente, os autores esperam que o aluno responda "inspirado na experiência e na observação" (expressão usada corretamente para os postulados na p. 232). Mas então para que os postulados?

Logo a seguir, o próprio livro enuncia várias propriedades, como por exemplo, que (p. 234) "uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano", sem usar nenhum dos postulados, e sim com o usual: "podemos observar que ...".

Vêm em seguida nove seções tais como: "Posições relativas de duas retas no espaço", "Ângulo entre reta e plano", etc., onde estas propriedades, e outras que vão surgindo à medida que necessário, são usadas livremente, sem qualquer alusão aos postulados. Para que os postulados?

Por fim, a grande surpresa: as duas últimas seções do capítulo (seções 13 e 14, ps. 246 a 249) intitulam-se, respectivamente, "Teoremas do Paralelismo" (com 4 teoremas) e "Teoremas do Perpendicularismo" (com 5 teoremas). Aí aparecem várias proposições que já foram usadas antes, sem nenhuma menção explícita, outras que poderiam ter sido usadas para justificar algumas afirmativas que foram "chutadas" ou ajudar o aluno na resolução de problemas, e até uma (o Teorema 1 do Perpendicularismo) que na p. 240 vinha acompanhada do comentário "é possível demonstrar que", mas sem alusão à demonstração feita no próprio livro. A impressão que fica é que estas duas últimas seções foram colocadas aí apenas para constar, assim como os postulados.

Passemos agora aos detalhes.

A figura que acompanha o postulado P4 da p. 233 é estranha. Na segunda janela, uma mesma reta aparece duas vezes, etc.

P. 236 A frase "as retas $EH$ e $AB$ estão contidas em planos diferentes" é infeliz. O que interessa é que não existe um plano que as contenha. Os autores parecem pensar que é a mesma coisa, mas não é não. Numa pirâmide, por exemplo, as arestas da base $AB$ e $BC$ estão contidas em planos diferentes (planos $VAB$ e $VBC$, $V$ sendo o vértice), e estão contidas no mesmo plano, o plano da base. A frase atrapalha os próprios autores, que no exercício 1b da página 237 afirmam erroneamente que se existe um plano que contém a reta $r$ mas não contém a reta $s$, então as retas $r$ e $s$ são reversas.

A definição de retas reversas é pleonástica: "são duas retas não contidas num mesmo plano e que não têm ponto comum". Duas retas são reversas quando não existe plano que as contenha. Neste caso, é claro que não podem ter ponto comum.

Na p. 240, como já foi comentado, o teorema do perpendicularismo entre reta e plano não é justificado, e nem sequer é feita alusão ao fato de que existe uma demonstração mais adiante. O exemplo do cubo é bom, mas os autores perdem a oportunidade de mostrar uma reta que não seja perpendicular a um plano, embora seja perpendicular a uma reta desse plano.

Na p. 241, a projeção de uma reta é definida de modo diferente do da projeção de uma figura geométrica, sem menção ao fato que as definições são coincidentes quando a figura for uma reta. Aliás, a figura que ilustra o único exemplo mencionado é infeliz, pois tende a sugerir que a projeção ortogonal seja uma isometria. Também não é comentado o importante caso em que a projeção ortogonal de uma reta reduz-se a um ponto.

Na p. 242, aparece uma "reta $r$ oblíqua a um plano", termo não definido em lugar nenhum. A definição aí dada de ângulo de reta com plano ("ângulo que ela forma com sua projeção ortogonal") não inclui como caso particular o caso em que a reta é perpendicular ao plano, já que então a projeção é um ponto. Em vez de destacar que neste caso é preciso completar a definição, é dito apenas, muito no estilo do livro: "Observemos que ... o ângulo entre uma reta e um plano $\alpha$, quando $r \perp \alpha$, é reto". Como é possível "observar" isto?

Nas definições de distância entre planos paralelos e entre uma reta e um plano a ela paralelo (p. 243), nem ao menos se comenta a independência do ponto escolhido. Na definição de distância entre duas retas reversas, não se faz menção à perpendicular comum. E a frase: "seja o plano $\alpha$ determinado pelas retas $r'$ e $s$; temos que $r \parallel \alpha$". Que significa este "temos que"? O que está aqui por trás é a proposição: "se uma reta for paralela a uma reta de um plano, então ela será paralela a este plano". Acontece que esta proposição só é enunciada pela primeira vez na p. 246 (Teorema 3).

O Teorema 1 da p. 248 é: "se uma reta é perpendicular a um plano $\alpha$, então $r$ faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em $\alpha$". Se a última reta for concorrente com $r$, isto é a própria definição da p. 240 (como corretamente notado pelos autores na demonstração), mas se esta reta e $r$ forem reversas, em nenhum lugar anterior foi definido ângulo nem perpendicularidade entre retas reversas. E muito menos aparece a propriedade que justificaria a implicação feita na demonstração do Teorema: "se $r \perp s'$ e $s' \parallel s$, então $r \perp s$".

A demonstração do Teorema 4 (p. 250) usa o seguinte: "como pelo ponto $B$ do plano $\alpha$ passa uma única perpendicular a esse plano, resulta ...". Esta unicidade não é sequer enunciada antes e sua demonstração está longe de ser simples.

Na demonstração do Teorema 5 da p. 250, lê-se: "se $\alpha$ e $\beta$ são planos perpendiculares, então $\alpha$ deve conter uma reta $s$ tal que $s \perp \beta$". Trata-se de outra proposição nunca antes enunciada. Segue-se a frase incompreensível: "Logicamente, a reta $r$ é perpendicular à interseção $t$, ou seja $s \perp t$". Que demonstração!

### Capítulo 17. Medidas de superfície

Não é má a idéia de inserir uma revisão sobre áreas, antes de abordar áreas e volumes dos sólidos. No entanto, seria melhor que tivessem sido colocadas apenas as fórmulas e as figuras, do que esta pequena "teoria" sobre áreas. A definição apresentada de "área de uma superfície plana" só serviria para os casos em que a medida fosse um número inteiro, e assim mesmo se ficasse claro o que é "quantas vezes essa superfície contém a área da superfície escolhida como unidade de medida".

### Capítulo 18. Prisma

Está errada a definição de prisma (p. 265), já que não é especificado que os segmentos devem estar todos em um mesmo semi-espaço determinado pelo plano considerado. O mesmo ocorre na definição de cilindro (p. 301).

Na p. 267, aparece o desenho de uma secção reta, enquanto o texto só fala da noção mais geral de seção transversal.

A partir da p. 271, começam, com o prisma, os cálculos de volumes feitos nesta Unidade. A apresentação padece de muitos defeitos, como veremos a seguir.

Na apresentação de volume de prisma, usam-se paralelepípedos, que são o tema da seção seguinte, e usa-se como conhecida a fórmula do volume de um paralelepípedo. Por sua vez, esta fórmula é apresentada na seção seguinte, pela incrível frase: "Sabemos que, num paralelepípedo retângulo, $V = S_b h$". Além disto, o princípio de Cavalieri é citado de maneira inteiramente superficial, como se fora a coisa mais óbvia do mundo, e aplicado entre um prisma hexagonal e um paralelepípedo (lembremos mais uma vez: objeto da seção seguinte) que não aparece na figura. Não há nenhum compromisso com a coerência, nem com o esclarecimento do leitor ou do aluno. Parece que o objetivo é mencionar o princípio, somente para que não se possa dizer que o princípio está ausente do livro, mas não há a intenção de usá-lo de maneira responsável. Uma vez despachada rapidamente esta desagradável obrigação de apresentar alguma justificativa para as fórmulas, passa-se imediatamente aos exercícios que, em sua grande maioria, não são de Geometria; são de aplicações das fórmulas, e comprazem-se nos algebrismos, como, por exemplo: "... sabendo que a medida da altura do prisma é o triplo da medida da aresta da base ..." (p. 270, exerc. 10). Mais uma vez, o aluno é privado dos aspectos mais bonitos e estimulantes da Matemática, para voltar à sua tarefa própria: calcular.

Na p. 274, a diagonal de paralelepípedo retângulo é calculada sem ter sido previamente definida. É deduzida uma fórmula (!) para a área total de um paralelepípedo retângulo, que é simplesmente a soma de áreas de retângulos.

Nenhuma menção é feita no capítulo a tronco de prisma.

P. 270: Estão erradas as respostas dos exercícios 7 e 8. A resposta do exercício 14 só estaria correta se o enunciado mandasse aproximar $\sqrt{3}$ por 1,7.

P. 272: A figura do exercício 11 é incompatível com o enunciado.

**Capítulo 19. Pirâmide**

No cálculo do volume de uma pirâmide, prosseguem as inconsistências encontradas no capítulo de Prisma. "… lembrando o fato de que duas pirâmides com bases de áreas iguais e de mesma altura têm volumes iguais …" (p. 288). Como alguém pode lembrar-se de uma afirmação jamais feita anteriormente? Esta afirmação é uma conseqüência do Princípio de Cavalieri, que nem sequer é citado mais aqui. Além disto, tudo isto é feito com uma pirâmide triangular, e, em seguida, sem nenhum comentário, enuncia-se: "O volume de uma pirâmide qualquer é …".

**Capítulo 20. Cilindro**

É curioso que somente sejam considerados cilindros circulares. Tronco de cilindro também não é citado, mas aparece em um exercício de fixação. Hélices também não aparecem.

Aqui ocorre algo que parece inédito em livros de Matemática: no exercício 14 da p. 306, os autores mandam adotar $\pi = 3{,}2$ (sic), e no exercício 457 da p. 307, mandam adotar $\sqrt{3} = 1{,}71$ (sic)!

**Capítulo 21. Cone**

Aparece o conceito inusitado de "eixo" para cones que não são de revolução (p. 308).

Na p. 311, lê-se: "a um arco de comprimento … corresponde uma área de …", para dois pares de valores, e conclui-se pela aplicação de uma regra de três, sem nenhuma menção a proporcionalidade. Passa a impressão que para qualquer função, sabendo dois valores, pode-se calcular um terceiro por regra de três.

Na p. 317, é colocada uma seção chamada "Propriedades", onde aparecem, e somente para cones (não fica claro se para todos ou só para os circulares retos, como parece sugerir a figura), propriedades tais como a que fornece a razão entre os volumes de dois cones, um deles obtido por uma seção transversal do outro, como o cubo da razão entre as alturas respectivas. Não somente não consta justificativa alguma, como nem sequer é feita uma "verificação", usando a fórmula de volume dada no próprio capítulo. É como se fossem fatos totalmente independentes. Além disto, como ocorreu no Capítulo 1 com a seção análoga, muitas destas propriedades poderiam já ter ajudado alguns desenvolvimentos feitos (ou não) antes. A impressão que fica é que estas propriedades estão aí porque constituem mais um conjunto de macetes que a partir de agora aparecerão nos exercícios.

**Capítulo 22. Esfera**

A apresentação do volume da esfera é boa, mas baseia-se na área da superfície esférica. E a apresentação desta é simplesmente inacreditável; parece uma brincadeira de péssimo gosto: "Experimentalmente podemos constatar que uma superfície esférica tem um peso igual ao peso conjunto de quatro círculos máximos" (!!). "Daí, podemos dizer que … $S = 4\pi r^2$". Sem contar o fato de que a Matemática não é uma ciência experimental, qual é a experiência que permite pesar uma superfície?

Dada a ausência de zonas, segmentos e calotas, surpreende a presença de fusos e cunhas. Surpreende também a completa ausência de problemas envolvendo latitudes e longitudes. A apresentação do conceito de ângulo de um fuso (p. 329) também é confusa: uma figura e nada mais.

**Capítulo 23. Sólidos de revolução**

Os autores mostram desenhos representando sólidos obtidos pela revolução de figuras simples, mas não se dão ao trabalho de dizer os nomes de tais sólidos. Nenhuma menção é feita aos teoremas de Pappus, nem aos toros, embora o desenho de um toro apareça na p. 331.

**Capítulo 24. Noções sobre poliedro**

Este capítulo apresenta várias deficiências:

Não se prova a existência de apenas cinco poliedros regulares convexos (p. 336).

O Teorema de Euler é fruto da observação de uns poucos exemplos (p. 337).

A soma dos ângulos das faces é afirmada sem maiores explicações (p. 338).

Vários problemas são propostos sobre poliedros que simplesmente não existem. Os autores parecem pensar que podem escolher valores arbitrários para $V$, $F$ e $A$, respeitando $V + F = A + 2$, e pronto, eis um poliedro convexo. Chegam ao cúmulo com um poliedro com 12 faces e apenas 5 vértices. Assim, não existem os poliedros dos exercícios 7 da p. 338, e dos exercícios 501, 503, 505 e 507 da p. 339.

## COMENTÁRIOS FINAIS

O segundo volume desta coleção padece de alguns dos mesmos males do primeiro volume: Péssima conceituação, excessivo número de erros, preocupação quase que exclusiva com a calculeira algébrica, em detrimento da exploração de situações interessantes.

Na Unidade Trigonometria, a conceituação é extremamente deficiente e cheia de erros e inconsistências, principalmente na parte de arcos e ângulos e suas medidas. Os problemas, de um modo geral, são fracos, excetuando-se os dos dois primeiros capítulos relativos a triângulos. Na conceituação, a parte de triângulos é muito fraca, mas a parte inicial de triângulos retângulos é surpreendentemente boa. As aplicações a triângulos vêm muito tarde, e em muitos casos serão abandonadas pelos professores que adotarem o livro, em benefício do festival de manipulações de equações e inequações trigonométricas. Nenhuma menção é feita das funções trigonométricas inversas e ao uso de calculadoras. U m aluno que "aprenda" por este livro não desconfiará como descobrir na calculadora um ângulo, dado o seu seno ou seu co-seno — e, principalmente, porque a calculadora dá um só resultado para cada um, e como a calculadora escolhe este resultado. Finalmente, praticamente todas as fórmulas são deduzidas (quando o são) em situações particulares e indevidamente generalizadas.

Na Unidade de Matrizes, as propriedades das matrizes e dos determinantes quase nunca são justificadas. Não são discutidas as vantagens teóricas ou computacionais dos diversos métodos de resolução de sistemas, ficando-se sem saber por que aprendê-los.

Na Unidade de Combinatória, as definições de arranjos e permutações são confusas. Os problemas são poucos e superficiais. Os exercícios de combinatória, em maioria, têm enunciados confusos. A calculeira é grande. Falsos problemas de combinatória, ou seja, carroções de fatoriais e equações com número de arranjos são excessivamente freqüentes. As propriedades dos coeficientes binomiais são sempre tratadas numericamente, não se mencionando suas interpretações conjuntistas. Na "Teoria das Probabilidades", nota-se que os autores parecem ter compilado a teoria e a nomenclatura em diferentes fontes, sem muita preocupação em compatibilizá-las.

A Unidade de Geometria é a pior do volume. São enunciados postulados que nunca serão usados e empregadas livremente várias proposições sem nenhuma justificativa lógica. No final há uma seção com demonstrações (muitas vezes erradas) de teoremas que incluem aquelas propriedades. O cálculo de volumes hesita entre "chutar" totalmente a fórmula, sem maiores comentários, e tentar uma justificativa apressada, inconsistente, e até absurda (como no caso da área da superfície esférica). Nota-se ainda um afã em fazer com que os problemas deixem de ser de Geometria, e passem a ser de cálculos.

## APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos

P. 11: No segundo exemplo, a altura do observador não é considerada.

P. 12: O terceiro exemplo contém dados demais e, portanto, desnecessários. Além disso, a resposta correta é de aproximadamente 2 071 m. Com os dados aproximados, não há o menor sentido em escrever a resposta 2 076,9 m.

P. 21, exemplo 1: Usa-se $\pi$ igual a 3,14 sem nenhuma menção a ser essa uma igualdade aproximada.

P. 29, exerc. 2d: Pela resposta, vê-se que há uma mistura de graus com radianos no enunciado.

P. 58: Falta a restrição de denominador diferente de zero na simplificação do primeiro exemplo.

P. 59: Há pouco cuidado com as restrições nas simplificações dos exercícios 1, 2 e 3 e do exercício de fixação 63.

P. 68: Há pouco cuidado com as restrições dos exercícios de aprendizagem 1a, 1c, 2a, 2b, 3a, 3b, 4, 5 e 6, bem como nos exercícios de fixação 76, 77, 78 e 80. Surpreendentemente, cuidados adequados são tomados no exercício de fixação 79.

P. 72: No exerc. 4 falta um símbolo de grau. No exerc. 6 está edição onde deveria estar adição. Embora a resposta do exercício 8 esteja correta, é claro que é mais simples escrever $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$ do que $\dfrac{\sqrt{57+24\sqrt{3}}}{10}$.

P. 74: Falta a restrição $\operatorname{sen} a \neq 0$ no exercício 5.

P. 77: No primeiro exemplo, a fórmula $\cos 2a = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a$ surge do nada.

P. 78: Faltam as restrições nos exerc. 13 e 14c.

P. 80: No segundo exemplo aparece uma fórmula errada, $\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$. O problema seria interessante se não fosse dado o quadrante de $a$. A resposta não está na forma mais simples.

P. 83: O segundo exemplo é de gosto duvidoso: transformar em produto $1+\operatorname{sen} 30°$. Ora, é claro que o melhor modo de resolver tal problema é $1+\operatorname{sen} 30° = 1+0{,}5 = 1{,}5$.

P. 86: Falta a restrição do exercício de fixação 92.

P. 87: Faltam as restrições dos exercícios de fixação 104a, 104c e 119.

P. 97: O enunciado do exercício 130b não faz sentido.

P. 105: A figura do exercício 6 é incorreta: o segmento assinalado mais parece altura do que lado do triângulo.

P. 109: O enunciado do exercício 5 é falho: "Qual é a área de um triângulo isósceles no qual cada lado congruente mede 10 cm e o ângulo adjacente à base 75°?"

P. 109: Embora não seja culpa dos autores, pois trata-se de uma questão de vestibular, o quadrilátero é $BCNM$ e não $BCMN$. Deveriam ter corrigido o enunciado.

A redaçào do teste de vestibular 22 (PUC-SP) não faz sentido: "Qual dos pares de ângulos é côngruo de 1200?". Embora não seja culpa dos autores, a redação deveria ter sido adaptada. Observação idêntica vale para a redação do teste de vestibular 37: "Para todo valor de $x$ para o qual sec $x$ é crescente, temos: ...". Embora não seja culpa dos autores, a redação deveria ter sido adaptada.

Ressalte-se ainda a falta de cuidado dos autores dos testes de vestibulares com as restrições das variáveis nos testes 40 (FGV-SP), 48 (PUC-SP), 57 (FGV-SP) e 58 (UFPA).

P. 136: A resposta do exercício 188d está errada, fruto da má redação do enunciado. Para a resposta ser a resposta apresentada, o enunciado deveria ser:

Se $a_{ij} = 0$, quanto vale $i$ ?

P. 140: No exercício 4 deveria ser dito que $a$ e $b$ são positivos e diferentes de 1.

P. 153: O exemplo está errado. O determinante não vale 769 e sim 193.

O teste de vestibular 93 é sobre matrizes simétricas, conceito não definido no livro. A redação do teste 104 é defeituosa.

P. 188: O enunciado do sexto exemplo é confuso. "Deseja-se formar um grupo de estudos ..." seria um enunciado compatível com a solução oferecida.

Na p. 191, o exemplo 2 seria resolvido mais diretamente por $RC_{8,2} + 8C_{5,2}$ .

P. 192-193: O enunciado do exercício 8 é confuso. Melhor seria selecionar jogadores do que escalar time, que pressupõe posições para os jogadores.

O enunciado do exercício 19 é surrealista.

P. 198-199: O enunciado do exercício 292 propõe algo impossível: 12 pontos dos quais 5 e somente 5 estão alinhados.

O primeiro exemplo da p. 304 é um absurdo. Como os autores sabem (afinal foram eles que inventaram o exercício) que a resposta será 2, eles usam para resolver o exercício que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 2^n$ e obtêm $n = 2$ (!).

P. 208: O enunciado do exercício 9 é confuso. Melhor seria coeficiente de $x$ em vez de coeficiente numérico.

O exercício de aprendizagem 3b da p. 235 pergunta: "Por que as mesas de três pernas assentam sempre perfeitamente?". Isto não é verdade. Experimente suprimir um pé de uma mesa qualquer.

P. 252: Há problemas nos exercícios 353c e 353f (quem garante que a base é um paralelogramo?). A resposta do exercício 353c está errada.

Há problemas no exercício 354. O enunciado deveria se referir às retas desenhadas.

Há problemas no exercício 355. Quem garante que o prisma é reto? O enunciado deveria se referir às retas desenhadas.

P. 263: Há um defeito na figura do exercício 368.

P. 264: No exercício 375 não há indicação de que a figura seja um paralelogramo.

O exercício 423 da p. 299 não faz sentido. É impossível aresta, altura e volume formarem uma progressão geométrica. Suas medidas, numa dada unidade, até poderiam formar.

P. 300: É péssima a redação do exercício 430.

Algum comentário deveria ter sido feito a respeito da figura da p. 326, já que, sendo a altura 3 e o raio 5, o cone está todo no hemisfério superior.

P. 330: Há erro no enunciado do exercício 1. Está "circunferência" onde deveria estar "superfície esférica".

Entre os Testes de Vestibulares, o teste 215 não admite resposta; o teste 250 fala na razão entre a área e o volume de uma esfera: embora o erro seja de quem formulou a questão, questões desse tipo não deveriam ser colocadas em um livro didático, ou, pelo menos, não deveriam ser colocadas sem uma advertência; e o teste 259 não apresenta alternativa correta. Aliás, o poliedro sobre o qual versa o problema simplesmente não existe.

## APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios

P. 12, exerc. 3: A resposta é 20,7 m.

P. 15, exerc. 1: A resposta só estará correta se o atirador estiver deitado.

P. 15, exerc. de fixação 7: Embora a resposta esteja correta, os dados do problema não são independentes entre si, pois $r = (2\sqrt{3} - 3)R$. Isso permite escrever a resposta de muitos modos diferentes. Nada é comentado a respeito.

P. 20: A resposta do quarto exemplo está errada.

P. 20, exerc. 9: Há erro de unidade na resposta.

P. 29, exerc. 15: Como sistematicamente $\pi$ é tomado como 3,14, não há sentido na resposta 275,15m. Seria melhor 275m.

P. 37: Aparece mais uma vez o que foi uma característica do Volume I da coleção: a confusão entre elementos e conjuntos. Nos exercícios 6, 6 e 8, por exemplo, são pedidos os valores de $x$, $b$ e $k$ e as respostas são conjuntos. A confusão aparece novamente ao descreverem a imagem da função $y = \sec x$, que é um conjunto, os autores escrevem $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$. O mesmo acontece com a co-secante. Não mencionaremos mais tal tipo de erro que se repete sistematicamente.

P. 37: No exercício 3, faltam os gráficos nas respostas e no exercício 4d faltam colchetes no enunciado.

P. 44: A resposta $\{x \in \mathbb{R},\ x \neq 120^\circ + k\,180^\circ\}$ é mais uma conseqüência dos conceitos errôneos do capítulo anterior.

Os autores não se preocupam em colocar as respostas nas formas mais simples. Isto ocorre no primeiro exemplo da p. 48, onde escrevem $x \neq \pi + k\pi$, quando poderiam ter escrito $x \neq k\pi$. O mesmo já ocorrera na resposta do exercício 1b da página 44 e ocorrerá também nos exercícios 3d da p. 49 e 53b da p. 51.

P. 50: As respostas dos exercícios de fixação 22 (para todo $n$ inteiro positivo a expressão é menor que 1), 24a (o período não é $4\pi$, é $2\pi$) e 34 (a ordenada de $D$ vale $-1/2$) estão erradas.

P. 53: A resposta do exerc. 1c está errada (a tangente é negativa).

P. 74: É inacreditável que não seja simplificada a resposta do exemplo 2: $\dfrac{3\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{10}$.

P. 80: A esposta do terceiro exemplo não está na forma mais simples.

P. 81: As respostas dos exerc. 3b, 4, 6 e 9 não estão na forma mais simples.

Exerc. 5: Embora a resposta esteja correta, a solução no livro do professor usa um argumento falso: se $\theta$ é do segundo quadrante, $\dfrac{\theta}{2}$ é do primeiro quadrante. Isso não é necessariamente verdadeiro se $\theta$ não estiver na primeira volta.

P. 87: A redação da resposta do exercício 106 é inaceitável: o problema apresenta 4 soluções e não as 8 indicadas. A resposta do exercício de fixação 107 não corresponde ao que é pedido no enunciado. A "resposta" do problema 120 ainda pode ser transformada em produto. A resposta do exercício de fixação 113d está errada. Há uma outra solução. A resposta do exercício de fixação 113c está errada, embora esteja correta no livro do professor. A resposta do exercício de fixação 113f não está na forma mais simples.

P. 89: A resposta do exerc. 4 está errada.

P. 94: As respostas dos exercícios 4, 8c e 10 estão erradas.

P. 97: As respostas dos exercícios 10, 19 (falta a solução $2\pi$), 124, 127d e 129 estão erradas.

P. 97: É incoerente a mistura de graus e radianos no enunciado do exercício 20 e na resposta do exercício 124.

P. 97: A resposta do exercício 125 pode ser escrita, de modo muito mais simples, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

P. 98: Está errada a resposta do exercício 142b.

P. 101: Estão erradas as respostas dos exercícios 3 e 4. A resposta do exercício 4 não faz sentido; os autores parecem desconhecer que $(p \vee q) \wedge r$ é diferente de $p \vee (q \wedge r)$.

P. 101: Está errada a resposta do exercício de fixação 162.

Nos Testes de Vestibulares, estão erradas as respostas dos testes 53 (F. Carlos Chagas) (não há alternativa correta), 76 (UFES) (não há alternativa correta), 77, 85 (Machenzie) (não há alternativa correta).

P. 155: Está errada a resposta do exercício 212.

P. 174: Está errada a resposta do exercício 245.

P. 189: A resposta do exercício 11 está errada. A resposta estaria correta se o enunciado fosse ... números de 4 algarismos diferentes.

A resposta do exercício 15 está errada. Resultado de prova é uma permutação dos 24 concorrentes.

A resposta do exercício 22b está errada.

A resposta do exercício 307 está errada. Estaria correta se o enunciado se referisse às alternativas de uma única questão.

P. 208: A resposta do problema 11 está errada.

P. 211: A resposta do exercício 1c está errada.

A resposta do exercício 2a da p. 212 não está na forma mais simples.

No primeiro exemplo da p. 213, $\frac{1}{6}$ é arredondado para 0,1666. O erro se repete na p. 214, na resposta do exercício 2a.

P. 216: Está errada a resposta do exercício 7b.

P. 217: A resposta do exercício 5c está errada. Estaria correta se o enunciado fosse ... exatamente uma seja defeituosa.

P. 221: Há erro de arredondamento nas respostas dos exercícios 8a e 8b. A solução do exercício 10 supõe uma independência que não está no enunciado.

P. 224-225: Há erro de arredondamento nas respostas dos exercícios 2a e 5a. Estão erradas as respostas dos exercícios 339d, 341c, 346, 351b.

Na resposta do exercício 1b da p. 238, aparece uma reta perpendicular a um plano; no entanto, o conceito de reta perpendicular a plano só é apresentado na página 240.

P. 262: Está errada a resposta do exercício 18.

P. 285: Está errada a resposta do exercício 7b.

P. 291: Está errada a resposta do exercício 4.

P. 295: Está errada a resposta do exercício 2.

P. 298: Estão erradas as respostas dos exercícios 2 e 6.

P. 299: Está errada a resposta do exercício 416.

Não há sentido em dar $\frac{164300}{3}$ como resposta do exercício 440 da p. 300, tendo antes mandado aproximar $\sqrt{3}$ por 1,7.

P. 304: Há erro de arredondamento na resposta do exercício 4.

P. 312: Está errada a resposta do exercício 3.

P. 316: Falta um $\pi$ na resposta do exemplo.

P. 318: Está errada a resposta do exercício 7.

P. 320: Está errada a resposta do exercício 10.

P. 328: Está errada a resposta do exercício 15b.

Está errada a resposta do exercício 491.

De um modo geral, nos exercícios de Geometria, a falta de critério nas respostas dos problemas que envolvem os corpos redondos é total. Em alguns, $\pi$ é $\pi$; em outros, $\pi$ é 3,14 e, nestes, muitas vezes $\sqrt{3}$ é $\sqrt{3}$, e não 1,73, e algumas vezes é 1,7.

Estão incompletas as respostas das Questões dos Últimos Vestibulares 11 e 32.

Nos Testes dos Últimos Vestibulares, não há alternativa correta no teste 18, enquanto há mais de uma alternativa correta no teste 27.

## APÊNDICE 3: Erros de datilografia ou impressão

P. 28: No segundo exemplo há erro de datilografia.

P. 51: Há erro de datilografia no exerc. 41a (falta o símbolo de grau).

P. 64: Há um erro de datilografia; está cosec onde deveria estar cosec $x$.

P. 98: Há uma falha de impressão no exercício 145.

P. 100: Há um erro de impressão no quarto exemplo. Está $\operatorname{sen} x < 1$ e deveria estar $\operatorname{sen} x < -1$.

P. 106: Há um erro de impressão. Está $-(2\sqrt{3})^2$ onde deveria estar $+(2\sqrt{3})^2$.

Há um erro de impressão na p. 139, com a repetição de três parágrafos.

Na questão 5 das Questões dos Últimos Vestibulares, há um erro de impressão: falta o sinal de igual.

Há um erro de impressão no teste 30 dos Testes dos últimos vestibulares: está $K'$ onde deveria estar $K$.

*Giovanni e Bonjorno*

# Coleção Matemática 2º Grau – volume 3

## UNIDADE 1: ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

### Capítulo 1. Conceitos Iniciais

Nas páginas 10 e 11, encontra-se uma falta de coerência na nomenclatura: apesar de na apresentação da geometria da reta só se usar o nome "coordenada", já na primeira série de exercícios o nome "coordenada" desaparece, sendo substituído por "abscissa", sem maiores explicações.

Na dedução da fórmula da distância entre dois pontos (p. 13), não se consideram os casos em que $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$ (onde a figura seria outra), e a dedução (como sempre) é feita no 1º quadrante, acompanhada da frase: "lembramos [??] que a fórmula vale, mesmo quando $A$ e $B$ estão em diferentes quadrantes". Note-se que a notação aqui sugerida $d(A, B)$ será freqüentemente trocada pela inconveniente $d(AB)$ (por exemplo, p. 57 e 58).

A falta de uma apresentação vetorial (no livro, nenhum sentido é atribuído a $x_1 - x_2$, apenas a $|x_1 - x_2|$) torna a dedução da fórmula das coordenadas do ponto médio de um segmento (p. 16 e 17) algo extremamente complicado, ao longo de duas páginas, incluindo uma dedução redundante para a segunda coordenada do que já havia sido feito para a primeira, deixando a impressão que por estar o eixo $Y$ na vertical, não vale o mesmo que para o eixo $X$, que está na horizontal. E como o livro só abordou ponto médio, por este processo específico, ignorando pontos que dividissem segmentos em outras razões, a solução do terceiro exemplo da p. 18 ficou complicadíssima. O mesmo ocorre mais adiante, na p. 42.

### Capítulo 2. Estudo da reta

A experiência didática tem mostrado que a condição de alinhamento de três pontos, dada em forma de um determinante (p. 22), apesar de ser uma bonita fórmula, não deve ter o destaque que tem neste livro (e em muitos outros), pois deste modo acaba funcionando como a receita de bolo favorita em matéria de equação de reta, escondendo os significados dos termos envolvidos. A expressão $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, considerada como intermediária nesta abordagem, é muito mais ilustrativa do que a expressão por meio de um determinante. Mais adiante, aliás (p. 32), na "equação geral da reta", também não é mencionado o caso de uma reta vertical, que exigiria uma dedução à parte.

Na página 27, relacionando equações de retas com gráficos de funções, aparece o termo "função do primeiro grau", que, no Volume 1, figurava mais apropriadamente como "funções polinomiais de primeiro grau".

Na página 33, dentro do estilo típico do livro, o fato de que as equações $x + y = 0$ e $x - y = 0$ representam as bissetrizes dos quadrantes é apresentado como uma "observação", sem nenhuma explicação, e nem mesmo uma figura.

A apresentação das equações paramétricas (p. 36) de uma reta é feita sem nenhuma motivação e sem nenhuma aplicação interessante em que o parâmetro pudesse ter uma interpretação geométrica ou física (por exemplo, o tempo). O leitor fica sem saber porque inventaram equações paramétricas e para que elas servem. Mais uma vez, a abordagem vetorial também faz falta.

O 4º exemplo da página 39 dá as coordenadas de três vértices $B$, $C$, $D$ de um quadrado (ou seja, dados não independentes), e pede para determinar a equação da reta suporte do lado $AB$. O exercício é resolvido usando apenas a condição de paralelismo; de fato, a condição de perpendicularidade só virá mais adiante. Isto tudo confunde o aluno. O recomendável seria fazer o exemplo com um paralelogramo. O mesmo ocorre no exercício 9 da página 40.

A apresentação do "ângulo de duas retas" (ps. 53 e 55) inclui complicações desnecessárias e inconsistências: "Chamando de $\varphi$ o ângulo $\theta$ ou o ângulo $\gamma$". Impossível, pois $\theta$ e $\gamma$ são suplementares e não-retos e a tangente de $\varphi$ é não-negativa, por ser o valor de um módulo. Em seguida, apesar de a tangente de $\varphi$ ser não-negativa, discute-se o que fazer no caso de a tangente de $\varphi$ ser negativa. Há uma desnecessária dedução de várias linhas, incluindo fórmulas trigonométricas, para concluir o que fazer no caso em que uma das retas é vertical.

A dedução da fórmula da distância de ponto a reta (p. 58 e 59) padece de vários defeitos. Como sempre, o caso da reta vertical não é justificado ("Observemos que a fórmula é válida quando a reta é vertical ..." [?]). Não é percebido que parte dos argumentos oferecidos só valem se o coeficiente angular da reta for negativo, quando seria fácil adaptá-los. Note-se mais uma vez a complicação e a artificialidade da dedução apresentada, por falta de uma abordagem vetorial. Finalmente, quem vem acompanhando o estilo do livro percebe que esta dedução não é de fato para ser estudada, não havendo a preocupação de explicar passagens obscuras, tais como: "se $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\theta$, vem:", onde, no mínimo, deveria estar "como" em vez de "se".

Na dedução da fórmula da área do triângulo (p. 65), o livro "prova" (erradamente) que a área do triângulo é a metade do valor de um determinante (só é porque se usa uma figura particular). Em seguida vem a observação: "sabendo que a área de um triângulo é sempre positiva, temos:", introduzindo um módulo na fórmula (errada) que se acaba de deduzir. Ou seja, deduz-se uma fórmula, erradamente; percebe-se que está errada; aí, então, "observa-se" a fórmula certa! Note-se ainda que a única vantagem que poderia ser obtida de se ter deduzido a equação da reta sob a forma de determinante era a de em poucas linhas se obter a fórmula da área do triângulo e, no momento em que aparece a oportunidade de aproveitar o determinante, parte-se para outra dedução.

Uma falha séria desta seção sobre retas é que em lugar nenhum é feita (muito menos analisada e respondida) a pergunta: "o que representa a equação $ax + by + c = 0$?" Aliás, em lugar algum do livro se diz com clareza o que seja a equação de uma curva, e não há nem ao menos um problema de lugar geométrico.

**Capítulo 3. Circunferência**

De maneira análoga ao que ocorreu no estudo de retas, não é colocada claramente nesta seção a questão: "o que representa a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ?". Em compensação, é dada ênfase na distinção exagerada e pouco conceitual entre "equação reduzida" e "equação geral" da circunferência. Já a classificação das circunferências, quanto a posições relativas (p. 93), separa indevidamente o caso das concêntricas.

Só podemos atribuir à má redação (o que é injustificável num livro didático de Matemática) a expressão (p. 79): "o centro $C(x, y)$ da mediatriz de $AB$ é ..."; ou a frase (p. 81): "Como $r^2 = -1$ não pertence ao conjunto dos reais, ...". Não é crível que os autores realmente pensem assim.

Na p. 89, a figura parece sugerir que as tangentes comuns a uma circunferência sejam perpendiculares. E logo no primeiro exemplo, de fato o são. Fica no leitor a dúvida sobre se isto é sempre verdade, ou se se trata apenas de uma escolha repetidamente infeliz, que sem dúvida levará confusão ao iniciante.

**Capítulo 4. Cônicas**

Logo no início deste capítulo, as cônicas aparecem como seções de um cone, mas em nenhum lugar do livro é feita a relação entre as cônicas, tais como serão caracterizadas por propriedades de Geometria plana, e a maneira como são obtidas as seções do cone. Os pertinentes "teoremas belgas" não são sequer mencionados. Acrescente-se que, na figura da p. 98, a parábola não parece obtida por uma seção paralela à geratriz do cone, como deveria ser, enquanto a figura da hipérbole está acentuadamente particularizada, parecendo sugerir que a hipérbole deva ser obtida por um plano paralelo à geratriz do cone.

Na apresentação da parábola (p. 99), a figura está muito descuidada, estando flagrantemente diferentes os comprimentos dos segmentos que deveriam ser congruentes. Tal fato ocorrerá mais adiante também nas ps. 100 e 101. Mais sério é o fato de que o eixo de simetria é apresentado pela frase: "a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz chama-se eixo ou eixo de simetria da parábola", como se este fosse um nome dado arbitrariamente. Que esta reta seja um eixo de simetria, é uma propriedade, significando que um ponto pertence à parábola se e só se seu simétrico em relação a esta reta também pertence. Sua justificativa aliás seria facílima, e ilustraria bem a definição que acaba de ser dada. Mas o livro não costuma conectar os diversos fatos da Matemática.

Na p. 101, encontra-se mais uma dedução redundante, onde bastava trocar $x$ por $y$. Curiosamente, este ponto de vista mais sensato é adotado para o caso da elipse, na p. 112.

A apresentação da elipse (ps.110/111) contém falhas conceituais graves. A definição de elipse não exige que a soma das distâncias seja maior do que a distância entre os pontos fixos (o curioso é que tal erro não é cometido na segunda definição de hipérbole (p. 119), embora o seja na primeira (p. 118)); uma elipse tem apenas dois vértices (e de fato, somente dois vértices são calculados no exemplo 3 da p. 113); e a constante $2a$ às vezes é a distância entre os vértices e às vezes é a constante da definição, mas em parte alguma do livro se prova, ou, pelo menos, se comenta a equivalência das definições (o mesmo ocorre para a hipérbole, na p. 119).

A dedução da equação da elipse (p. 112) contém uma falha. É feita uma elevação ao quadrado de ambos os membros de uma equação, sem a necessária verificação se não foram introduzidas soluções estranhas. O máximo que se prova é que todo ponto da elipse satisfaz à equação final, mas não a recíproca. O mesmo erro ocorre mais adiante (p. 120) na dedução da equação da hipérbole, onde ainda se encontra um módulo que subitamente desaparece.

É criticável a redação da frase: "... forma padrão da equação da elipse ou equação reduzida de focos sobre ..." (p. 112, duas vezes), enquanto na p. 119, o eixo não-transverso recebe o inusitado nome de eixo conjugado.

Na p. 124, para determinar as equações das assíntotas, há necessidade, por exemplo, de escrever a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto $(a, b)$, o que é feito por determinantes (!!). Novamente a preferência pela receita de bolo, em detrimento da solução mais conceitual.

Note-se finalmente que, de maneira análoga ao que ocorreu no estudo de retas, circunferências e parábolas, não é colocada em nenhum ponto desta seção a questão: "o que representa a equação $ax^2 + by^2 + cx + dy + c = 0$?".

### Considerações finais sobre o capítulo

Como se viu, o capítulo contém diversos erros conceituais e falta de cuidado nas figuras. Este capítulo pretende apresentar mais deduções do que é usual no livro, e isto seria positivo, se essas deduções não contivessem tantas falhas. Como sempre no livro, há uma tendência ao uso de receitas.

Além disto, há omissões importantes:

Não há nenhuma menção a eixos radicais, apesar de ter sido determinado um eixo radical no exemplo da p. 94.

Em parte alguma do livro se define o parâmetro da parábola.

Não há nenhuma menção às hipérboles com assíntotas nos eixos coordenados, tão freqüentes em Física, ou às propriedades refletoras das parábolas e das elipses. Não se encontra nenhum problema de movimento de projéteis.

Como já se disse, não se discutem lugares geométricos usuais, nem o que representam equações tais como $ax + by + c = 0$.

Finalmente, não há uma única alusão ao mais que importante conceito de vetor, que tanto simplificaria várias deduções e diversos problemas (como os ligados a perpendicularismo, por exemplo), esclareceria muitas questões de orientação, e faria mais uma ponte entre a Matemática e a Física.

### APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos

P. 27: O exercício número 3 apresenta um custo que diminui com o aumento da produção. Provavelmente, foi tirado de algum lugar onde este custo era o custo unitário do produto.

P. 68: O enunciado do problema 16 não faz sentido: "Sabendo-se que os pontos $P(a, b)$, $A(-1, -2)$ e $B(2, 1)$ são colineares simultaneamente com $P(a, b)$, $C(-2, 1)$ e $D(1, -4)$, calcule $a$ e $b$".

P. 82: É inadequado o exercício 1b "identifique o conjunto dos pontos ...". O conjunto em questão é uma elipse, curva que ainda não foi apresentada aos leitores. A resposta é uma identificação negativa: "não é circunferência". Realmente, não é uma circunferência, não é uma reta, não é uma epiciclóide, etc.

P. 88: A figura do exercício 5 está incorreta, já que o centro da circunferência dada não está no 1º quadrante.

O exercício 10 da p. 114 pede para calcular "o vértice" de uma elipse. Na resposta, já aparecem dois. Ainda assim, está faltando... Erro análogo ocorre no exercício 159 da p. 128.

P. 116: O exercício 3 pede a equação de uma elipse, dada a excentricidade e o valor de "$a$", mas não há nenhuma indicação dos eixos adotados. Logo, o problema admite infinitas soluções.

## APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios

P. 23: O segundo exemplo pede para determinar o valor de $a$ ... e a resposta é um conjunto!

P. 56: Na resposta do exemplo 2, mais uma vez aparece a confusão com as conjunções *e* e *ou*.

P. 57: Está errada a resposta do exercício 3.

P. 82: Está errada a resposta do exercício 4a.

P. 85: Há erro na solução do primeiro exemplo pelo segundo modo.

P. 94: A resposta do exercício 3 está incompleta: as circunferêncais são tangentes exteriormente.

P. 97: As respostas dos exercícios 133b, 133c estão erradas. Aliás o enunciado do exercício 133 é falho. Um quadrado $ABCD$ no qual $AB$ é diagonal ...

P. 116: A resposta do exercício 2 está errada.

P. 118: A resposta do exercício 4b está errada.

P. 128: Estão erradas as respostas dos exercícios 144, 156, 158.

P. 129: Está errada a resposta do exercício 172.

A resposta do teste de vestibular 95 está errada.

No teste 96 há várias soluções além da indicada.

# UNIDADE 2: OS NÚMEROS COMPLEXOS

### Capítulo 5. O Conjunto dos Números Complexos

A apresentação dos Números Complexos nos livros didáticos tem sido insatisfatória. A abordagem costuma ser meramente algébrica, e o número $i$ "cai do céu". Sente-se uma pressa em livrar-se dessas dificuldades iniciais, e cair o mais rápido possível nos exercícios do tipo: "calcule $(2+i)/(3-2i)$", etc. Este livro não é exceção, embora se deva registrar um ponto positivo: enquanto muitos livros afirmam, sem maiores explicações, que os números complexos nasceram da necessidade de resolver equações do 2º grau com discriminante negativo, o presente livro ressalta corretamente que esta necessidade só surgiu no contexto da resolução de equações do 3º grau. Como, porém, em nenhum lugar vai aparecer a fórmula de Cardano, a explicação ainda assim permanece obscura para o aluno.

No entanto, na hora de trabalhar os detalhes, o livro comete diversas impropriedades.

Na p. 142, há uma espécie de revisão de evolução dos conjuntos numéricos, onde mais uma vez aparece o uso impróprio do "observe": "Observe que não existe número racional cujo quadrado seja 2". Esta proposição não se observa, demonstra-se, e sua demonstração é fácil e instrutiva. Já a "explicação" de que os irracionais "foram criados para tornar possível a medida de qualquer segmento" certamente não se aplica a irracionais negativos.

São particularmente infelizes o título "Equações do segundo grau com solução impossível" (p. 142) e a frase (p. 143): "Para simplificar a notação, criou-se o número $i$ de modo que o quadrado desse número fosse igual a $-1$ ...". A existência do número $i$ não é uma questão de notação.

Após as três primeiras seções de introdução, a seção 4 intitula-se "Os números complexos", e inicia-se com: "sabendo-se que $i^2 = -1$, temos: $\sqrt{-c} = \sqrt{c(-1)} = \sqrt{ci^2} = (\sqrt{c})i$". Além de que não é dito se $c$ é real, isto tudo é feito antes de sequer definir as operações com números complexos, o que será feito a partir da seção 8. Ou seja, o aluno não sabe ainda somar nem multiplicar números complexos, mas "sabe" que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ e que $\sqrt{i^2} = i$. E o que é mais grave é que, devido à ambigüidade da notação $\sqrt{a}$ para um complexo, estas propriedades só são válidas se usadas com muito cuidado. O leitor deste livro será presa fácil do célebre sofisma:

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{3i^2 \times 3i^2} = \sqrt{3i^2}\sqrt{3i^2} = \sqrt{3i}\sqrt{3i} = 3i^2 = 3(-1) = -3.$$

Na p. 145, na quinta linha, aparece um "portanto" que sugere que a definição de imaginário puro seja uma conseqüência do que foi exposto anteriormente, e não uma legítima definição. Por sinal, a definição dada de imaginário puro exclui erradamente o zero do conjunto dos imaginários puros. Já uma linha após a definição, no quadro, a própria definição do livro não é seguida, pois deveria estar escrito: "$z = bi$ (é um número imaginário puro, *caso $b$ seja diferente de zero*)".

É incoerente que a definição de igualdade de complexos seja colocada (p. 146) depois que já foram resolvidos e enunciados vários exercícios, cuja resolução seria impossível sem se saber quando complexos são iguais. Não foi percebido que isto faz parte da definição de número complexo.

A divisão de números complexos é apresentada (p. 149) como uma receita: "a divisão de dois números complexos ... pode ser obtida escrevendo-se o quociente em forma de fração (sic); a seguir, procedendo-se de modo análogo ao utilizado na racionalização do denominador de uma fração (sic), multiplicam-se ambos os termos da fração pelo ... conjugado do denominador, isto é: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$ (sic)". Não há menção de que o número $\dfrac{z_1}{z_2}$ é tal que multiplicado por $z_2$ é igual a $z_1$.

Na p. 151, mais uma vez, "observa-se" o que ocorre com as potências de $i$.

**Capítulo 6. Forma Trigonométrica de um Número Complexo**

P. 153: A imagem de um complexo é chamada de "afixo", quando é justamente o contrário: afixo de um ponto é o complexo cuja imagem é o ponto. Esta confusão, aliás, é muito comum nos livros didáticos brasileiros.

P. 155: Não há nenhuma razão para restringir o argumento de um complexo ao intervalo $[0, 2\pi[$. Pelo contrário, isto invalida a propriedade que virá mais adiante (p. 162), de que o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores [aliás enunciada assim: "o argumento do produto é a soma dos argumentos dos complexos dos fatores(!)"]. O mesmo ocorre com o argumento do quociente, e, mais adiante, na p. 167, na consideração das raízes de um complexo.

**Capítulo 7. Operações na Forma Trigonométrica**

Nas ps.164–165, apesar da fórmula de De Moivre só ter sido demonstrada para expoentes inteiros positivos, já no segundo exemplo ela é aplicada sem maiores explicações para um expoente negativo.

O livro adota o ambíguo símbolo $\sqrt[n]{z}$ para significar todas as $n$ raízes $n$-ésimas do complexo $z$. É uma opção arriscada e que é feita por muitos autores, mas no mínimo deveria ser chamada a atenção do iniciante para o fato de que o mesmo símbolo aparece duas vezes na mesma fórmula (p. 167, e várias vezes depois), com significados diferentes: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \ldots$

Na p. 167, a restrição $z$ diferente de zero já deveria ter aparecido desde o momento em que se tomou o argumento de $w$.

Para concluir, deve ser notado que a geometria dos complexos é pouco explorada, na realidade, não há nenhuma aplicação dos números complexos à Geometria ou à Física. Ainda assim, é uma das melhores partes do livro.

**APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos**

P. 145: O enunciado, não a resposta, deveria dizer que $m$ e $n$ são reais. Se o enunciado não diz isso, então $m$ e $n$ podem não ser reais e, neste caso, há outras soluções; por exemplo, $n = i$ e $m = 26i$ é solução da parte a.

Pelo mesmo motivo estão errados os exercícios 1, 2 e 3 desta página.

No exercício 1 deveria estar "determine $k$ REAL ..."

No exercício 2 deveria estar "determine $m$ REAL ..."

No exercício 3 deveria estar "determine $x$ e $y$ REAIS ..."

P. 146: O exemplo deveria ser "determinar $x$ e $y$ REAIS ..."

No exercício 1 deveria estar "determine $a$ e $b$ REAIS ..."

No exercício 2 deveria estar "determine $a$ e $b$ REAIS ..."

No exercício 3 deveria estar "determine $x$ e $y$ REAIS ..."

Na definição de conjugado deveria estar "... $z = a+bi$, $a$ e $b$ REAIS, define-se ..."

P. 148: No exemplo 2 deveria estar "determine $x$ REAL ..."

No exercício 2 deveria estar "calcule $a$ e $b$ REAIS ..."

P. 149: No exercício 12 deveria estar "determine $x$ e $y$ REAIS ..."

P. 150: No exercício 7 deveria estar "determine $a$ e $b$ REAIS ...".

P. 151: Embora o exemplo esteja bem desenvolvido, a afirmação antes do exemplo "portanto ..." é, além de injustificada, mais um exemplo de uso inadequado da palavra *portanto*.

No exercício 177 deveria estar "determine os valores de $x$ e $y$ REAIS ..."

P. 152: No exercício 184 deveria estar "ache $a$ e $b$ REAIS ..."

Ps. 156/157: Os exercícios 2, 3 e 4 são interessantes, mas sua solução seria simplificada se tivesse havido o trabalho de mostrar que o módulo da diferença de dois complexos é igual à distância entre suas imagens.

P. 157: No exercício 7 deveria estar "calcule $b$ REAL ..."

As respostas do exercício 9 estão erradas.

É estranho que se resolva trigonometricamente a equação $x^2 = -4$ (p. 169), que tinha sido resolvida logo no início do capítulo (p. 144), sem que seja feito nenhum comentário.

P. 171: O exercício 235 pede a determinação do menor argumento positivo de um complexo. Como, se pela definição dos autores o argumento é único?

O enunciado do teste de Vestibular 108 deveria dizer $x$ REAL. Não sendo $x$ necessariamente real, há outras soluções, como, por exemplo, $x = \dfrac{\sqrt{15}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$.

## APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios

Está errada a resposta do exercício 189.

P. 160: As respostas do exercício 217 são insatisfatórias. Na da parte a, a elipse parece uma circunferência e na parte b, estão assinaladas apenas as circunferências que delimitam a coroa, mas não a coroa.

A resposta correta do teste de Vestibular 140 é $C$.

## APÊNDICE 3: Erros de imprensa

Na p. 154, aparece $|a + b|$, onde deveria estar $|a + bi|$.

## UNIDADE 3: POLINÔMIOS

### Capítulo 8. Polinômios

Este capítulo não apresenta erros conceituais graves, mas ainda assim merece alguns reparos.

A apresentação de polinômios idênticos (p. 180) é confusa. O teorema da identidade de polinômios é citado apenas de passagem e, evidentemente, não é demonstrado, apesar de o Volume 2 conter toda uma seção inútil sobre o determinante de Vandermonde, que poderia ter sido usado aqui. O sinal $\equiv$ aparece sem maiores explicações, mas dá para entender que é o sinal de idêntico, por causa do quadro. Mas o livro não segue sua própria notação quando escreve $P(x) = \ldots$ e não $P(x) \equiv \ldots$ Além disto, o segundo exemplo, uma aplicação à decomposição de uma fração racional em frações parciais, aparece sem nenhuma motivação. O aluno fica sem entender o propósito do exercício, e também não entenderá porque não se menciona o problema de $x$ ser igual a 1 ou $-4$, já que agora temos denominadores.

Na p. 183, encontramos um exemplo típico de mau uso dos símbolos matemáticos: "Se $B(x)$ é divisor de $A(x) \Leftrightarrow R(x) = 0$".

Ps.193/194: É má a apresentação do tão usado dispositivo de Briot–Ruffini. Em primeiro lugar, não é justificado, embora sua justificativa não apresentasse problemas. Mas o que é pior, o dispositivo é logo feito para um "binômio da forma $ax + b$", embora o que segue só serviria se $a = 1$. No segundo exemplo, os autores reparam que o que ensinaram está errado quando $a \neq 1$ e então dizem: "observe que o coeficiente de $x$ no binômio não é igual a 1; fizemos, então, a divisão de $P(x)$ por $(x - 1/3)$ e para termos os coeficientes de $Q(x)$ devemos dividir os coeficientes obtidos no dispositivo prático por 3"...

Na p. 196, para fatorar um polinômio do segundo grau (!), conhecidas suas raízes, utiliza-se o dispositivo de Briot–Ruffini! E isto três vezes!

### Capítulo 9. Equações Polinomiais

Este capítulo é mal redigido, deixando entrever a falta de boa conceituação matemática do livro.

A introdução (p. 202) inicia com a frase: "Desde o tempo dos faraós até nossos dias, o objetivo básico da Álgebra continua o mesmo: permitir a solução de problemas matemáticos que envolvam números desconhecidos. O desconhecido – ou incógnita – é traduzido por um símbolo abstrato que se manipula até que seu valor possa ser estabelecido". Na realidade, esta era a visão da Álgebra no final do século XVIII. Desde as primeiras décadas do século XIX, com os estudos sobre grupos e corpos, e com a generalização do conceito de função, a Álgebra não se reduz mais a isto.

A definição de equação polinomial de grau $n$ (p. 202) não exige, como deveria, que o coeficiente de $x^n$ seja diferente de zero.

P. 203, exercício 4: Resolvendo a equação $x^2 - x^2 - x + 1 = 0$, o livro dá a resposta $S = (-1, 1)$. Resolver uma equação é determinar suas raízes. As raízes da referida equação são 1 (dupla) e $-1$ (simples).

A apresentação do Teorema Fundamental da Álgebra e do conceito de raiz múltipla é confusa. Primeiramente, apresenta-se o Teorema (p. 204). Até aí, tudo bem. Em seguida, vem a seção: "Teorema da Decomposição", que inicia: "Como (sic!) todo polinômio $P(x) \ldots$ pode ser escrito na forma fatorada $P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, ..., podemos enunciar o seguinte teorema: Toda equação polinomial $P(x) = 0$, de grau $n \geq 1$ tem exatamente $n$ raízes reais ou complexas". E isto antes de falar em raízes múltiplas! Em primeiro lugar, se não se fala em raiz múltipla, esta afirmativa é falsa. Em segundo lugar, o "como" é justamente o teorema da decomposição. Note-se que, muito antes desta seção, a decomposição (supondo a existência de raízes) era uma "observação" (p. 192). Diante disto, passa a ser apenas um detalhe que falta a restrição $a_n \neq 0$.

Em seguida, vem a "definição" de raízes múltiplas: "as raízes ... podem ser distintas ou não ...", sem nenhuma alusão sobre o seu papel na forma fatorada, o que torna incompreensível este conceito.

P. 207: A demonstração do teorema das raízes complexas baseia-se em propriedades de complexos conjugados que não são sequer citadas (apenas a da soma de duas parcelas constitui objeto de um exercício). Dá a impressão que a presença da demonstração não tem como objetivo que o aluno entenda o porquê, e sim que é uma lamentável obrigação da qual os autores pretendem se livrar rápido para poderem cair na calculeira que tanto lhes agrada. Além disso, parte essencial do teorema, a igualdade das multiplicidades, é apenas uma observação.

Nem no enunciado das relações de Girard (p. 209), nem nos exemplos e exercícios, o livro deixa bastante claro que essas relações só são válidas se considerarmos as raízes complexas, e que cada uma deve entrar com sua multiplicidade.

P. 213: Não há a menor sombra de justificativa para o teorema das raízes racionais dos polinômios de coeficientes inteiros. Talvez por isto, seja apresentado como "propriedade", para que ninguém sinta falta da demonstração.

Nenhum gráfico de polinômio, nenhuma interpretação da multiplicidade de uma raiz, nenhum teorema que permita calcular aproximadamente raízes ou pelo menos localizá-las. Nenhuma menção do uso de calculadoras no cálculo das raízes de um polinômio. Há uma indevida insistência em achar que o importante é determinar o conjunto das soluções, evidenciando que não foi assimilada a importância do conceito de raízes múltiplas, tão mal apresentado.

**APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos**

P. 190, exercício 10: Pelo menos na parte a, a restrição deveria ser $n \in \mathbb{N}^*$.

P. 200, exercício 257: Para que a resposta esteja certa, o enunciado deveria dizer que $a$ e $b$ são reais.

P. 211, terceiro exemplo: Há um erro, $P\left(\frac{7}{3}\right)$ não é igual a $-\frac{44}{9}\cdot$ Além disto, este exemplo contém dados demais (dada a equação, suas raízes já estão determinadas). Se o livro fizesse a conexão entre duas diversas partes, este exemplo poderia ter sido deixado para o capítulo de derivadas, onde o fato de que a equação tem uma raiz dupla poderia ser uma conclusão do aluno.

P. 213: Inaceitável a redação do exercício 16. "... iguais e de sinais contrários ..."

**APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios**

P. 216: Está errada a resposta do exercício 321b.

**APÊNDICE 3: Erros de imprensa**

P. 191: Erro de digitação. Está $\alpha n$ em vez de $\alpha_n$ . Há um erro de transcrição numa fórmula (um beta vira alfa), e não parece um mero erro de imprensa, pois é repetido linhas adiante.

P. 201: Há um erro de digitação no exercício 278, um parêntese aberto indevidamente.

## UNIDADE 4: LIMITES

### Capítulo 10. Limites

O livro coloca aqui uma Unidade que trata de alguns pontos do Cálculo Diferencial, iniciando por um Capítulo sobre Limites. O conceito de limite aparece obrigatoriamente em vários contextos da Matemática elementar, como, por exemplo, no cálculo do comprimento e da área do círculo, mas de fato ele já está presente desde o momento em que são introduzidos números irracionais e as operações com eles. Uma tradição discutível adia o estudo destes conceitos até os cursos superiores, quando então podem ser abordados em um nível de formalização que muitas vezes assusta o iniciante (os célebres épsilons e deltas). Na realidade, o conceito de continuidade, por exemplo, além de ser um conceito básico e fundamental da

Matemática, é também um conceito bastante intuitivo ("pequenas causas produzindo pequenos efeitos"); o que pode ser complicado é uma certa forma de apresentá-lo (forma esta que um matemático ou um professor de matemática deve conhecer). Conceitos matemáticos podem ser apresentados de forma intuitiva e correta, ou então incorretamente, embora com uma roupagem formal.

Em face deste conhecido problema didático, o presente livro adota uma atitude trágica: os conceitos e propriedades dos limites são apresentados em forma de receitas de bolo.

Conceitos importantes estão errados, não são devidamente motivados, enquanto propriedades simples de justificar, não o são.

O capítulo inicia com um exemplo motivador (p. 226), que se refere a uma realização "discreta" do conceito de limite: trata-se da série $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, tema que não é desenvolvido depois, já que o livro só abordará limites no contexto "contínuo" de funções reais de variável real. Além disto, é imprópria a afirmação: "Quando dizemos que a área hachurada tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor". Se isso fosse verdade, o limite determinado no exemplo seguinte $\left(\lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5\right)$ não existiria.

Há, na própria definição de limite (p. 227), uma insistência descabida nos limites laterais. A afirmação: "Para que exista o limite ..., isto é: $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = \lim\limits_{a_+} = \lim\limits_{x\to a} f(x)$" implica a inexistência de $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ e também a de $\lim\limits_{n\to 2}\sqrt{\dfrac{n^3 - 4n^2 + 4n}{n^2 - 2n}}$, limites estes que os autores afirmam, às p. 231 e p. 250, serem iguais a zero.

É difícil imaginar qual seja o objetivo do quarto exemplo que ilustra o conceito de limite (p. 228), onde se pede para calcular o limite de um quociente de funções polinomiais em um ponto de seu domínio "e interpretar o resultado". A resolução é a seguinte: "Como veremos adiante, $f(x) = \dots$ é contínua em $x = 1$. Podemos então calcular o limite de um modo mais rápido [na realidade, não há nenhum cálculo anterior], substituindo $x$ por 1". Isto, quando se quer ilustrar o conceito de limite! Aliás, não se entende como um aluno pode resolver qualquer dos exercícios da p. 229, já que não há uma definição de limite, a não ser o arremedo de definição que se encontra no final da p. 228. Parece que o espírito da coisa é usar o "método" do exemplo citado: para calcular o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$, substitua $x$ por $a$. Fica claro que o fim último é produzir uma resposta, e não entender o que é limite. Lendo livros como este, não surpreende que os alunos achem difícil o conceito de limite.

Nas páginas 230 e 231, vêm os "Teoremas sobre Limites". Nenhum deles é justificado, nem mesmo por uma figura ilustrativa, ou qualquer outro recurso.

Para os autores, apresentar limites de forma fácil para os alunos significa: "chutar" todos os resultados e partir para os exemplos numéricos. Note-se também que a restrição $a > 0$ no limite da potência (p. 231) é descabida, pois para os autores $n$ é natural, sendo que, nos exercícios, os autores usam a propriedade para $a < 0$.

Na p. 232, é introduzido o conceito de função contínua. Não foi percebido que uma ótima ocasião para isto já havia passado, pois os teoremas da página anterior sobre potência e raiz na realidade significavam que estas funções eram contínuas. A seção inicia-se com a "observação" de que uma função contínua é aquela em que "o gráfico pode ser desenhado de uma só vez, sem levantar a ponta do lápis do papel". Isto é falso, como ilustra, por exemplo, a função definida por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$, com $f(0) = 0$. Além disto, não é operacional, pois para aplicá-lo, seria necessário antes fazer o gráfico da função. De qualquer modo, a situação é ilustrada por três gráficos, acrescentando-se: "Note (sic) que para a função $f_2$ não existe $\lim f(x)$ (quando $x \to a$)", o que é falso, pois este limite é $L$. Finalmente, fecha-se o círculo vicioso, já que continuidade é definida pelo limite, embora nos exemplos limite seja calculado por substituição. Isto fica patente logo no incrível 1º exemplo: "verificar se a função $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ é contínua em $x = 3$". Naturalmente, $f(3)$ é calculado por substituição. Mas o limite também: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5$. Fica a impressão de que, pelo fato de ser fatorado o numerador e simplificado um fator não nulo, "foi calculado um limite" (ver receitas na p. 239).

Na seção 7, são introduzidos alguns limites infinitos. Podemos avaliar o nível conceitual com que isto é feito pelo 2º exemplo (p. 236), onde aparece o gráfico da função $f(x) = x$, seguido de: "a partir do gráfico, podemos concluir que: quando $x$ tende a mais infinito, $y$ tende a mais infinito ...". Note-se que nenhuma definição anterior deste tipo de limite havia sido dada.

Na p. 237: "$\dfrac{\infty}{\infty}$ (é um) símbolo que representa uma indeterminação" é afirmado sem maiores explicações, como se fosse a coisa mais óbvia do mundo.

As seções envolvendo limites de funções racionais são encerradas com um "Resumo importante" (p. 240), onde o importante é achar uma resposta para cada exercício, mesmo que não se entenda o que se está fazendo, e ainda assim contendo frases como: "... dividir a fração por uma expressão conveniente do numerador (denominador)" (p. 241, sic).

Finalmente, é insuficiente e confusa a apresentação do número $e$. Quando se pensa que o número $e$ seria definido por $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, isso surge como um teorema ("pode-se demonstrar ...").

Todo este capítulo de limites é altamente deseducativo.

**Capítulo 11. Derivadas das funções elementares**

O capítulo de derivadas é muito melhor que o de limites. As seções introdutórias motivam bem a derivada graficamente, e os conceitos estão corretos. É um verdadeiro contraste com o capítulo anterior.

A partir da seção 3, não se entende por que não justificar, por exemplo, que a derivada de uma função constante é nula, assim como todas as propriedades das seções 3 e 4, tão fáceis de demonstrar (derivadas das funções elementares e regras de derivação).

É louvável que haja uma seção de "aplicação da derivada ao estudo do movimento" (p. 270).

De qualquer forma, este é um dos melhores capítulos do livro.

**Capítulo 12. Estudo local das funções deriváveis**

O título pretensioso deste capítulo sugere uma mudança de tom em relação ao anterior. De fato, a idéia é tratar da importante aplicação de derivada a problemas de máximos e mínimos, mas o livro agora deixa claro sua falta de conceituação.

Em primeiro lugar, não percebe que a pesquisa de extremos relativos é apenas um passo intermediário para a pesquisa de extremos absolutos, que é a que importa.

Em seguida (p. 276), vêm os teoremas que relacionam o crescimento de uma função em um intervalo (curiosamente, nos enunciados só aparecem intervalos da forma $[a, b]$; é claro que isto não é respeitado posteriormente). Os enunciados dos teoremas (que não são demonstrados) estão corretos, mas as motivaçòes que vêm antes parecem sugerir as recíprocas, que são falsas, e também insinuam que, por exemplo, derivada positiva e função crescente em um intervalo são sinônimos. No entanto, na página 277, vem a afirmativa: "em geral, podemos ter:", e segue-se o enunciado correto. Dá a impressão de uma correção posterior.

Na seção 5, o livro, surpreendentemente (para quem não demonstrou nem que a derivada de uma função constante é nula) resolve demonstrar o teorema fundamental que relaciona a existência de extremos relativos com a nulidade da derivada (p. 281). O enunciado está correto, mas é impossível que um leitor deste livro acompanhe a demonstração. Por exemplo, o fato de que a razão incremental é sempre não-negativa à direita de $x_0$ implica que seu limite, caso exista, é também não-negativo. Esta propriedade não foi sequer comentada no capítulo de limites. Além disto, a demonstração é seguida de um parágrafo intitulado: "significado geométrico". Percebe-se que este é realmente o parágrafo que se espera que o leitor leia. E sua primeira afirmação é falsa: "se uma função ... tem derivada nos pontos de máximo ou de mínimo, a tangente à curva nesses pontos será paralela ao eixo $x$". Não é necessário procurar contra-exemplos complicados. A função $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 1$ desmente isto.

Aqui, toca-se num ponto onde o livro se perde, por falta de conceito. Nos teoremas sobre crescimento, fala-se em intervalo da forma $[a, b]$. No "significado geométrico", não se fala em intervalo nenhum. Logo em seguida, na p. 282, fala-se em "para todos os pontos do eixo $x$", isto é, o intervalo considerado é toda a reta. Nos exemplos e exercícios, esquece-se tudo isto, e não se faz mais menção desta preocupação. Por exemplo, no exemplo do volume da caixa (p. 288), nem sequer se menciona que $x$ deve estar entre 0 e 20, e muito menos se usa isto.

Um capítulo sobre máximos e mínimos deveria culminar com o esboço do gráfico de uma função. Apesar de se falar em derivadas sucessivas (para que?), não há nenhuma menção a concavidade ou a pontos de inflexão. Também não se fala de assíntotas (que já deveria ter aparecido em limites infinitos). Nenhum exercício de gráfico é proposto.

**APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos**

P. 272, exercício 366: "determine a expressão designatória da função $f'(x)$ ..." (sic).

P. 274: Seria curioso saber onde está o móvel do exercício 422 no instante em que começou a contagem dos tempos.

P. 288: Não há nenhum cuidado quanto às restrições sobre os valores de $x$ no terceiro exemplo ($x > 0$ e $x < 20$).

P. 290: A redação do exercício 427 é falha. Que é função crescente em pontos?

A maior parte dos exercícios de derivadas cria maus hábitos, pois as respostas dificilmente estão fatoradas.

**APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios**

P. 233: Na resposta do exercício 3c, repete-se um erro já notado há dois volumes atrás: confusão entre os conectivos *e* e *ou*. "Os pontos de descontinuidade são $x = 3$ ou $x = -3$" (sic). Tal tipo de erro aparece também nas respostas dos exercícios 1d (p. 279), 3a (p. 282), 425 (p. 290).

P. 242: A resposta do exercício 19 está errada.

P. 271: A resposta do exercício 5 só estaria correta se a trajetória fosse retilínea. O móvel descrevendo uma curva, a resposta encontrada é o valor da componente tangencial da aceleração.

P. 272: As respostas dos exercícios 378, 382 e 387 estão erradas.
P. 273: A resposta do exercício 400 está errada.
P. 286: A resposta do exercício 2 está errada.
P. 288: Há decimais demais na resposta do item b.
P. 289: Está errada a resposta do exercício 2.
P. 290: Estão erradas as respostas dos exercícios 426b, 426c, 430c, 447.
P. 295: A resposta do teste 262 está errada.

**APÊNDICE 3: Erros de imprensa**

P. 235: Por duas vezes aparece log onde deveria ser lim.
P. 245: Há dois valores errados na tabela ($x = 3$ e $x = 5$).

## UNIDADE 5: NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

### Capítulo 13. Introdução

O capítulo inicia com uma Introdução (p. 299), onde a Estatística é caracterizada como "um conjunto de métodos utilizados para a obtenção de dados, sua organização em tabelas e gráficos e análise desses dados". Não há nada de errado, mas é pouco. Faltou dizer: "e utilizar esses dados para fazer previsões". Uma idéia básica, que também não foi transmitida, é que a Estatística é usada quando se está diante de alguma incerteza.

Na p. 300, são arrolados os motivos que se têm para fazer amostras, em vez de pesquisar todo o universo. Além das razões aduzidas (econômicas e de tempo), há outras também importantes: total impossibilidade de outra forma (pensemos na hipótese de fazer um exame de sangue a partir de uma coleta universal), e a própria correção dos dados, que muitas vezes pode ser melhor controlada em uma amostra pequena.

Na p. 302, é imprópria a afirmação "14 alunos não obtiveram nota 7,0 nesta classe".

Na p. 305, aparece um nome inusitado: "marca da classe". Além disto, está errada a afirmação "17,5% dos alunos têm uma altura maior que 2,00m". Quanto à afirmativa: "12 alunos desta série medem entre 1,80m e 1,90m de altura", era necessário dizer se é inclusive ou exclusive.

Na p. 306, são introduzidos diversos tipos de representação gráfica de distribuições de freqüências. Histogramas são, de fato, muito importantes. Diagramas de barras e gráficos de setores são muito usados, mas para que mencionar, e nunca mais usar, polígonos de freqüências? Na apresentação de histogramas, podia ser dada mais ênfase no fato de que são as áreas que são proporcionais às freqüências, já que isto é sempre um ponto de confusão para o aluno. Ajudariam também exemplos em que os intervalos de classe não fossem constantes, como freqüentemente ocorre em Demografia.

O gráfico de setores da p. 308 está muito mal apresentado. Dá a impressão de que os ângulos é que devem ser assinalados.

**Capítulo 14. Média e Mediana**

Na p. 311, o cálculo da média ponderada para dados repetidos é apresentado como uma receita: "será assim calculada ...", e não como o fruto de um raciocínio simples.

No caso de dados grupados (p. 313), não fica claro que o procedimento para o cálculo da média é uma aproximação.

Para o cálculo da mediana (p. 314), aparece um misterioso $k$ nas explicações, sem que antes tenha sido dito que a lista de dados tinha $2k$ ou $2k+1$ elementos. Além disto, quando o número de dados é par, aparece uma fórmula errada, $V_d = \dfrac{k + (k+1)}{2}$, evidenciando uma confusão entre os elementos de uma lista e suas posições na lista.

A mediana para dados agrupados (p. 316) é calculada por regra de três sem nenhuma justificativa. Não há menção ao fato de isso ser uma aproximação e muito menos a em que se baseia tal aproximação. Aliás, não é a primeira vez que o livro perde a oportunidade de explicar que só se pode aplicar regra de três quando se está diante de uma proporcionalidade, de fato ou por hipótese.

Esta unidade não contém uma proporção alta de erros conceituais, como ocorre em outras partes do livro. Há algumas omissões discutíveis, como menção a gráficos de colunas, quartis e moda. Importância exagerada é dada a certos tópicos; por exemplo, desvio médio é tratado como se tivesse a mesma importância do desvio padrão. Mas o mais grave é a ausência total de motivação para as medidas de dispersão. O aluno se perguntará: "para que serve variância, para que se calcula desvio padrão?". Também há carência de aplicações e de exercícios qualitativos, que constam, por exemplo, em olhar um histograma e tirar conclusões. Lembremos que a análise dos dados havia sido apresentada como uma característica básica da Estatística, mas só a "organização" dos dados foi explorada.

## APÊNDICE 1: Erros ou impropriedades nos enunciados dos exercícios e nos exemplos

P. 309: No exercício 1, gráficos de colunas (que não são mencionados no livro) ou de setores seriam mais adequados.

No exercício 6 aparece um estranho histograma de barras.

P. 324: No enunciado do exercício 456 aparece a expressão "desvio padrão da freqüência" (sic).

No enunciado do exercício 457 aparecem as expressões "média do quadro de distribuição", "mediana, desvio médio e desvio padrão do quadro" (sic).

## APÊNDICE 2: Erros nas respostas dos exercícios

Não há respostas, no livro, para os exercícios da p. 302.

P. 304: Está errada a resposta do exercício 2a.

P. 316: Embora a resposta do exercício 6 esteja correta, a explicação está errada.

P. 320: A resposta do exemplo está errada.

P. 321: A resposta do segundo exemplo está errada. A variância é 24 **centímetros quadrados** e o desvio padrão é (com a precisão escolhida pelos autores) **4,90 centímetros**.

Faltam as unidades na resposta do exercício 2.

Estão erradas as respostas dos exercícios 3d; 5.

P. 322: Estão erradas as respostas dos exercícios 7b, 7c, 7d. A resposta do exercício 8c é (com a precisão escolhida pelos autores) 7,00.

P. 323: As respostas dos exercícios 450f, 453f, 454f, 455d estão erradas: os desvios padrões são (com a precisão escolhida pelos autores) 1,81; 1,48; 50,25 e 2,45.

P. 324: O gráfico da resposta do exercício 456b é inaceitável pela falta de legenda nos setores. Falta parte da resposta do exercício 456c.

As respostas dos exercícios 456d e 458 estão erradas: os desvios padrões são (com a precisão escolhida pelos autores) 11,45 e 1,60.

Há um erro de digitação na resposta do exercício 457. Aparece um ';' em vez de ','.

A resposta do exercício 5 da p. 311 está mal aproximada.

Questões dos vestibulares: Estão erradas as respostas das questões 3, 15a.

A resposta da questão 16 não está na forma mais simples. Além disso, o enunciado confunde imagem com afixo.

Estão erradas as respostas dos testes de vestibulares 14 e 39.

**APÊNDICE 3: Erros de imprensa**

Questões de vestibulares:

Há um erro de digitação na questão 8: está **como** onde deveria estar **com**.

Há um erro de digitação na questão 14: está **semi-eixo** onde deveria estar **semi-eixos**.

Há erro de digitação na questão 23. Aparecem $xm$, $ym$ e $zm$ em vez de $x_m$, $y_m$ e $z_m$.