Gentil et al.

Coleção Matemática para o segundo grau – volume 1

Descrição sucinta do Volume 1

Este volume é constituído por 12 capítulos, com um total de 253 páginas, além de 46 páginas dedicadas a questões de vestibulares e às respostas dos exercícios. A apresentação gráfica do livro é apenas razoável. Embora seja utilizada impressão em duas cores, a composição tipográfica deixa a desejar, não sendo seguidas as convenções tipográficas usuais para expressões matemáticas.

Análise detalhada do Volume 1

Em seu primeiro capítulo, intitulado Revisão, este livro apresenta uma série de resultados, não relacionados, não comentados e cuja escolha não parece ter uma lógica aparente. Encontramos aí os tópicos conjuntos numéricos, propriedades em $\mathbb{R}$, potenciação, radiciação, potenciação com expoente racional, módulo ou valor absoluto de um número real, produtos notáveis, equação do 1º grau, equação biquadrada e equação irracional. A ênfase neste capítulo é na apresentação de exercícios, rotineiros e descontextualizados e questões de vestibulares.

Logo neste primeiro capítulo se evidencia o pouco compromisso do livro com a exposição de idéias matemáticas. Expressões como "então", "logo", etc. são freqüentemente empregadas em situações onde a frase seguinte não é, de modo nenhum, decorrência da sentença anterior. Por exemplo, na página 7, sob o título "Potenciação" aparece um quadro onde aparece a expressão $a^n = b$ com comentários indicando que a é a base, n é o expoente e b é a potência. A seguir, vem "Então, $a^n = 1$, se $n = 0$, ...". Ora, este fato não é decorrência de nenhuma afirmativa feita anteriormente (aliás, nenhuma afirmativa foi feita anteriormente ...).

Também neste capítulo se revela o descuido com a precisão. Na página 8, por exemplo, o livro afirma que, quando n é par, $a^{p/n}$ não é real (onde p e n são inteiros), o que é incorreto ($a^{4/2}$ é real). Para a afirmativa ser verdadeira é necessário admitir-se que n e p são primos entre si.

O Capítulo 2 trata de conjuntos. É extremamente conciso, como todo o livro, escrito em estilo telegráfico, com frases curtas, sem comentários esclarecedores ou motivadores. O tratamento padrão dado à matemática neste livro segue o modelo da página 28 quando se informa ao aluno, sem nenhuma demonstração, que o número de elementos da união de dois conjuntos é simplesmente o número de elementos do primeiro conjunto, mais o número de elementos do segundo conjunto, menos o número de elementos da intersecção dos dois conjuntos, acompanhada simplesmente da observação "Ao subtrairmos os elementos comuns, $n_{A\cap B}$ evitamos que eles sejam contados duas vezes". Aliás, encontra-se nesta frase um erro comum mas nem por isso menos sério: a confusão de um conjunto com sua cardinalidade, ou seja, com o número de seus elementos. Além disso, é impossível subtrair elementos, mas sim números, neste caso número de elementos.

A apresentação dos números reais é mal conduzida. Informa-se simplesmente ao aluno que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e irracionais. A seguir, vem uma frase sem o menor nexo: "Observe que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, pois todo número racional é inteiro, decimal exato ou periódico". Não se discorre sobre números irracionais, sobre sua existência, exemplos concretos de números irracionais, etc. Escreve-se simplesmente que "nem todo real é racional pois nem todo número real pode ser colocado na forma de fração", o que nada acrescenta à idéia de número real, pois supõe-se no início da frase que eles já existem. É o fato de que existem decimais infinitas não-periódicas, as quais não podem ser escritas como frações ordinárias que mostra a necessidade da ampliação do conceito de número. A conclusão apresentada a seguir no texto, de que o conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto complementar dos racionais nos reais é trivial, e nada esclarece quanto à estrutura dos números reais ou irracionais.

O estilo adotado na obra não destaca conceitos ou fatos importantes em matemática. O fato de que existe uma correspondência bijetora entre os números reais e os pontos da reta, a partir do estabelecimento de uma origem e uma unidade, não é adequadamente mencionado quando é discutida a representação geométrica de $\mathbb{R}$. Tudo o que o livro tem a dizer sobre o assunto é:

> "Como entre dois pontos de uma reta existem infinitos pontos e a cada ponto associamos um único número real, então entre dois números reais existem infinitos números reais. Portanto, o conjunto $\mathbb{R}$ é denso."

É correto dizer que $\mathbb{R}$ é denso (em si próprio). Mas esta não é uma propriedade característica dos reais. Os racionais, por exemplo, também são densos neles próprios.

No final do Capítulo 2 aparece um breve resumo biográfico de Georg Cantor. Isto se repete ao longo da obra e se constitui em um de seus pontos positivos, trazendo informações em geral corretas sobre a vida de grandes matemáticos.

O Capítulo 3 apresenta os pares ordenados e as relações. O estudo é mais uma vez sucinto. Como sempre, a ênfase está sobre os exercícios.

O Capítulo 4 trata das funções. Comete-se aqui o encaminhamento equivocado de apresentar as funções como relações de um certo tipo. O autor poderia ter simplesmente definido função como uma correspondência entre dois conjuntos, o que aliás é feito no interior de sua definição usando relações. Não se apresenta nenhum comentário sobre funções, sua importância e exemplos concreto de funções. Aliás, na seção intitulada notação de função, na página 53, o texto emprega, sem nenhuma explicação, as denominações de variável independente e de variável dependente, que ressalta a noção de dependência.

O livro trata em seguida dos gráficos de funções, e apresenta critérios para determinar se um gráfico é ou não o gráfico de uma função. Mais uma vez, os exemplos são descontextualizados. Estudam-se, logo depois, utilizando gráficos, funções crescentes e decrescentes. Em seguida, são tratadas as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, funções pares, ímpares e funções que não são nem pares nem ímpaes.

Registram-se, novamente, outros maus exemplos de exposição matemática. Por exemplo na página 64, se afirma, corretamente, que "a função $f(x) = x^2$ é crescente em $\mathbb{R}_+$". Mas a justificativa não expõe corretamente as idéias envolvidas: "Como $f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_2) = x_2^2$, para $\forall\, x_1 \in \mathbb{R}_+$ e $\forall\, x_2 \in \mathbb{R}_+$, temos $x_2 > x_1 \Rightarrow (x_2)^2 > (x_1)^2$. Em $\mathbb{R}_+$, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$." Uma exposição adequada seria: "Se $0 < x_1 < x_2$, então $x_1^2 < x_2^2$. Logo, para quaisquer x_1, x_2 em $\mathbb{R}_+$, tem-se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Portanto, f é crescente em $\mathbb{R}_+$."

Outra imprecisão ocorre quando se afirma que "uma função $f\colon A \to B$ não é par nem ímpar quando, para qualquer $x \in A$, nem $f(-x) = f(x)$ nem $f(-x) = -f(x)$". Naturalmente, basta que essa condição ocorra para um ponto do domínio para que f não seja par nem ímpar.

O Capítulo 5 é dedicado às funções elementares e às inequações. Definem-se corretamente as funções constantes, afins ou do 1º grau. É dito, sem nenhuma demonstração, comentário ou explicação que o gráfico de uma função afim é uma reta. Este é o estilo adotado em todo o texto: a matemática é apresentada como uma coleção de fatos sem demonstração, que devem simplesmente ser memorizados.

Estudam-se em seguida a função linear, como caso particular da função afim e a função identidade.

O fato de que o gráfico de uma função afim é uma reta é aplicado ao estudo da variação de seu sinal, após o que se estudam vários tipos de inequações cuja solução pode ser reduzida ao estudo da variação do sinal da função afim. Mais um exemplo de linguagem descuidada ocorre na página 84: "Dada a função do 1º grau $f(x) = 2x - 4$, por exemplo, para $f(x) = 0$, existe $x \in R$, denominado zero da função". Naturalmente, o que se quer dizer é que, dada a função $f(x) = 2x-4$, existe um valor de x, denominado zero da função, para o qual $f(x) = 0$.

Pela primeira vez no livro encontram-se aplicações a partir da página 94, em que são dados problemas sobre funções afins e lineares. No entanto, em todos estes problemas, o modelo matemático é dado — que é uma função afim. Nunca se encontram problemas em que o aluno deve construir o modelo matemático que descreve a situação.

A função quadrática é apresentada no Capítulo 6, página 100. A apresentação continua sendo telegráfica, sem demonstrações, comentários, motivação. É dito simplesmente que o gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola (p. 101), e que sua concavidade fica determinada pelo sinal de a. A fórmula para a resolução da equação do segundo grau é apresentada sem demonstração e comentários. Informa-se simplesmente que a fórmula é conhecida como fórmula de Báskara. Em seguida, interpreta-se geometricamente o significado de o discriminante da equação ser menor, igual ou maior do que zero.

Pela primeira vez, faz-se no texto uma demonstração — errada. Para achar as coordenadas do vértice de uma parábola, o texto supõe que seu gráfico corta o eixo dos x em dois pontos. No entanto, o resultado encontrado é válido não somente para este caso, mas para qualquer parábola.

Estuda-se em seguida a variação do sinal da função quadrática, utilizando-se seu gráfico, e isso é aplicado ao estudo de várias inequações que se reduzem à consideração de funções quadráticas.

Nas páginas 120–123 estudam-se algumas aplicações da função quadrática. Esta apresentação tem defeito análogo ao encontrado nas aplicações da função afim: o aluno recebe o modelo matemático pronto, não precisa investigar para determiná-lo. Em seguida, trata-se das funções "definidas por várias sentenças".

O Capítulo 7, como praticamente todos os livros de segundo grau, trata das "funções modulares", "equações modulares" e "inequações modulares", tópicos que não merecem o destaque que lhes é dado e cujo tratamento poderia proveitosamente ser relegado às seções de exercícios sobre gráficos de funções. Um ponto positivo é o tratamento dado à obtenção de gráficos de funções da forma $f(x) = |x| + a$, através de translações. Por outro lado, a má exposição está novamente presente no capítulo. Na página 131, se diz: "A equação $|x| = a$ é modular. Logo, $|x| = a \Rightarrow x = a$ ou $x = -a$." O uso da palavra "Logo" é, novamente, completamente gratuito. Este capítulo é concluído com as noções de função composta e função inversa, erroneamente colocadas em pé de igualdade, pelo destaque que lhes é dado, ao estudo das funções modulares já mencionado.

As deficiências da metodologia adotada nesta obra se tornam particularmente flagrantes a partir do Capítulo 8, que trata da função exponencial. Em três sucintas páginas (143–145) define-se, sem nenhuma motivação, a função exponencial. Seu gráfico é apresentado imediatamente, como simples informação. São apresentados dois exemplos para os quais são calculadas as coordenadas de alguns pontos sobre o gráfico de funções exponenciais e daí deduz-se o gráfico, a partir das informações previamente dadas. O texto informa que a partir do gráfico da função exponencial é possível ver que ela toma somente valores positivos e que se restringirmos seu contra-domínio ao conjunto dos números reais positivos ela será bijetora, e portanto possuirá inversa, que será a função logarítmica! Tudo isso em três páginas, sem demonstrações, comentários esclarecedores, exemplos motivadores! Não se faz uma revisão de potências com expoentes racionais, não se discute o que poderia ser uma potência com expoente real, a necessidade de introduzi-los e sua importância na prática.

O capítulo seguinte é dedicado aos logaritmos (p. 157). Os logaritmos são motivados sucintamente, em um contexto puramente matemático, e definidos em uma única página (página 157). Encontram-se a seguir as demonstrações das propriedades básicas dos logaritmos e da regra para mudança de base.

No capítulo seguinte, estuda-se a função logarítmica, como inversa da função exponencial. São tratadas aqui as inequações logarítmicas embora as equações logarítmicas tenham sido estudadas no capítulo anterior. Em seguida, ainda neste capítulo, estudam-se os logaritmos decimais, os antilogaritmos (sem que se diga ao aluno explicitamente que o antilogaritmo de x é igual a 10^x) e a interpolação. O texto contém uma pequena tábua de logaritmos e um tempo precioso é perdido com o estudo, completamente anacrônico, de técnicas de manipulação de mantissas e características (logaritmos preparados, etc). Não há nenhum comentário sobre o papel histórico desempenhado pelos logaritmos.

Deficiência séria dos capítulos dedicados à função exponencial e à função logarítmica é a não utilização (ou pelo menos menção à existência) de calculadoras eletrônicas ou de computadores para o cálculo aproximado de valores destas duas funções. Não há, também, nenhum exemplo onde estas funções sejam empregadas para modelar alguma situação prática.

Os dois capítulos seguintes tratam de seqüências, com ênfase no estudo das progressões aritméticas e geométricas, respectivamente. Seqüências **não** são apresentadas como funções cujo domínio é o conjunto dos naturais. Da mesma forma, progressões aritméticas e geométricas **não** são apresentadas como restrições de funções afins e exponenciais ao conjunto dos naturais. O tratamento é conciso, são apresentadas as demonstrações de alguns fatos, e o capítulo enfatiza fórmulas, e não problemas cuja modelagem matemática conduz a progressões. No capítulo sobre progressões geométricas, o tratamento dado ao cálculo dos termos de uma progressão geométrica infinita (pp. 228–229) é no mínimo simplista e em nada contribui para a introdução do difícil conceito de limite.

O último capítulo trata das relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Por um lado ele é conciso, e não se estende em um assunto simples, o que é louvável. Mas omite o fato fundamental, presente em vários outros livros, de que a definição das razões trigonométricas só faz sentido devido ao fato de que triângulos retângulos com ângulos iguais são semelhantes. Também, como em todo o livro, o tratamento não enfatiza a discussão de situações-problema e as aplicações. Limita-se a definir as linhas trigonométricas usuais, calculá-las para o caso de certos ângulos e em seguida dedica-se à resolução de exercícios, principalmente de vestibular.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 1

O livro não mostra nenhuma das características dos textos voltados para as tendências e necessidades do ensino atual de matemática. Neste texto não há vestígio do "tratamento das informações", com ênfase em tabelas, construção, leitura e interpretação de gráficos. O livro não reconhece a existência de calculadoras e computadores, o que limita muito o tipo de exercícios que pode apresentar. Também não se encontram no livro problemas para os quais o aluno tenha que construir o modelo matemático que conduza à solução ou problemas que mostrem a matemática no seu importante papel de ferramenta fundamental para tomada de decisão.

O estilo seco e conciso e as frases curtas e diretas não contribuem para desenvolver no aluno a facilidade para a leitura de textos matemáticos mais complexos. Mais grave, a exposição é, em muitos casos, descuidada e sem compromisso com a concatenação das idéias.

Neste texto, a matemática é apresentada quase que totalmente desvinculada do mundo e não se mencionam as inúmeras e poderosas aplicações desta ciência. Embora o livro apresente seções curtas com informações sobre a vida e a obra de alguns matemáticos, não consegue mostrar que a matemática é relevante, essencial mesmo, para a civilização em que vivemos.

Resumindo estas observações finais, podemos dizer que o livro parece dar as costas às diretrizes curriculares para o Ensino Médio. Ele representa um tipo de livro para o ensino médio que está ultrapassado, e cuja única função parece ser a de adestrar alunos para os exames vestibulares (no entanto, mesmo para esta finalidade, o livro apresenta sérias deficiências).

Gentil et al.

Coleção Matemática para o segundo grau – volume 2

Descrição sucinta do Volume 2

O segundo volume da coleção cobre relações trigonométricas nos triângulos retângulos; funções trigonométricas; relação trigonométrica fundamental; soma, diferença e multiplicidade de arcos – transformação em produto; equações e inequações trigonométricas; funções trigonométricas inversas – triângulos quaisquer; matrizes; determinantes; sistemas lineares; análise combinatória; números binomiais e binômio de Newton; probabilidades; estatística; área de figuras planas; geometria espacial: de posição e métrica. São 388 páginas de texto, seguida de 61 páginas de problemas de vestibulares e das soluções dos exercícios propostos.

Análise detalhada do Volume 2

Como no primeiro volume, o estilo do livro é conciso, o texto curto, telegráfico, simples comunicador de fatos ou instruções. Paradigmática a este respeito é a seção Relações, da página 8, na qual lemos:

"Como $A + B + C = 180°$, temos:

$$B + C = 90°$$

Como o triângulo é retângulo, vale a relação de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$"

Pode-se mesmo afirmar que, nesta coleção como um todo, o texto dos problemas é mais longo e explicativo do que o próprio texto do livro.

Permeia o livro a linguagem típica de sala de aula. Assim, por exemplo, na página 12, quando são calculados os senos, cosseno e tangente do ângulo de 30°, usa-se a expressão "aplicando Pitágoras", quando o mais apropriado seria "aplicando o teorema de Pitágoras", e escreve-se "Como o $\Delta\, AHC$ é retângulo", quando ficaria melhor utilizar a palavra triângulo. Este estilo telegráfico, apropriado para transmitir o máximo de informações em pouco espaço, percorre todo o livro. Isso resulta em prejuízo para o aluno, que não se habitua com a leitura e a compreensão de textos mais elaborados.

Em trigonometria, área em que podem ser apresentadas inúmeras situações contextualizadas, encontramos, entre os exercícios resolvidos, somente um exemplo de problema contextualizado, de uma situação mais ou menos real (exercício 1, página 15), embora entre os exercícios para resolver, nas páginas 20–22, seja possível encontrar alguns contextualizados (por exemplo, exercícios 40 e 43 na página 20, exercício 7 na página 21 e 14 da página 22).

Somente em alguns parágrafos introdutórios o livro "conversa" com o aluno, propiciando-lhe a oportunidade de ler e compreender um texto. Assim, por exemplo, na Intodução do Capítulo 1, na página 7, o autor discorre sobre a origem da trigonometria. O mesmo acontece, mais uma vez, na página 268, na introdução do capítulo sobre probabilidades. Já em outros capítulos, por exemplo o de número 15, sobre geometria espacial, a Introdução limita-se a dizer: "Conceitos primitivos – São primitivos (e, portanto, aceitos sem definição), na Geometria espacial, os conceitos de ponto, reta e plano". Em seguida é afirmado que "Axiomas ou postulados (P) são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração, e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria" e é apresentado o "Axioma fundamental":

"Existem infinitos pontos, retas e planos."

O Capítulo 1, relativo a relações métricas no triângulo retângulo é idêntico ao Capítulo 12 do volume anterior. O Capítulo 2, sobre funções trigonométricas, principia estudando arcos de circunferência. Logo no início, se afirma que dois pontos A e B de uma circunferência a dividem em duas partes, o que é correto; a seguir, porém, os dois arcos são denominados AB e BA, respectivamente, sem que se explique porquê. Logo depois, o livro afirma que as medidas mais usadas na medição de arcos são o grau (°) e o radiano (rad) e os define corretamente, seguindo-se, porém, a seguinte observação enigmática: "Uma vez que o raio (r) de uma circunferência é utilizado como instrumento de medida, seu comprimento, nestas condições, não deve ser levado em consideração." Daí o autor conclui que

> "Assim r é tomado como unidade de medida (raio = 1) e denominado raio unitário (...) Sendo $C = 2\pi r$ o comprimento de uma circunferência e $r = 1$ o raio unitário, temos: $C = 2\pi \cdot 1$ ou $C = 2\pi$ rad."

Seria muito mais simples dizer que, em radianos, o comprimento do arco formado por toda a circunferência mede 2π.

Toda a confusão provém do fato de que o texto não deixa clara a diferença entre medir o comprimento da curva constituída por um arco (que pode ser toda a circunferência) ou medir o ângulo central definido por um arco de circunferência, para o que se utilizam ou graus ou radianos. Fazendo-se esta distinção importante, chega-se a dois resultados: dissipa-se a dúvida que o aluno tem entre medida angular e medida linear de arcos, e fica claro, por um simples raciocínio de semelhança, que a medida de um ângulo central independe do arco de circunferência escolhido para delimitá-lo.

Somente em seguida, na página 26, é que o autor menciona comprimento de um arco, para relacionar este comprimento com a "medida do arco" já tratada (o faz, entretanto, de modo extremamente confuso, sem deixar clara a relação entre estes conceitos). Temos aqui um tratamento equivocado para um assunto que desperta constantemente dúvidas e insegurança entre os alunos. Mais instrutivo seria discutir inicialmente o que é medir, dizer que ao tratarmos de arcos de circunferência nos interessam tanto seus comprimentos quanto os ângulos que subtendem, e estabelecer as relações entre radianos e comprimentos de arco e entre radianos e graus.

Outros conceitos são, igualmente, apresentados de modo confuso e descuidado. Por exemplo, arcos orientados são apresentados como sendo "qualquer arco contido em uma circunferência orientada".

Mais um exemplo do tratamento telegráfico que o autor dá à apresentação dos conceitos, sem maior preocupação com torná-los claros e compreensíveis, motivá-los e exemplificá-los, é o tratamento dado à função seno, extremamente importante. Ela é apresentada, sem nenhuma motivação, em uma página e meia de texto, com sua definição, baseada na circunferência trigonométrica, seu domínio, imagem e seu "sinal". Nenhuma conexão é estabelecida entre o seno ora definido e aquele introduzido no contexto de triângulos retângulos (fica a cargo do aluno concluir, por si mesmo, que as duas noções são compatíveis entre si). O gráfico da função seno é construído nas páginas 38 e 39. Na página 40, encontramos dois exercícios resolvidos interessantes (os de número 1 e 2) que tratam do gráfico das funções $2 \operatorname{sen} x$ e $2 + \operatorname{sen} x$ respectivamente.

Em seguida, o livro discute a função cosseno e seu gráfico. Não se menciona que o gráfico da função cosseno pode ser obtido do gráfico da função seno por uma simples translação. Na página 47, o livro estuda os gráficos de $\cos 2x$ e $\cos(x - \pi/2)$.

Como já foi dito, o estilo telegráfico do texto faz com que, muitas vezes, os exercícios resolvidos sejam mais interessantes do que o próprio texto explicativo, como se verifica no tratamento da função cosseno.

O livro usa repetidamente a expressão "Relação entre arcos trigonométricos" (páginas 52, 59, 64 e 69) quando deveria em verdade dizer "Relação entre linhas trigonométricas", pois está relacionando as diversas funções trigonométricas definidas para um arco sobre a circunferência trigonométrica.

O Capítulo 3 aborda identidades trigonométricas e redução ao primeiro quadrante. Na página 84, há a seguinte observação: "Os valores de senos e cossenos de arcos não-notáveis são encontrados em tabelas próprias". Mais uma vez, o livro ignora calculadoras e computadores.

O Capítulo 4 aborda, de modo correto, as fórmulas de adição de arcos, incluindo a sua dedução.

O viés pelo adestramento e tratamento mecânico das situações presente neste texto fica muito claro no início do Capítulo 5, Equações e Inequações Trigonométricas, quando é afirmado que "Existem três tipos de equações trigonométricas conhecidas como fundamentais; todas as demais equações devem ser reduzidas a uma delas". Porém, o tratamento dado à resolução das equações trigonométricas é, adequado, de modo geral, concentrando-se nos casos fundamentais. Não há, no entanto, qualquer indicação sobre as razões pelas quais se pode desejar resolver uma equação trigonométrica (problemas de resolução de triângulos, que fornecem o melhor exemplo de situações práticas que envolvem a resolução de equações trigonométricas, só são abordados, de modo tímido, no capítulo seguinte).

O Capítulo 6 intitula-se Funções Trigonométricas Inversas – Triângulos quaisquer. Na primeira parte, mostra-se como restringir convenientemente o contradomínio das funções trigonométricas a fim de torná-las bijetoras, e portanto invertíveis. Em seguida, a segunda parte, totalmente desvinculada da primeira, aborda os "triângulos quaisquer", quando são demonstradas a lei dos senos e a lei dos cossenos. Para exemplificar o desequilíbrio provocado pela falta de distinção entre o que é fundamental e o que é simples conseqüência, apresenta-se, no mesmo pé de igualdade que a lei dos senos e que a lei dos cossenos um "Teorema da área", o qual afirma simplesmente que a área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo compreendido entre esses lados.

O viés pelo adestramento, com desprezo de várias outras habilidades cognitivas que deveriam ser desenvolvidas — capacidade de induzir leis gerais (teoremas) a partir de alguns exemplos; capacidades de síntese e de análise; capacidade para formular e testar conjecturas; capacidade para validar resultados de problemas e exercícios; capacidade para verificar a plausibilidade de resultados, usando inclusive o cálculo mental — verifica-se exemplarmente na seção sobre "triângulos quaisquer". Neste campo, em que seria fácil dar exemplos simples, contextualizados e interessantes de topografia e cartografia, não se encontra nenhum exercício contextualizado. Isso reforça a crença, já incutida no aluno por toda a apresentação até este ponto, de que a trigonometria — e por extensão a matemática — não tem nenhuma aplicação a não ser resolver problemas de vestibular.

Como raro exemplo de aplicação, mostra-se a seguir como aplicar a trigonometria para achar a resultante de duas ou mais forças aplicadas a uma mesma partícula. O título da seção é "Trigonometria – aplicações", pelo que é justo esperar vários tipos de aplicações, e não somente um.

O Capítulo 7 trata as matrizes, que serão utilizadas para estudar determinantes e sistemas lineares. Embora a apresentação não seja motivada e contextualizada (diz-se apenas que “O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes encontre cada vez mais aplicações em setores tais como economia, engenharia, matemática, física, tecnologia, etc.”), e o texto continua telegráfico, a multiplicação de matrizes está bem explicada. O livro não apresenta aplicações contextualizadas das matrizes. Todos os exercícios dizem respeito somente a matrizes. A apresentação do livro, voltada simplesmente para o adestramento, impede que exercícios sejam explorados para que a partir dele o aluno chegue a conclusões gerais. Por exemplo, o exercício 46, da página 169, que pede para se calcular a potência quarta de uma matriz triangular superior é uma boa ocasião para propor perguntas que levariam o aluno a uma conclusão geral sobre potências de tais matrizes. A falta de cuidado na gradação dos exercícios faz com que um exercício semelhante, mas mais difícil, seja apresentado antes: o de número 42, na mesma página. Em verdade, os exercícios são aparentemente ordenados ao acaso: os de número 39, 42, 44 e 45 versam sobre o mesmo tópico — potências de matrizes triangulares — e não há na ordem de sua apresentação nenhuma consistência — quer pedagógica, quer lógica.

Os determinantes são apresentados como números associados a matrizes quadradas. Isso é vago e não ajuda o aluno, pois há muitos números associados a uma matriz — por exemplo seu traço. Entre as aplicações dos determinantes, citam-se o cálculo da matriz inversa; a resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares e o cálculo da área de um triângulo, quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices. Saliente-se que as duas primeiras “aplicações” são totalmente inúteis, na prática. Elas só são aplicáveis para situações simples e artificiais de sala de aula: matrizes 2×2 ou 3×3, com coeficientes inteiros e de mesma grandeza. A terceira aplicação é uma trivialidade. Os determinantes merecem ser estudados por vários motivos que não estes.

O livro define determinantes de primeira e de segunda ordens. Em seguida, após definir menor complementar, cofator e matriz adjunta, afirma que o determinante de uma matriz qualquer pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz M pelos respectivos cofatores (Teorema de Laplace). Ou seja, o Teorema de Laplace é usado como definição dos determinantes.

Em seguida, o livro apresenta a regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de terceira ordem (página 183). Antes de enunciar as propriedades dos determinantes, o texto apresenta a “matriz de Vandermonde” e o valor de seu determinante (página 188), sem qualquer justificativa ou explicação sobre sua relevância.

Nas páginas 194 e 195 o livro enuncia e aplica a "regra de Chió", que permite reduzir o cálculo de um determinante ao cálculo de determinantes de menor ordem.

Na página 197, o livro afirma que uma matriz quadrada A é invertível se e somente se seu determinante é diferente de zero e mostra como calcular sua inversa usando determinantes. Ao fazer isso, o livro, como a maior parte dos textos para o Ensino Médio, esquece que esta maneira de calcular a inversa de uma matriz tem importância puramente teórica e é totalmente inútil na prática. Excetuando situações artificiais criadas em sala de aula, é impossível, em virtude do tempo necessário para efetuar os cálculos, mesmo em computadores poderosos, achar a inversa de uma matriz usando este método. Na prática, mesmo para matrizes de pequena ordem surgem problemas com o método, caso os coeficientes da matriz tenham ordens de grandeza muito diferentes. A maneira eficiente e rápida de calcular a inversa de uma matriz quadrada é usar o método do escalonamento, que mostra também se a matriz é invertível ou não. Quanto mais cedo o aluno aprender isso, melhor para seus estudos posteriores de matemática.

Os capítulos sobre matrizes e determinantes têm duas características comuns: neles nada é demonstrado — nem a mais simples propriedade; e neles não há nenhum exercício contextualizado ou exemplo de aplicação. Parece que as matrizes e determinantes existem somente para resolver exercícios sobre matrizes e determinantes.

Em seguida, no Capítulo 9 o livro estuda os sistemas lineares. Eles são introduzidos sem motivação. A única aplicação do capítulo (páginas 220–221), um problema sobre um circuito elétrico resolvido utilizando as Leis de Kirchhoff poderia ter servido de excelente introdução e motivação, mas ela é relegada ao fim do capítulo. Esta aplicação fica prejudicada pois o livro não enuncia as leis de Kirchhoff. Afirma simplesmente que elas "são vista detalhadamente no estudo de eletrodinâmica, que pertence à Física". A compartimentalização do saber expressa nestas palavras, talvez inconscientemente, é nociva, e contribui para que o aluno acredite que matemática só serve para resolver problemas de matemática, e que ela não tem utilidade em outros ramos do saber.

O livro introduz as matrizes associadas a um sistema linear, menciona que os sistemas homogêneos sempre têm solução e classifica os sistemas lineares quanto ao número de equações igual ao número de incógnitas e tais que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas é diferente de zero. Em seguida, enuncia corretamente a regra de Cramer. Como em toda esta parte dedicada às matrizes, aos determinantes e aos sistemas lineares, não é apresentada demonstração.

A discussão dos sistemas lineares, utilizando determinantes, nas páginas 209 e 210, é concisa, telegráfica mesmo, e defeituosa. O livro enuncia, corretamente, que um sistema linear pode ter solução única (determinado); ser possível e indeterminado; ou ser impossível. No entanto, esta discussão não pode ser feita, de modo completo, mesmo para sistemas com igual número de equações e incógnitas, baseando-se apenas nos determinantes D, D_{x_1}, D_{x_2}, etc., associados à regra de Cramer, como se tenta fazer no livro. Se $D \neq 0$, o sistema tem solução única; se $D = 0$ e se algum dos determinantes das incógnitas é diferente de zero, o sistema é, de fato, impossível, como apresentado no livro sob análise. Mas se todos os determinantes são nulos, então o sistema pode ser impossível ou ter infinitas soluções. No livro, se afirma que o sistema é "possível e indeterminado, se $D = D_{x_1} = D_{x_2} = \cdots = 0$, para $n = 2$; para $n \geq 3$, esta condição só é válida se não temos equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não proporcionais". Esta exposição tem vários defeitos. Primeiro, ao dizer que a condição não vale para $n \geq 3$, não deixa claro o que ocorre com os sistemas que violam a restrição apresentada. Em segundo lugar, a restrição é incompleta. De fato, sistemas lineares 3×3 para os quais $D = D_{x_1} = D_{x_2} = \cdots = 0$ e não apresentam equações com coeficientes das incógnitas proporcionais são indeterminados. Mas, para $n > 3$, um sistema pode satisfazer a esta restrição e ainda ser impossível. É o caso do sistema abaixo:

$$\begin{aligned} x + y \phantom{{}+w+z} &= 1 \\ w + z &= 1 \\ x + y + w + z &= 2 \\ x + y - w - z &= 1 \end{aligned}$$

Nele, tem-se $D = D_x = D_y = D_w = D_z = 0$ e não há equações com coeficientes das incógnitas proporcionais, mas o sistema é claramente impossível (subtraindo-se as duas primeiras equações obtém-se $x + y - w - z = 0$).

Na verdade, o aluno deveria ser estimulado a utilizar a técnica de escalonamento, que é aplicável ainda que o número de equações seja diferente do número de incógnitas, para fazer a discussão completa de um sistema. No entanto, somente nas páginas 214–271, quando possivelmente já foi inculcado na mente do aluno que sistemas se discutem e se resolvem usando determinantes, o livro apresenta a noção de sistemas escalonados. Entre os exemplos resolvidos para ilustrar como se usa o escalonamento para resolver sistemas, não há nenhum que aborde um sistema impossível.

O estudo da análise combinatória no Capítulo 10 (página 224) principia, como em geral acontece neste livro, sem nenhuma motivação ou contextualização. Como exemplo de falta de hierarquização dos conteúdos, a função fatorial (página 224) recebe tratamento tão extenso quanto o princípio fundamental da contagem (página 227). Há, ainda, várias falhas cometidas ao se enunciar este princípio.

Em primeiro lugar, ele não é enunciado com a generalidade necessária (e que é utilizado no que se segue), fazendo referência apenas ao caso em que os acontecimentos envolvidos são independentes (embora o livro não explique o que são acontecimentos independentes — o exercício resolvido 3, da página 228, torna o conceito ainda mais confuso). Isto é completamente desnecessário: os acontecimentos podem ser dependentes, desde que o número de possibilidades para cada um deles seja sempre o mesmo, quaisquer que tenham sido os resultados dos acontecimentos anteriores. Por exemplo, ao se contar os números de dois algarismos significativos distintos, as escolhas envolvidas não são independentes: se o primeiro algarismo escolhido for 5, o segundo não pode ser 5. Mas o princípio da contagem pode (e deve) ser usado: o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos; qualquer que seja a escolha feita, o segundo pode ser escolhido de 8 modos; logo há $8 \times 9 = 72$ números com dois algarismos significativos distintos.

Além disso, os símbolos empregados para designar os eventos e de quantos modos distintos eles ocorrem não são consistentemente usados: segundo o livro, o evento p_i ocorre de p_i maneiras distintas. No entanto, o número de modos diferentes em que os n acontecimentos podem ocorrer é $p_1 p_2 p_3 \ldots p_{n-1} p_n$, símbolos reservados para representar os acontecimentos.

De qualquer maneira, este capítulo deveria começar com o princípio fundamental da contagem, realmente fundamental em análise combinatória, e do qual decorrem, sem necessidade de memorização de fórmulas de aparência misteriosa, as expressões que permitem contar números de arranjos, combinações e permutações.

Contrariamente ao que acontece em quase todo o livro, a apresentação dos arranjos simples é feita utilizando exemplos, antes de sua formalização. Isso é também feito para a introdução das combinações, mas as permutações são apresentadas sem nenhuma motivação, definindo-as em termos de arranjos. O livro apresenta também os arranjos e as permutações com repetições. A inclusão de uma vinheta histórica sobre Poincaré (página 244) neste capítulo dedicado à análise combinatória é totalmente gratuita. O capítulo contém bons exemplos e exercícios, de vários níveis de dificuldade.

O capítulo sobre os números binomiais e o binômio de Newton (páginas 246–267) contém algumas das poucas demonstrações desta obra, todas elas relativas aos números binomiais. Quando se estuda o triângulo de Pascal (páginas 252–258) não se fazem demonstrações, nem algébricas, nem combinatórias. Dão-se exemplos e enunciam-se resultados. O mesmo acontece na seção dedicada ao binômio de Newton.

O estudo das probabilidades é feito no Capítulo 12, que principia na página 268. Há uma introdução histórica sobre a teoria das probabilidades, cujo título promete mais do que é feito na seção. Define-se o que são eventos determinísticos e aleatórios, espaço amostral ou conjunto universo, evento e probabilidade. O livro demonstra como se acha a probabilidade dos eventos $A \cup B$ e $A \cap B$ em função das probabilidades dos eventos A e B. Neste último caso, não se menciona no enunciado do resultado que os eventos A e B devem ser independentes. O capítulo é encerrado com uma demonstração da fórmula da distribuição binomial.

Como em muitos outros livros para o Ensino Médio, o conceito de probabilidade não é explorado satisfatoriamente. Todos os problemas apresentados se encerram com o cálculo de alguma probabilidade, quase sempre sem qualquer significado para o aluno. O capítulo seria muito mais motivante se contivesse exercícios que evidenciassem o papel que a teoria das probabilidades desempenha na tomada de decisões.

O Capítulo 13 (página 285) trata de Estatística, em que são abordados os elementos introdutórios desta teoria. Observa-se, neste capítulo, em contraste com os demais, um pequeno número de exercícios propostos. Característica mais séria é que o autor desconhece, neste capítulo, como em todos os demais, a existência de calculadoras e computadores. Como é bem sabido, em problemas e exercícios sobre estatística, as contas são rebarbativas, e a possibilidade de fazê-las utilizando uma calculadora ou um computador os torna mais interessantes, pois o aluno pode concentrar-se nos aspectos conceituais dos problemas, e podem-se propor problemas bem mais realistas.

O Capítulo 14 sobre área de figuras planas é uma coletânea de fórmulas, resultados e exercícios sobre áreas e algumas propriedades das figuras planas, principalmente polígonos e círculos. Sua finalidade parece ser puramente propedêutica, de preparação para concursos vestibulares.

O capítulo final do livro, o de número 15, é dedicado à geometria espacial — de posição e métrica. O simples fato de que a geometria espacial merece apenas um capítulo do livro já é um indicador da pouca atenção que o assunto recebe no livro.

A primeira parte do capítulo é totalmente inadequada. Com efeito, se um autor começa sua exposição de geometria falando de conceitos primitivos e axiomas ou postulados, espera-se que isso é com o intuito de mostrar o caráter dedutivo da geometria. A simples enumeração de conceitos primitivos e de axiomas a nada conduz. O importante seria utilizá-los para demonstrar resultados geométricos.

Acrescente-se a isso a apresentação de uma lista esdrúxula de axiomas, a começar por um axioma fundamental (página 326) o qual afirma que “Existem infinitos pontos, retas e planos”. O restante dos “axiomas” dados não constitui uma base para a construção da geometria no espaço, nem mesmo sequer para a demonstração de seus resultados mais elementares. Por exemplo, não é apresentado o postulado que estabelece que dois planos que têm um ponto em comum têm uma reta em comum.

Depois desta introdução, são apresentados os sólidos usuais: prismas, cilindros, pirâmides, cones e esferas. A definição de prismas apresenta defeitos. Inicialmente, o livro exige, sem necessidade, que a base seja um polígono convexo. Mais grave, define o prisma de base R como sendo o conjunto de todos os segmentos congruentes PP' paralelos a uma certa direção, sendo P um ponto de R. Ora, um prisma é um conjunto de pontos e não de segmentos (assim, a definição deveria se referir à reunião de todos os segmentos). Além disso, os segmentos devem ser tomados em um único semiplano determinado por R. (Estas mesmas falhas se repetem ao definir-se cilindro, pirâmide e cone.)

Após apresentar cada sólido, o livro apresenta as expressões para a área de sua superfície e seu volume. Volumes de prismas e cilindros são calculados, usando o princípio da Cavalieri, a partir do volume do paralelepípedo retângulo. O princípio de Cavalieri é adequadamente enunciado e motivado (o autor recorre a um queijo e um salame apresentando fatias de mesma área). No entanto, o volume do paralelepípedo retângulo é justificado apenas para o caso em que as dimensões são inteiras.

Após definir pirâmides, equivocadamente, como um conjunto de segmentos, são obtidas expressões para as áreas lateral e total de pirâmide regulares e enunciado (de modo algo confuso) o teorema relativo à seção de uma pirâmide por um plano paralelo à base. O livro diz: "Um plano paralelo à base, que intercepte todas as arestas laterais, determina uma seção poligonal de modo que:

- as arestas laterais e a altura sejam divididas na mesma razão;
- a seção obtida e a base sejam polígonos semelhantes;
- as áreas desses polígonos estejam entre si assim como os quadrados de suas distâncias ao vértice."

O uso do subjuntivo nas conclusões do teorema pode fazer com que o aluno fique em dúvida se essas afirmativas são de fato conclusões ou se são condições a serem satisfeitas. Não é apresentada nenhuma justificativa para o teorema e não se informa ao aluno que a pirâmide determinada pelo plano seccionador é semelhante à pirâmide original e que a razão entre os volumes das pirâmides é o cubo da razão de semelhança (aliás, não se menciona, em lugar nenhum, o fato fundamental de que as razões entre as áreas e os volumes de figuras semelhantes na razão k são respectivamente iguais a k^2 e a k^3).

Para deduzir o volume da pirâmide (e do cone), o livro adota um caminho pouco usual. Normalmente, mostra-se, usando o princípio de Cavalieri, que pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume e, a seguir, que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares de mesmo volume, tendo duas delas a mesma base e a mesma altura do prisma. Em lugar disto, o livro enuncia, inicialmente, o teorema de Pappus, que estabelece que a área gerada por uma região ao girar em torno de um eixo que não a interesecta é igual à sua área multiplicada pelo comprimento do caminho descrito por seu centro de gravidade. Usando este teorema, é obtido o volume de um cone de revolução e, daí, o volume de pirâmides (usando, agora, o princípio de Cavalieri).

Embora o teorema de Pappus seja uma propriedade extremamente interessante, a abordagem utilizada não é indicada. Primeiramente, não é simples justificar sua validade, com os recursos matemáticos do Ensino Médio. Além disso, o termo centro de gravidade não é conhecido pelo aluno (embora o livro aja como se fosse). Finalmente, obter o centro de gravidade só é simples quando a figura apresenta eixos de simetria. No caso do triângulo, o centro de gravidade (de sua área) é o ponto de interseção de suas medianas, mas a maior parte dos alunos não sabe disso ou, pelo menos, não sabe porquê. Simplesmente dizer, sem justificar, que o baricentro de um triângulo é o seu centro de gravidade, tem pouquíssimo valor educacional.

O último sólido estudado é a esfera. O estudo é bastante resumido, sendo somente apresentadas, sem qualquer justificativa, as fórmulas para a sua área e seu volume. Ora, uma vez que tenha sido apresentado o Princípio de Cavalieri, existe uma dedução simples e interessante da fórmula do volume de uma esfera baseado em um sólido (a anticlepsidra) obtido como a diferença entre um cilindro equilátero e dois cones com bases coincidentes com as do cilindro (ver A Matemática do Ensino Médio, vol. 2).

Em suma, apesar de o início do capítulo apontar para a característica dedutiva da Geometria, a ênfase dominante está na simples aplicação de fórmulas. Deve-se, ainda, ressaltar que o livro não traz um tratamento sistemático relativo à estrutura dos poliedros. Assim, não há qualquer referência à relação de Euler ou aos poliedros regulares (embora hexaedros, tetraedros e octaedros sejam mencionados de passagem ao se estudar prismas e pirâmides).

Resumo dos comentários relativos ao Volume 2

Mais importante do que identificar e comentar erros ou deficiências específicos neste volume, os quais um professor atento poderá corrigir, deve-se salientar que o livro não favorece uma aprendizagem matemática genuína, baseada na compreensão dos conceitos básicos, na percepção de que a matemática é um conjunto de resultados relacionados, e na capacidade de utilizar, de maneira autônoma, em situações contextualizadas, os conhecimentos matemáticos adquiridos. Estas características já foram verificadas no primeiro volume da coleção e continuam presentes, embora por vezes amenizadas, neste segundo volume.

Um livro didático de matemática deveria estar atento a vários aspectos em sua apresentação:

Motivação — Idealmente, nenhum novo conceito, procedimento ou algoritmo deveria ser introduzido sem ter sido motivado por exemplos cuidadosamente escolhidos. A apresentação direta, sem introdução motivadora, de conceitos, procedimentos e algoritmos não motiva o interesse dos alunos. Ao contrário, funciona como elemento inibidor da aprendizagem.

Conceituação — Apresentação correta dos conceitos matemáticos, com um nível de rigor apropriado para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Além disso, os conceitos apresentados e discutidos devem ser úteis e necessários quer em aplicações, quer para desenvolvimentos posteriores.

Fixação — Os conceitos, procedimentos ou algoritmos apresentados devem ser fixados na mente dos alunos por uma seqüência gradativa de exercícios, principiando por alguns de aplicação imediata.

Aplicações — O texto deveria caracterizar-se por uma grande variedade de aplicações a várias áreas do conhecimento, a fim de mostrar ao aluno como a matemática é útil e ensinar-lhe a utilizar seus conhecimentos matemáticos em situações bem contextualizadas.

Usando estes critérios, pode-se dizer que o livro, como um todo, atende bem somente ao de fixação. São poucas as aplicações, contextualizações e motivações. Como dito na análise do Volume 1, o objetivo do livro parece ser o de fazer uma preparação para os exames vestibulares, reduzindo os conceitos ao mínimo e apresentando coleções de exercícios de vestibulares, certamente entendendo que esta é melhor estratégia para sucesso nestes exames. Na nossa opinião, esta estratégia é equivocada. Além de ela não fornecer ao aluno a oportunidade de uma verdadeira aprendizagem, muitos dos concursos vestibulares atuais incluem problemas que envolvem os outros aspectos do ensino da matemática listados acima.

Gentil et al.

Coleção Matemática para o segundo grau – volume 3

Descrição sucinta do Volume 3

O terceiro volume da coleção cobre os seguintes tópicos: geometria analítica, números complexos, polinômios e equações polinomiais, e noções de cálculo. São 267 páginas de texto, seguidas de 133 páginas de problemas de vestibulares e das soluções dos exercícios propostos.

Análise detalhada do Volume 3

O primeiro capítulo trata da geometria analítica da reta, começando pela noção de medida algébrica de um segmento orientado (mas sem nunca dizer o que é um segmento orientado). A seguir, o texto introduz o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais do plano e define a razão de seção de um segmento por um de seus pontos. A apresentação não é muito precisa. Por exemplo, a razão em que C divide um segmento AB do plano é definida como a razão entre as medidas dos segmentos orientados AC e CB. No entanto, só se falou em medida algébrica para segmentos orientados da reta. O correto é recorrer ao teorema de Tales e à projeção de AB sobre um dos eixos (na verdade, é isto o que o livro faz, mas sem os cuidados necessários com a linguagem adotada). É apresentada, na página 12, uma fórmula para as coordenadas do ponto P que divide um segmento genérico AB na razão r_p. O fato de ela ser apresentada, em destaque, pode levar o aluno a entender que ela deve ser memorizada, o que é completamente desnecessário. Entretanto, os exercícios relativos à noção de divisão de um segmento em uma razão dada são, por vezes, interessantes, como, por exemplo, o exercício 10 da página 17.

A noção de razão de seção é aplicada ao cálculo das coordenadas do baricentro de um triângulo (deve-se observar que a figura da página 20 está mal feita e pode confundir o aluno). Depois, o texto mostra como calcular a distância entre dois pontos.

Para introduzir a equação da linha reta, o texto discute em primeiro lugar a condição para que 3 pontos estejam alinhados (páginas 26 e 27). A introdução de determinantes neste tópico só se pode justificar como incentivo à memorização, pois pode ser utilizada sem nenhuma compreensão da geometria que conduz ao determinante apresentado na página 27. A condição de alinhamento, sob forma de determinante, é utilizada para chegar à equação da reta na página 30 — a chamada equação geral da reta. Muito mais simples e educativo seria utilizar diretamente semelhança para chegar ao mesmo resultado, em vez de viciar o aluno a empregar mecanicamente algoritmos cuja compreensão é quase sempre duvidosa.

O hábito de fragmentar os conteúdos, tão presente nesta coleção, fica evidenciado, como em muitas outras obras para o ensino médio, na apresentação das chamadas equações segmentária da reta, paramétrica da reta e reduzida da reta. Todas estas equações são simples exercícios, uma vez conhecida a equação geral da reta. Este viés fica também patente na apresentação exaustiva, em duas páginas e meia, de como calcular o coeficiente angular de uma reta. Na apresentação da equação paramétrica falta, também, uma maior dose de motivação (por exemplo, mostrando que ela é naturalmente obtida ao se considerar a trajetória em um movimento com velocidade constante).

Um ponto positivo do capítulo é o parágrafo do final da página 30:

> *A equação geral de uma reta relaciona x e y para qualquer ponto P genérico da reta. Assim, dado o ponto $P(m,n)$:*
> - *se $am + bn + c = 0$, P é ponto da reta*
> - *se $am + bn + c \neq 0$, P não é ponto da reta*

Embora a afirmativa seja aparentemente óbvia, ela pode ser necessária para que alguns alunos entendam o significado de se obter a equação de uma figura.

Somente na página 42 o livro aborda a representação gráfica das retas. A apresentação é pobre, convencional, todos os exemplos tratados lidam com retas dadas por pontos com coordenadas inteiras e de valor absoluto pequeno. Como lidar, por exemplo, com a reta $2.304x + 5.698y + 245.539 = 0$? A maior parte dos alunos, expostos somente aos exemplos apresentados neste texto, terá dificuldades em representar graficamente esta reta. E como representar a reta $0{,}034x - 0{,}56y + 0{,}005 = 0$? O hábito de somente apresentar pontos com coordenadas inteiras induz o aluno a tentar achar a representação gráfica de qualquer curva escolhendo uns dois ou três valores inteiros e pequenos de x, o que por vezes conduz a resultados desastrosos. Além disso, este hábito induz o aluno a não se preocupar em traçar gráficos em escalas convenientes. O uso da calculadora permitiria trabalhar sem problemas com números quaisquer.

A seguir, são examinados diversos tópicos: interseção de retas, equação de uma reta, dados o coeficiente angular e um ponto, e posições relativas de retas.

Deve-se notar a despreocupação em imprimir uma ordem lógica aos temas abordados. Além disso, a linguagem, por vezes, é bastante descuidada. No final da página 48, por exemplo, há o seguinte parágrafo:

> Dadas as retas $r\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$, se $m_1 \neq m_2 \Rightarrow -\dfrac{a_1}{b_1} \neq -\dfrac{a_2}{b_2}$, então r e s são concorrentes e $r \cap s = \{P\}$.

Nele o símbolo $\Rightarrow$ é empregado de modo errôneo, como um substituto para uma expressão como "isto é".

Na página 64, encontramos uma das poucas falhas tipográficas do livro, na fórmula que dá a distância de um ponto a uma reta. Deve-se observar, também, que a fórmula é apresentada sem qualquer justificativa (nem mesmo para a decisão dos autores de omitir a demonstração). Este tipo de atitude contribui para reforçar, no aluno, a crença de que a matemática se compõe de um amontoado de fatos desconexos e obscuros.

A maneira de apresentação dos resultados é confusa para o aluno. Assim, por exemplo, na página 66, ao apresentar o determinante que dá a área de um triângulo, o livro destaca o resultado, em uma caixa, e imediatamente passa a deduzí-lo, sem dizer que se trata de um teorema cuja demonstração está sendo feita. A fórmula da área do triângulo é estendida para um polígono qualquer, novamente sem qualquer justificativa.

Encontra-se ao fim do capítulo uma seção sobre inequações do primeiro grau e regiões planas. Como sempre, o texto apresenta procedimentos que devem ser seguidos, sem nenhuma oportunidade de discutir outras estratégias. Por exemplo, freqüentemente, é mais simples determinar a região determinada por uma inequação linear verificando se a origem pertence ou não a ela. Isso não é mencionado no texto. As aplicações apresentadas para esta parte são pobres e deixam de explorar toda a grande quantidade de aplicações das inequações, por exemplo em programação linear bem simples, limitada a problemas de duas variáveis.

A última seção do capítulo é intitulada *Aplicações*. Seria legítimo, aqui, esperar exemplos que ilustrassem o método da geometria analítica para resolver problemas geométricos envolvendo a reta (por exemplo, lugares geométricos que resultem em retas). Seria também uma boa ocasião para apresentar exemplos em que coubesse ao aluno estabelecer um sistema de coordenadas conveniente. Em lugar disso, as aplicações aqui apresentadas, embora interessantes, são relativas à reta como gráfico de uma função, e deveriam ter sido apresentadas no Volume 1. Nada do ferramental introduzido no capítulo é necessário para o entendimento dos exemplos.

O Capítulo 2 trata da geometria analítica da circunferência. O texto, como em todo o volume, é conciso, sem nenhuma tentativa de motivar, contextualizar e explicar ao aluno o que está acontecendo. Temos definições, a apresentação ou dedução de fórmulas ou resultados, seguidos imediatamente de exemplos e de exercícios propostos. A ênfase no estabelecimento de fórmulas a serem memorizadas para resolver os problemas é evidenciada na seção *Reconhecimento da equação de uma circunferência* (páginas 89–90), onde são obtidas condições para que uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência, juntamente com expressões para as coordenadas do centro e para o raio. O aluno desavisado pode ser levado a memorizar estas fórmulas, o que é completamente desnecessário. Uma abordagem muito mais indicada é a de utilizar completamento de quadrados para reescrever a equação dada na forma canônica. Além de dispensar completamente a memorização de fórmulas, este método tem a grande virtude de mostrar a relevância de conteúdos estudados anteriormente (produtos notáveis).

O Capítulo 3, dedicado às cônicas, é nitidamente inferior aos anteriores. Nenhuma motivação ou contextualização iniciais. A apresentação chega mesmo a ser confusa. Reproduzamos textualmente as palavras do texto (página 111):

> *Exemplo:*
> *Sendo P, Q, R, S, F_1 e F_2 pontos de um mesmo plano e $\overline{F_1F_2} < 2a$, temos:*
> $dF_1P + dF_2Q = 2a$
> $dF_1Q + dF_2Q = 2a$
> $dF_1R + DF_2R = 2a$
> ....
> $dF_1S + dF_2S = 2a$
> *A figura obtida representa uma elipse.*

O texto está acompanhado da figura de uma elipse na qual estão assinalados os pontos P, Q, R, S, F_1 e F_2 .

Ora, não é dito que está sendo apresentada uma maneira de esboçar uma elipse. Mais importante, o enunciado induz confusão, pois são apresentados pontos do plano e dito que eles satisfazem a condição de que a soma de suas distâncias aos focos é constante e igual a $2a$. O correto seria dizer, por exemplo:

> *Sejam pontos P, Q, R, S tais que*
> $dF_1P + dF_2Q = 2a$
> $dF_1Q + dF_2Q = 2a$
> $dF_1R + DF_2R = 2a$
> ....
> $dF_1S + dF_2S = 2a$
> *Então, eles pertencem à elipse cujos focos são F_1 e F_2 .*

O texto não apresenta o processo extremamente simples de traçar uma elipse usando uma corda ou barbante de comprimento fixo.

Há, no entanto, uma seção intitulada *Aplicações*. Na verdade, esta seção reúne algumas aplicações e algumas propriedades importantes das elipses. Uma apresentação mais adequada seria listar as propriedades importantes e vincular as aplicações a estas propriedades. Da forma como está organizada, esta seção comete confusões inaceitáveis. Dizer que é uma aplicação a definição geométrica da elipse, como interseção de uma folha de cone por um plano, formulada pelos gregos, é no mínimo estranho. Além disso, a caracterização de que o plano deva ser oblíquo em relação à sua base é incorreta: parábolas e hipérboles também são obtidas a partir de planos oblíquos à base.

Do mesmo modo, afirmar que é uma aplicação o fato de que quando os dois focos se aproximam a elipse tende para uma circunferência e que, quando eles se distanciam, a elipse toma uma forma cada vez mais alongada, é também inapropriado. Na verdade, esta propriedade deveria ter sido enunciada mais cedo, ao se introduzir a noção de excentricidade de uma elipse, apresentada no livro simplesmente como sendo a razão c/a e sem qualquer explicação a respeito da terminologia.

O único exercício interessante, não rotineiro, contextualizado, encontra-se na página 119, que pede para calcular a distância máxima de Mercúrio ao Sol (Exercício 7, página 118). É de se estranhar, no entanto, que as distâncias estejam expressas em milhas.

A seção sobre a hipérbole apresenta as mesmas características da que acabamos de analisar, sobre a elipse. Todos os comentários que fizemos acima são aplicáveis.

As aplicações são ainda mais pobres, resumindo-se a duas, das quais a segunda não é definitivamente uma aplicação, mas a definição geométrica original da hipérbole — apresentada com erro sério. Não é verdade que "os dois ramos da hipérbole são determinados por um plano paralelo ao eixo de simetria de dois cones circulares retos e opostos pelo vértice". Em verdade, a hipérbole é obtida por um plano que corta uma superfície cônica, circular e reta, e que encontra as duas folhas da superfície.

A seção dedicada à parábola possui os mesmos defeitos das duas seções anteriores. A pobreza das "aplicações" pode ser avaliada se vemos que uma delas diz que "A lei do movimento de um corpo que cai é uma relação parabólica". Este enunciado é por demais vago para ser de utilidade real para o aluno. Além disso, está incluída entre as aplicações a definição geométrica original da parábola, novamente com erro sério: não é verdade que ao se cortar obliquamente um cone circular reto por um plano obtenha-se necessariamente uma parábola. Para isto, é preciso que o plano seja paralelo a uma das geratrizes do cone. Além disso, a primeira aplicação sobre a propriedade focal da parábola é enunciada em termos de telescópios refletores, "os telescópios refletores mais simples têm espelhos com secções planas parabólicas", sem citar a propriedade focal.

Talvez a maior deficiência do estudo das parábolas, aqui desenvolvido, é a perda da oportunidade de se resgatar um assunto (mal) ensinado no Volume 1, onde o aluno foi informado de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria vertical. O livro não faz, no entanto, qualquer conexão entre os assuntos, mais uma vez contribuindo para uma visão fragmentada da matemática.

O capítulo sobre números complexos (Capítulo 4), seguindo o padrão dos três volumes da obra, é conciso, telegráfico mesmo. Motiva-se a introdução do conceito pelo interesse em definir raízes quadradas de números negativos. Mas não se menciona que este interesse foi provocado pela investigação relativa à resolução de equações de terceiro e quarto graus através de radicais. Corretamente, a igualdade entre números complexos é definida antes de abordar outros tópicos. A seguir, são apresentadas as operações com complexos na forma algébrica e listadas (sem demonstrações) suas propriedades.

A representação gráfica dos complexos é introduzida na página 147, mas não é suficientemente explorada. Por exemplo, o exercício resolvido 3, da página 150, pede para representar, no plano complexo, os complexos z tais que $|z-1+i| \leq 1$. O exercício é resolvido algebricamente: faz-se $z = x + yi$ e, usando a condição dada, chega-se a inequação $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$, que é reconhecida como representado a circunferência de centro $(1, -1)$ e raio 1 e seu interior. Isto está correto, mas pode-se chegar muito mais facilmente a esta conclusão escrevendo a condição dada na forma $|z - (1 - i)| \leq 1$ e reconhecendo que ela simplesmente estabelece que a distância entre z e o complexo $(1 - i)$ deva ser menor ou igual a 1. Na verdade, em nenhum momento o livro menciona que $|z - w|$ representa a distância entre as representações dos complexos z e w no plano.

Um exemplo da falta de uniformidade no nível da exposição ocorre na demonstração da fórmula de De Moivre, surpreendentemente demonstrada utilizando indução matemática. Embora a demonstração esteja rigorosamente correta, esta é a única vez nesta obra em que se recorre à indução finita para uma demonstração quando, especialmente no estudo de seqüências (Volume 2) há muitas outras ocasiões em que esta técnica pode ser introduzida de modo mais natural. Nota-se um erro gráfico que pode confundir o aluno na 13ª linha da página 155: foi omitido o passo intermediário $z^k = z^{k-1} \cdot z^k$.

Após a demonstração da fórmula de De Moivre, o texto mostra como aplicá-la para calcular raízes de números complexos.

O Capítulo 5 trata dos polinômios. São apresentadas as definições usuais, incluindo a de polinômios idênticos. Não se chama qualquer atenção para o fato, fundamental e nada óbvio, de que dois polinômios assumem o mesmo valor para qualquer valor de x se e somente se seus coeficientes são idênticos. A divisão é apresentada diretamente, utilizando o algoritmo da divisão, e pelo método dos coeficientes a determinar (não se diz ao aluno que o que torna o método possível é o fato acima mencionado). A seção sobre a divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é seguida da apresentação do dispositivo de Briot–Ruffini. Não é feita menção à importância do dispositivo de Briot–Ruffini para se calcular o valor de um polinômio.

O Capítulo 6 trabalha com as equações polinomiais e suas raízes. O enunciado de que todo polinômio pode ser decomposto em fatores do primeiro grau omite a ressalva importante de que para isso ser verdade devemos trabalhar no corpo complexo. Há outros pontos do capítulo onde a linguagem adotada pelo livro contribui para o aluno ficar mais confuso a respeito do papel dos números complexos no estudo dos polinômios. Por exemplo, na página 198, se afirma que "o número de raízes complexas de uma equação polinomial de coeficientes reais é sempre par". Naturalmente, os autores estavam se referindo a raízes complexas *não reais*.

Este livro mostra-se particularmente deficiente a partir do Capítulo 7, dedicado aos limites, seguido de um capítulo sobre as derivadas e de outro sobre as integrais.

O conceito de limite é reconhecidamente difícil, tanto assim que só foi bem formalizado em matemática no século XIX. As idéias vagas sobre limites de Newton, Leibniz e seus seguidores sobre os limites foram causa de ataques bem fundamentados e de dificuldades para os que tentavam compreender o cálculo infinitesimal.

Este livro não apresenta nenhuma motivação ou contextualização para o conceito de limite. Simplesmente apresenta uma função bem simples, $f(x) = 2x + 1$, e calcula seus valores quando x tende para 1, por valores superiores e inferiores. Evita, corretamente, uma formulação rigorosa deste conceito, desaconselhada por muitos para este estágio da escolaridade, mas se limita a este exemplo. Ora, este exemplo é trivial, ele não delimita e não explora os limites do conceito de limite. O aluno, com toda razão, pode se perguntar, "por que simplesmente não calculo $f(1)$?". Observações do texto, como "Nem é preciso que x assuma o valor 1" (página 208) só são significativas quando se vêm exemplos em que isso é necessário.

Quase imediatamente depois, o livro aborda os limites laterais, sem antes ter feito uma exploração do conceito de limite. Em seguida, na página 214, o conceito de continuidade, extremamente importante, é apresentado sumariamente, com uma definição telegráfica, e três exemplos gráficos, seguidos de três propriedades das funções contínuas, após o que estuda exemplos de limites envolvendo o infinito, por vezes usando uma linguagem descuidada. Por exemplo, na página 218, se faz menção ao "limite de uma função polinomial para $x \to \pm\infty$". O aluno, certamente inexperiente no assunto, pode ser levado a pensar que é possível x tender, simultaneamente, para $+\infty$ ou $-\infty$. Seria preferível dizer por extenso que serão estudados limites de funções polinomais quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Os gráficos apresentados para ilustrar o comportamento de determinadas funções são, em muitos casos, ruins. Por exemplo, nas páginas 216 e 217, os gráficos de $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ deixam a desejar, não ilustrando corretamente o comportamento assintótico da primeira função.

Ao tratar dos limites trigonométricos, a demonstração de que o limite quando x tende para 0 de $\operatorname{sen} x/x$ é 1, o livro comete várias impropriedades: inverte, sem preocupações com os sinais envolvidos, desigualdades e utiliza, sem nenhuma menção anterior o teorema que afirma que se $g(x) < f(x) < h(x)$ são funções contínuas e se os limites dos extremos coincidem, então a função intermediária tem limite, e ele coincide com o limite dos extremos. O limite, quando x tende para o infinito, de $(x + 1/x)^x$ é apresentado sem demonstração.

No Capítulo 8, dedicado às derivadas, o livro apresenta inicialmente a noção de taxa de variação. No entanto, os valores atribuídos a x são inteiros. Isso constitui, como já explicamos, séria impropriedade metodológica. Em nosso caso, além dos problemas já citados, como estamos interessados em taxas de variação instantâneas — as derivadas — seria importante já familiarizar o aluno com acréscimos pequenos. Mais uma vez, a utilização de uma calculadora seria extremamente importante aqui.

A motivação da derivada como o limite de retas secantes está bem feita. Na página 234, o livro apresenta regras de derivação, das quais só demonstra as duas primeiras, que são triviais. Aliás, seria mais apropriado deixar a derivada de $ax+b$ para um exercício ou exemplo e não incluí-la em regras de derivação. A regra da cadeia se encontra perdida, sem destaque, entre estas regras. Encontramos, entre os exercícios propostos ou resolvidos problemas contextualizados, mas o aluno já recebe o modelo matemático pronto, não é obrigado a raciocinar para ele, aluno, ver qual o modelo mais apropriado.

Em seguida, o livro apresenta as derivadas de ordem superior, a relação entre derivada e funções crescentes e decrescentes, os pontos críticos, concavidade e pontos de inflexão, como sempre de maneira telegráfica. Na última seção do capítulo, mostra como utilizar a derivada para esboçar os gráficos de funções. É de lamentar que este tópico, interessante, rico e de grande aplicabilidade seja tratado tão sumariamente. O único exercício resolvido pede para achar o gráfico de x^3. Não são resolvidos exercícios mais interessantes. Esta seria uma boa ocasião, por exemplo, para fazer gráficos de funções polinomiais e relacionar tais gráficos com propriedades estudadas anteriormente (por exemplo, número de raízes reais).

A integral é apresentada como antiderivada. Após a definição e cinco exemplos, o livro apresenta uma tabela de integrais simples, passando a apresentar algumas propriedades das integrais indefinidas, entre as quais está o importantíssimo teorema fundamental do cálculo, sem nenhum destaque.

A integral definida é introduzida de maneira vaga na página 258, dizendo que ela é um número real. Diz-se simplesmente que se a função é não-negativa a integral definida mede a área compreendida entre o gráfico da função, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$. Mais tarde, na página 260, é apresentado o conceito de integral definida como limite da soma de áreas de retângulos.

Na página 262, é feita uma demonstração informal do teorema fundamental do cálculo, apresentado simplesmente como uma técnica para calcular integrais definidas, seguido de quatro propriedades da integral definida.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 3

As características gerais desta coleção, já mencionadas na análise do primeiro volume, e que se mostraram algo atenuadas no segundo volume, comparecem também neste terceiro volume.

Fica evidente nele a preocupação em adestrar os alunos para os exames vestibulares. Embora esta preocupação seja natural, a estratégia do livro não é a mais indicada. Na nossa opinião, a melhor forma de fazer essa preparação é oferecer ao aluno uma visão da matemática que permita ao aluno perceber que ela faz sentido. O terceiro volume da coleção seria uma boa ocasião para, na medida do possível, interligar os diversos alunos estudados durante o ensino médio, proporcionando uma visão integrada da matemática. Por exemplo, como mencionamos acima, o estudo das parábolas permite revisitar as funções quadráticas e justificar propriedades que foram enunciadas sem justificativa no Volume 1. De um modo geral, estas oportunidades são perdidas neste volume.

Se o livro como um todo deixa muito a desejar, é necessário um comentário especial sobre a parte relativa a limites, derivadas e integrais. Mais uma vez, as ênfases do livro são equivocadas. A principal razão para abordar tais assuntos no ensino médio são as aplicações do cálculo a conceitos como taxa de variação, construção de gráficos, máximos e mínimos, e cálculo de áreas. No entanto, a motivação e as aplicações, como na maior parte do livro, recebem pouca atenção, privilegiando-se a prática repetitiva de exercícios de rotina. Assim, um estudo que poderia servir como um saboroso aperitivo ao estudo do cálculo na universidade, transforma-se em um motivo a mais para o aluno duvidar que estudar matemática possa ser uma tarefa gratificante.