Gelson Iezzi et al.

Matemática – volume 1

A coleção que analisaremos está na 10ª edição (a primeira foi em 1990). O prefácio informa que para esta edição uma reformulação foi feita atendendo às críticas de muitos professores, mas as alterações não modificaram a essência e a estrutura da coleção inicial. Este primeiro volume trata de funções e trigonometria. O texto é claro, apresentado de forma bem tradicional e não apresenta grandes novidades na forma de introduzir ou expor os conteúdos. Os exercícios existentes são coerentes com a teoria apresentada, graduados em diversos níveis de dificuldade mas, quase sempre, completamente manipulativos. São poucas as aplicações e não há intenção de fazer conexões entre assuntos diversos do livro. No final de cada capítulo há um texto de autoria de Hygino Domingues com tópicos interessantes da história da Matemática. A qualidade gráfica é boa e não há erros de digitação ou nas respostas dos exercícios.

Passemos à análise por capítulo.

Capítulo 1. Conjuntos

No início do primeiro volume de um livro de Matemática para o ensino médio é natural tratar de conjuntos. Mesmo que esse tema tenha sido tratado durante todo o ensino fundamental, agora ele tem uma importância maior: fornecer uma linguagem e notação adequadas para desenvolver as matérias que virão a seguir.

No livro, a apresentação inicial é feita com linguagem clara e precisa. Entretanto, o capítulo termina sem que seja estabelecida a relação entre a lógica e os conjuntos. O livro contém o conceito de conjunto complementar mas não o relaciona com a negação de uma afirmação. O caso da implicação é ainda de maior importância. A implicação lógica $p \Rightarrow q$ deve ser interpretada como uma inclusão entre conjuntos. Para esclarecer, se P é o conjunto dos objetos que possuem a propriedade p e se Q é o conjunto dos objetos que possuem a propriedade q, a implicação lógica $p \Rightarrow q$ significa $P \subset Q$. Por exemplo, dizer que "se um número é múltiplo de 6 então ele é par" equivale a dizer que o conjunto dos múltiplos de 6 está contido no conjunto dos números pares. O livro não faz considerações desse tipo e não esclarece, portanto, o significado da implicação. Cita apenas que frases do tipo "se p então q" serão representadas por $p \Rightarrow q$, mas não diz como utilizá-las corretamente.

A falta de conexão entre os conjuntos e a lógica faz com que os símbolos apresentados no livro sejam usados, ao longo da coleção, de forma apenas intuitiva. Sente-se falta também, neste primeiro capítulo, de um esclarecimento do que seja uma definição, um teorema, hipótese e tese. Mesmo que a intenção do livro não seja a de estruturar o material em bases formais (com o que concordamos), o aluno deve conhecer o significado dessas palavras. Estão ausentes também os termos "necessário" e "suficiente", não só neste capítulo, mas em toda a coleção.

Capítulo 2. Conjuntos numéricos

Os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais são apresentados, com a devida ênfase na representação sobre um eixo. Entretanto o texto não esclarece como localizar as frações na reta. Por exemplo, uma vez que os inteiros estão representados, como se pode localizar a posição do número 17/3? O natural seria explicar que como $\dfrac{17}{3} = 5 + \dfrac{2}{3}$ devemos dividir o espaço entre o 5 e o 6 em três partes iguais e tomar o segundo ponto de divisão. Neste lugar está representado o número 17/3. Outra falta que se percebe é que o livro não mostra por que a divisão continuada de dois inteiros é um decimal exato ou uma dízima periódica, mas por outro lado, ensina como obter uma fração equivalente a uma dízima periódica.

O livro perde ainda uma preciosa oportunidade de mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional, dizendo que isto pode ser mostrado com "alguns recursos de aritmética". Seria bom que o livro tivesse feito isto, porque é muito simples, esclarecedor e educativo. Continuando a leitura, vemos que o livro não diz claramente o que são números irracionais e porque eles completam a reta. Trata-se de um tema delicado. Como explicar o conceito de número real de forma correta e ao mesmo tempo acessível aos alunos do ensino médio? Pelo menos, o livro poderia dizer que um número real é uma expressão decimal (finita ou infinita). Quando tal expressão é finita ou periódica, tem-se um número racional. Em caso contrário, tem-se um número irracional. A ordenação dos reais parte do pressuposto que eles já estão localizados na reta e assim, $a > b$ significa que a está à direita de b. Está certo, porém o livro não mostrou claramente como representar números reais na reta. Por exemplo, dados os números 0,1563847 e 0,1563798561, qual deles é o maior? Muitos alunos têm dúvidas neste tipo de questão e o livro deveria esclarecer o que significa cada dígito de uma expressão decimal.

Muito do que vai se falar adiante depende da localização (pelo menos aproximada) dos números reais na reta. Mas a noção de aproximação não é sequer citada.

Capítulo 3. Noções básicas de geometria analítica, relações e funções

A introdução ao conceito de par ordenado é boa. Entretanto, a definição de par ordenado está equivocada. Segundo o livro, o par ordenado $(3, 3)$ não deveria existir, pois *par* é um conjunto formado por *dois* elementos, e o conjunto $\{3, 3\}$ só tem *um* elemento. Em seguida, aparece o conceito de relação, a nosso ver dispensável, uma vez que nunca será depois utilizado em toda a coleção.

A introdução sobre funções é boa e fornece exemplos concretos. Mas a definição de função é confusa, como na maioria dos livros didáticos brasileiros. Segundo a definição do livro, uma função é uma relação (portanto um conjunto de pares ordenados), que "faz corresponder" ... Ora, uma relação, ou um conjunto, não faz corresponder nada. Seria preciso explicar melhor o que significa corresponder.

Na realidade, a noção de função não necessita de produto cartesiano e relações. Basta ter dois conjuntos A e B e uma regra que permita associar a cada elemento de A um único elemento de B. Só isto.

Faltam as noções de função injetiva e sobrejetiva. Não se fala na composição de funções nem na função inversa. Em suma, o capítulo é pobre em conteúdo.

Capítulo 4. Função do 1º grau

Este capítulo trata das funções afins, isto é, do tipo $f(x) = ax + b$. O termo "função do 1º grau" usado pelo livro, não é adequado (apesar de largamente utilizado) uma vez que função não tem grau. Mas, vejamos o que mostra o livro.

A importante noção de taxa de variação é apresentada em dois exemplos. Entretanto, ficou faltando associar definitivamente a taxa de variação ao coeficiente a da função $y = ax + b$ e demonstrar que o gráfico da função afim é realmente uma reta. Há exercícios relacionados com física, o que é muito bom, e as noções de crescimento e decrescimento estão bem apresentadas, conduzindo ao estudo das inequações. E isto é tudo o que o livro apresenta.

O fato mais importante relativo às funções afins é que a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais de $f(x)$. Isto é o que permite utilizar a função afim para modelar problemas reais. Por exemplo, na introdução do capítulo, o livro fala no problema do táxi. É um ótimo problema onde o leitor pode perceber que a cada quilômetro rodado, o número de reais exibido no relógio aumenta sempre da mesma quantidade, e por isto, a função que modela o problema é a função afim. Mas esta noção está ausente do livro.

A importante noção de proporcionalidade é mencionada apenas de passagem, num único exercício e, assim mesmo, já sob a forma de uma função linear $y = ax$.

Ora, o que é relevante nas aplicações é saber caracterizar as situações em que o modelo linear se aplica. Por exemplo, por que o modelo linear não é adequado para o problema do táxi mencionado anteriormente? A noção de proporcionalidade é importantíssima e será utilizada várias vezes em outros assuntos desta coleção, mas infelizmente o livro não aborda uma questão sempre presente na cabeça dos alunos: quando um problema pode ser resolvido por regra de três?

Capítulo 5. Função do 2º grau

O capítulo sobre funções quadráticas inicia com três exemplos sendo, a exceção do primeiro, bastante obscuros para o aluno da primeira série do ensino médio e, em seguida, a fórmula de resolução da equação do segundo grau é apresentada sem nenhuma explicação. Os autores devem imaginar que os alunos já a conhecem do ensino fundamental mas seria adequado que agora, com um pouco mais de maturidade, eles pudessem conhecer a sua demonstração.

A obtenção do vértice da parábola é melhor apresentada aqui do que na maioria dos outros livros analisados. Quanto à existência do eixo de simetria o livro não demonstra formalmente (fazendo as contas), mas contém todos os elementos necessários para que o professor possa fazer com seus alunos. Entretanto, o método de completar o quadrado, que é tão elementar quanto útil, não é mencionado. Por exemplo, a expressão $y = x^2 - 6x + 11$ pode ser escrita na forma $y = x^2 - 6x + 2$ ou seja, $y = (x-3)^2 + 2$. Isto permite concluir que o valor mínimo da função é 2, e que ocorre para $x = 3$.

Infelizmente, não aparece a forma fatorada da função quadrática, tão útil quando os zeros da função são conhecidos. Com o conteúdo do livro seria difícil ao aluno resolver, por exemplo, o problema de obter uma função quadrática f cujos zeros são 2 e 6, e tal que $f(0) = 200$.

Os exercícios do livro são bons e contêm diversas aplicações. Mas além dos necessários exercícios manipulativos, a maioria das aplicações já exibe a fórmula pronta e só há realmente três problemas em que o aluno deva construir a função. Os problemas chamados do segundo grau são muito variados e atraentes. Os babilônios, há 3 mil anos (ou mais), já tratavam de determinar dois números conhecendo sua soma e seu produto, mas problemas deste tipo não são abordados aqui. Além disso, não aparecem problemas cuja resposta seja simplesmente: impossível. Coisas deste tipo fazem parte não só da Matemática como aparecem em situações reais.

A variação do sinal da função quadrática e as inevitáveis inequações são tratadas de forma clara, eficiente e em poucas páginas. Mérito para o livro neste ponto.

Capítulo 6. Função modular

Novamente o livro tem o mérito de apresentar um capítulo pequeno. Tudo é claro, bem explicado e resumido. Inicialmente, o capítulo apresenta a função $y = |x|$ e em seguida mostra como obter, a partir da definição de módulo, os gráficos de $y = |x| + 1$ e $y = |x - 1|$. Sente-se falta das noções de translação (vertical e horizontal) que permitiriam obter estes e outros gráficos de forma mais rápida e natural. São apresentadas equações e inequações simples e, como não há aplicações relevantes, o livro corretamente dedicou poucas páginas ao assunto.

Capítulo 7. Função exponencial

O capítulo começa com uma revisão de potências, que os alunos já conhecem do ensino fundamental. Entretanto, na definição inicial lemos: Sendo a um número real (não nulo) e n um número inteiro *temos* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\cdot$ Isto é mesmo uma definição ou conseqüência de algum fato anterior? O uso do verbo *ter* causa insegurança no leitor. Logo depois, quando introduz potência com expoente racional vemos uma afirmação do mesmo tipo: Sendo a um número real positivo e p/q um racional com q inteiro positivo, *temos*: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Afinal, isto é uma definição ou teorema? Há demonstração disto? O livro deveria explicar. Como está escrito, parece uma imposição que os alunos devem apenas aceitar.

No capítulo sobre números reais o livro não falou em aproximações de números irracionais mas usa agora este fato. Diz que "... $\sqrt{3}$, como sabemos, é um número irracional". Na verdade, isto foi decretado na página 17, sem nenhuma explicação, e portanto não vale aqui o argumento "como sabemos". Mesmo não tendo comentado antes as aproximações de números irracionais, seria adequado fazê-lo aqui, mostrando:

$$\begin{array}{llll}
2^{1{,}7} & = 3{,}249009585 & 2^{1{,}8} & = 3{,}482202253 \\
2^{1{,}73} & = 3{,}317278183 & 2^{1{,}74} & = 3{,}340351678 \\
2^{1{,}732} & = 3{,}321880096 & 2^{1{,}733} & = 3{,}324183446 \\
2^{1{,}732050808} & = 3{,}321997086 & 2^{1{,}732050809} & = 3{,}321997089
\end{array}$$

Observando estas duas colunas de números o aluno poderá compreender o que seja $2^{\sqrt{3}}$. No passado, era realmente difícil ao aluno entender potência de expoente irracional, mas hoje, com as calculadoras, possuímos um instrumento fundamental para o ensino e entendimento deste assunto. Não se entende por que o livro não faz a menor referência à calculadora, principalmente neste capítulo onde ela é indispensável.

O livro aborda as equações exponenciais antes de estudar a função exponencial. É estranho isto pois, nos capítulos anteriores, as equações e inequações apareceram depois do estudo das funções correspondentes de forma a utilizar suas propriedades. Desta forma, para a resolução das equações exponenciais o livro cita sem justificativa uma propriedade que decorre da injetividade da função exponencial. Porém, a função exponencial só virá depois e o fato de ser injetiva não será mencionado. Logo só resta aos alunos aceitar e seguir em frente.

Nas páginas 124 e 125 os gráficos das funções exponenciais estão muito mal feitos, exibindo um longo trecho horizontal. O aluno que estiver estudando o assunto pela primeira vez neste livro não terá a idéia correta do gráfico da função exponencial. Seria adequado aqui explicar o conceito de "assíntota" para tornar mais claro o comportamento da função exponencial, mas o livro não toca no assunto. Logo em seguida são abordadas as inequações exponenciais e o capítulo se encerra sem que o principal tenha sido dito. Não é feita a observação essencial que ao tomar, sobre o eixo dos x, uma seqüência de pontos igualmente espaçados (progressão aritmética), as ordenadas dos pontos correspondentes sobre o gráfico ficam multiplicadas pela mesma constante (progressão geométrica). Esta propriedade é característica das funções do tipo exponencial, ou seja, da forma $y = c \cdot a^{kx}$, e é responsável pela importância dessa função para modelar matematicamente um grande número de questões físicas, químicas, biológicas, econômicas, etc. Por exemplo, imaginem que certa droga injetada em uma pessoa tem a propriedade de que, em cada período de 4 horas, a metade da quantidade presente no organismo seja naturalmente eliminada. Injetando-se 12mg dessa droga em uma pessoa, pergunta-se que quantidade dela resta no organismo 6 horas após a aplicação. Este problema real, não traz em seu enunciado nenhuma fórmula. Entretanto, o fato que a cada *acréscimo* de 4 horas no tempo, a quantidade da droga presente no organismo fica *multiplicada* por 0,5, mostra que uma função do tipo exponencial é a adequada para modelar o problema. Sabendo isto, não é difícil concluir que após t horas de aplicação da droga, a quantidade presente no organismo e $f(t) = 12\big(0{,}5\big)^{\frac{t}{4}}$, e portanto, a resposta do problema em questão é $f(6) \cong 4{,}24$ mg. Mais precisamente, a propriedade característica das funções de tipo exponencial é que as razões $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ dependem apenas de h mas não de x.

Este capítulo mostra claramente a concepção arraigada em nosso país que a Matemática não passa de uma série de manipulações formais, a maioria sem justificativa lógica, sem aplicações ou objetivos. No presente livro, as poucas tentativas de aplicações não passam entretanto de pseudo-aplicações, uma vez que os enunciados já trazem as fórmulas prontas que resolvem o problema, e ao aluno só resta o trabalho de manipulação. Para exemplificar esta afirmação, vejamos o problema P.247 da página 128: "O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $f(t) = f(0) \cdot 3^{2t} \dots$". Ora, por que o crescimento de certa cultura de bactérias obedece a esta função? Como ela foi encontrada? Por que método? Estas são as questões que realmente importam. Fazer apenas cálculos sobre fórmulas dadas não significa aprender Matemática.

Os exercícios do capítulo são totalmente manipulativos e estéreis. Não há nenhum problema contextualizado e nenhuma relação com o mundo em que vivemos.

Capítulo 8. Função logarítmica

O capítulo que trata dos logaritmos e da função logarítmica é apresentado de forma tradicional da mesma forma que o anterior. Os exercícios são completamente manipulativos, tratando essencialmente de resolver equações e inequações, tudo completamente dissociado de alguma aplicação. Tendo abordado antes as equações exponenciais, neste ponto o livro não dá sequer a ênfase devida à utilidade dos logaritmos para resolver uma equação do tipo $2^x = 10$. Não há nenhuma aplicação no mundo real. Não há nenhum problema concreto onde o uso de logaritmos se faz necessário. Não diz para que servem os logaritmos e não apresenta sequer uma tabela de logaritmos.

Um exemplo típico de exercício é o seguinte:

P.343 – É dado $\log 5070 = 3{,}705$. Obtenha o logaritmo decimal de $\sqrt[5]{5070}$.

O leitor consciente teria duas perguntas a fazer: 1) como foi obtido o logaritmo desse número? 2) Para que serve encontrar o logaritmo de $\sqrt[5]{5070}$? O livro não dá respostas para nenhuma das duas perguntas.

No capítulo anterior, na página 128, aparece uma função exponencial com base e. Em seguida, há uma observação onde se comenta que esta base será estudada mais à frente. Não é verdade. O número e não é definido nem estudado. Há apenas, na página 137 uma pequena citação de Neper e a enigmática frase "Os logaritmos neperianos são usados na Análise Matemática e em assuntos técnicos". Naturalmente que o leitor que não conhece o número e continuará sem conhecê-lo.

Os conceitos de exponencial e logaritmo não podem ser dissociados. Considere, por exemplo o seguinte problema: uma bomba de vácuo consegue retirar, a cada minuto, 20% do ar de um recipiente fechado. Depois de quantos minutos com a bomba ligada, o recipiente terá 1% da quantidade de ar que tinha originalmente? Problemas deste tipo são muito importantes e educativos. Neste que citamos, a quantidade de ar retirada do recipiente entre os instantes t e $t + 1$. é proporcional à quantidade de ar existente no recipiente no instante t. No caso, a quantidade de ar no instante $t+1$ é igual à quantidade de ar no instante t multiplicada por 0,8. Isto mostra que uma função do tipo exponencial é a que modela o problema, e em seguida, o uso de logaritmos se faz naturalmente necessário para a solução da equação obtida. Mas nada parecido se encontra no livro.

O livro contém ainda uma seção intitulada "Aplicações dos logaritmos" que contém apenas material completamente ultrapassado (forma mista, logaritmo preparado, etc.). Não fala, como deveria, na calculadora que é hoje instrumento de uso corrente e imprescindível nas aplicações práticas.

Em suma, o capítulo de logaritmos dedica-se a cálculos estritamente manipulativos, sem nhenhum objetivo concreto e não contém nenhuma aplicação, seja em outras áreas da Matemática, ou no mundo em que vivemos.

Capítulo 9a. Introdução à Trigonometria

O livro inicia a trigonometria com um capítulo dedicado ao triângulo retângulo. Seno, cosseno e tangente de ângulos agudos são definidos e, corretamente, a noção de semelhança é utilizada para mostrar que essas definições não dependem do tamanho do triângulo. É apresentada uma tabela de razões trigonométricas de ângulos agudos, mas estranhamente, nos exercícios não solicita aos alunos que a consultem. Em cada exercício, os valores das razões trigonométricas necessárias são dadas no enunciado. Há tentativas de fornecer aplicações práticas que nem sempre são bem sucedidas. Um curioso exercício (R.128) diz que um observador mede em certo instante a sua distância a um avião (naturalmente em movimento) e, ao mesmo tempo, mede o ângulo que a linha de visada faz com a horizontal. Convenhamos que a situação é totalmente irreal.

Capítulo 9b. Funções circulares

O Capítulo 9b inicia falando de medidas de arcos. É assunto delicado, uma vez que não se entende imediatamente o que significa que arcos tenham medidas iguais em circunferências diferentes. Percebe-se que o texto tenta explicar o assunto mas não é inteiramente bem sucedido. Na página 185, aparece uma frase totalmente inadequada: "Convém lembrarmos que o comprimento da circunferência vale $2\pi r$, onde π é um número real de valor aproximado 3,14". Ora, de onde o aluno pode lembrar disso? Do ensino fundamental? Será que isto foi lá estudado? Na apresentação do livro os autores dizem textualmente que não acreditam que os alunos do 2º grau dominem todos os conceitos do programa do 1º grau. Muito bem, com este ponto de vista, em um capítulo que está iniciando o estudo da trigonometria, o livro deveria definir o número π e explicar sua imensa importância. Como não o faz, o aluno não pode entender direito o que vem a seguir. Logo depois, o livro decreta que em circunferências concêntricas um ângulo central determina arcos cujos comprimentos são proporcionais aos raios. Esta é uma afirmação obscura, pois a palavra *semelhança* (que explica tudo) não é sequer citada.

As funções seno e cosseno estão bem apresentadas e os exercícios são adequados. Entretanto, não é bom usar a palavra *cossenóide* para o gráfico da função cosseno. O gráfico de $y = \cos x$ é uma senóide exatamente igual ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$. Existe apenas uma translação de $\pi/2$ entre um gráfico e outro. Usar denominações diferentes para a mesma curva induz o aluno a pensar que elas são diferentes, o que não é verdade. Seria mais ou menos o mesmo que chamar o gráfico de $y = x^2$ de parábola e o gráfico de $y = (x-1)^2$ de coparábola.

Devemos ainda comentar uma falta de precisão no assunto sobre funções periódicas (página 201). A definição está correta, mas o primeiro exercício resolvido (R.138) tem o seguinte enunciado: "Construa o gráfico (um período completo) da função e dê seu domínio, imagem e período, a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$."

Ora, o domínio da função $y = \operatorname{sen} x$ é o conjunto dos números reais. Portanto, não há sentido em perguntar o domínio da função $y = 1 + \operatorname{sen} x$. É claro que este domínio é novamente $\mathbb{R}$. O fato que de costume só exibimos o gráfico de um período, não modifica o período da função. Além disso, para mostrar "um período completo da função", como diz o enunciado, nada impede ao aluno de escolher um outro intervalo: por exemplo, $-\pi \leq x \leq \pi$. Na verdade, todo o trabalho deste capítulo teria sido imensamente facilitado se antes se tivesse falado nas operações sobre funções: translações (horizontal e vertical), simetrias, dilatações e compressões.

Capítulo 9c. Relações entre as funções trigonométricas

Na página 225, o livro fala das identidades trigonométricas e dá uma receita para demonstrá-las. Textualmente o livro diz o seguinte: "De maneira geral, para demonstrar uma identidade $f(x) = g(x)$, procedemos do seguinte modo: 1º) chamamos $d(x)$ a diferença $f(x) - g(x)$; 2º) provamos que $d(x) = 0$ para todo x tal que $d(x)$ é definida." É bastante estranha esta recomendação uma vez que o próprio livro, para demonstrar a identidade $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ não utilizou este método. E mais ainda, para resolver por exemplo a identidade do exercício P.467 item f) $\sec^2 x \cdot \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$, o natural é desenvolver o segundo membro e chegar rapidamente ao primeiro.

A recomendação dada é apenas um método para se demonstrar identidades trigonométricas e, freqüentemente, não é o mais prático.

Capítulo 9d. Transformações

O capítulo trata de estabelecer as inevitáveis fórmulas de adição, de duplicação, do arco metade e da transformação em produto. Contém material abundante, correto nas demonstrações e com exercícios totalmente manipulativos e pouco criativos. Não há aplicações geométricas relevantes, o que é uma pena. Existem diversos problemas interessantes de geometria que necessitam dessas fórmulas, mas no livro há apenas dois. As fórmulas de transformação em produto são apresentadas sem que se saiba para que elas servem. Na verdade elas hoje servem para quase nada. No passado tinham a função de tornar certa expressão calculável por logaritmos, coisa que atualmente não tem a menor relevância. O único argumento plausível seria o de utilizar essas fórmulas no sentido inverso, ou seja, para transformar produtos em somas para poder calcular integrais, mas mesmo isto não se sustenta, com os métodos computacionais que estão disponíveis hoje.

Infelizmente não há conexões com o capítulo de funções. Por exemplo, não aparece uma pergunta do tipo: qual é o máximo da função $y = \operatorname{sen} x + \cos x$? Os exercícios têm graus diversos de dificuldade, mas são todos de pura manipulação das fórmulas. Não há nenhuma palavra ao leitor esclarecendo para que serve todo esse material.

Capítulo 9e. Equações

O capítulo dedicado às equações trigonométricas é correto e cuidadoso na exposição. Diversos exercícios são resolvidos e os propostos são de dificuldade variada. O texto é extremamente seco e, em nenhum momento se diz ao leitor que objetivo tem o capítulo. Por que devemos saber resolver equações trigonométricas? Esta pergunta fica no ar, uma vez que não há nenhum problema concreto cuja solução necessite de uma equação trigonométrica. Por exemplo: em uma semicircunferência de raio 1 está inscrito um retângulo de perímetro 4. Qual é a área desse retângulo? Este é um problema de geometria que possui uma solução natural usando trigonometria.

O livro possui abundante material de trigonometria em capítulos fechados em si mesmos, sem nenhuma aplicação ou conexão com outros assuntos.

Capítulo 9g. Funções circulares inversas

No Capítulo 9g, o livro trata das funções circulares inversas. Fica difícil falar nisso uma vez que o livro não definiu o que seja uma função bijetiva. Por esta falha conceitual, a definição de $y =$ arc sen x contém um equívoco. Após certa análise o livro conclui: “Portanto, o domínio é $I = [-1, 1]$”. Ora, para que uma função esteja definida, é preciso dar o domínio, o contra-domínio e a regra de associação.

Isto aliás, nunca ficou claro em todo o livro. Ao leitor, fica parecendo que o domínio de uma função sempre se determina depois de conhecida a “fórmula” de associação.

Capítulo 9h. Resolução de triângulos

O livro termina com um pequeno capítulo sobre resolução de triângulos. São poucas páginas dedicadas a assuntos da maior importância. Esta parte da trigonometria que realmente possui inúmeras aplicações práticas é deixada para o final e tratada de forma breve como se o assunto fosse de pouca relevância. Na verdade, ocorre o contrário. As leis dos senos e dos cossenos são o que de mais útil a trigonometria possui nas aplicações práticas para os alunos do ensino médio. Infelizmente o foco do livro apontou, em trigonometria, apenas para as manipulações estéreis das fórmulas.

Conclusão

O livro apresenta a Matemática de forma muito pouco atrativa para os alunos. Uma imagem que se pode fazer do livro é de um remédio que é bom mas tem sabor ruim. Não procura mostrar que a Matemática é interessante e tem relação com o mundo em que vivemos. Além de algumas falhas conceituais o livro por vezes omite temas e conceitos importantes e, por outro lado, em outros capítulos tem a preocupação de exibir conteúdos em grande quantidade, mas sem dizer para que servem. Quanto aos exercícios, repetimos o que dissemos durante a análise do livro: são muito bons no aspecto manipulativo e excelentes para que os alunos dominem e compreendam os conceitos, mas no âmbito das aplicações são fracos ou inexistentes. Não há preocupação de fornecer exercícios criativos ou desafiadores à imaginação. Não usa a calculadora nem estimula os alunos a conjecturar algum resultado. Em suma, o livro é bom no aspecto “burocrático” da Matemática mas não acompanha a tendência atual de promover um ensinamento mais dinâmico, integrado com as tecnologias disponíveis e voltado para as aplicações no mundo real.

Gelson Iezzi et al.

Matemática – volume 2

O segundo volume da coleção se encontra na oitava edição (a primeira foi em 1990). O prefácio informa que para esta edição foi feita uma reformulação atendendo às sugestões de muitos professores, mas as alterações não modificaram a essência e a estrutura do volume.

Este volume trata de progressões, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, combinatória e probabilidade, e geometria espacial. O texto é claro, apresentado de forma bem tradicional e não apresenta grandes novidades na forma de introduzir e expor os conteúdos. Os exercícios são coerentes com a teoria apresentada, graduados em diversos níveis de dificuldade, mas são, quase sempre, apenas exercícios de manipulação. São poucas as aplicações e não há a intenção de fazer conexões entre assuntos diversos tratados no livro. Calculadoras e computadores são ignorados e não há exercícios desafiadores.

No final de cada capítulo há um texto de autoria de Hygino Domingues com tópicos interessantes da história da Matemática.

A qualidade gráfica é boa e não há erros de digitação ou nas respostas dos exercícios.

Capítulo 1a. Progressão aritmética

Logo na página 1 lemos o seguinte: "Muitas vezes necessitamos considerar os elementos de um conjunto, colocados ou dispostos em certa ordem, constituindo o que se chama uma sucessão ou seqüência". Trata-se de um engano e, talvez os autores não tenham notado que isso impediria que em uma seqüência houvesse termos iguais.

A linguagem é, em geral, cuidadosa, o que não impede eventuais erros tais como "implica em ...", encontrado na página 7. As aplicações são esquecidas e não há nenhum problema nesse capítulo, apenas exercícios. Não há uma tentativa de relacionar a idéia de progressão aritmética à idéia de aumento constante e tampouco há tentativas de conexões com material tratado no Volume 1. Não há problemas do tipo "determinar quantos são os inteiros positivos menores que 500 que são divisíveis por 3 mas não por 5", que permitiriam relacionar este assunto com os conjuntos estudados no primeiro volume. Finalmente, não há referência à conexão entre as progressões aritméticas e a função afim.

Capítulo 1b. Progressão geométrica

O livro trata as progressões geométricas de forma correta e tradicional, mas aplicações são esquecidas. Há apenas um problema nesse capítulo, o de número P.38, que mostra uma situação real e não há sequer uma tentativa de relacionar a idéia de progressão geométrica à idéia de taxa relativa de aumento constante. Os exercícios R.23 e P.67 fazem referência à geometria (de forma aliás muito parecida) mas não há nenhuma referência à conexão entre as progressões geométricas e a função exponencial estudada no primeiro volume.

As aplicações não aparecem. Em particular, não há nenhum problema de juros compostos. A linguagem é cuidadosa, especialmente na parte de limite da soma dos termos.

Capítulo 2. Matrizes

Na primeira parte do capítulo, o livro introduz a noção de matriz e as notações de forma breve e bem feita. A seguir, apresenta a adição de matrizes, a multiplicação por número e a multiplicação de matrizes, esta última com um exemplo motivador para a definição que virá em seguida.

A exposição é clara, o livro procura desde logo relacionar sistemas de equações lineares à multiplicação de matrizes e destaca os aspectos em que as matrizes apresentam comportamento diferente do dos números reais. Há um exercício extremamente interessante conectando a multiplicação de matrizes a situações do cotidiano, o de número P.118. As propriedades da multiplicação de matrizes são apresentadas sem provas, mas os exemplos e exercícios devem satisfazer ao leitor.

Na terceira parte do capítulo são apresentados os conceitos de matriz transposta e de matriz inversa. As propriedades das transpostas não são enunciadas, embora haja um exercício em que se peça para verificar, em um caso particular de duas matrizes 2×2 dadas, que a transposta da soma é a soma das transpostas e que a transposta do produto é o produto, na ordem inversa, das transpostas. Talvez o aluno que estiver lendo o livro possa pensar ter sido uma simples coincidência, uma vez que tal propriedade não é enunciada.

A matriz identidade é definida e sua principal propriedade ($AI = A$ e $IB = B$) só é apresentada — e sem justificativa — para A e B quadradas. Inversas são definidas corretamente, porém não é citado que, se uma matriz é invertível, sua inversa é única — fato, aliás, muito fácil de provar — nem que se A é quadrada e $AB = I$ então $BA = I$. Faltam naturalmente aplicações e o leitor não percebe, portanto, para que deve aprender calcular a inversa de uma matriz. Uma possibilidade interessante seria discutir a solução da equação $AX = B$ onde A e B são matrizes 2×2. Se A é invertível o leitor pode concluir que $X = A^{-1}B$, mas o que ocorre se A não é invertível? Uma outra questão relevante é a de mostrar que se A e B são matrizes invertíveis (de mesma ordem) então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Para os iniciantes, este (talvez inesperado) resultado seria um bom exercício para fixar os conceitos apresentados no livro.

Capítulo 3a. Introdução aos sistemas lineares

O capítulo é curto, bem escrito, introduz os conceitos de equações e sistemas de equações lineares e de solução de um sistema. Classifica os sistemas lineares conforme tenham zero, uma ou infinitas soluções e mostra também a representação dos sistemas por matrizes.

Capítulo 3b. Sistemas escalonados

Capítulo muito bom, no qual se introduz o conceito de sistema escalonado. Já aqui aparecem problemas de discussão de sistemas.

Capítulo 3c. Sistemas equivalentes

Aqui as operações elementares são definidas, seguindo-se uma demonstração que elas transformam um sistema em outro equivalente. O livro mostra como escalonar e resolver um sistema e os exercícios resolvidos são muito bons mostrando inclusive (o que é raro) as soluções de um sistema indeterminado. É surpreendente que nos dias de hoje, em que os livros apenas *observam, notam, reparam, dizem que é claro, dizem que provarão mais tarde em um capítulo que nunca será encontrado*, alguém prove que operações elementares transformam um sistema em outro equivalente. Ponto para o livro.

Capítulo 3d. Matrizes e sistemas lineares

O capítulo é pequeno e mostra apenas como resolver sistemas operando sobre as matrizes associadas.

Capítulo 3e. Regra de Cramer para sistemas 2×2

O capítulo começa mal, deduzindo a regra de Cramer para sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Infelizmente, transforma, por meio de operações que não são sempre reversíveis, o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)x = c_1b_2 - b_1c_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2 \end{cases}$, dando a entender — ou pelo menos, permitindo que se entenda — que esses sistemas são equivalentes. Ora, isso não é verdade: se (x, y) satisfaz o primeiro sistema, então (x, y) satisfaz o segundo, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, é claro que (tomando todos os coeficientes iguais a 1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ implica $\begin{cases} 0x = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$ mas esses sistemas não são equivalentes. Em seguida, afirma-se que se $a_1b_2 - b_1a_2$ for diferente de zero, então o primeiro sistema possui uma única solução: $x = \dfrac{c_1b_2 - b_2c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$ e $y = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\cdot$ Infelizmente, embora a afirmação esteja correta, não é isso o que se provou. Provou-se que, nesse caso, o segundo sistema admite essa única solução. O primeiro sistema, que não é equivalente ao primeiro, poderia ter essa única solução ou não ter solução alguma. Em seguida, o livro define determinante para matrizes 2×2 e formaliza a regra de Cramer para sistemas lineares 2×2.

Embora não haja afirmações erradas neste capítulo — aliás, afirmações erradas sobre a regra de Cramer são extremamente comuns em livros didáticos —, há um erro de lógica na demonstração da regra de Cramer, como apontamos.

Capítulo 3f. Regra de Cramer para sistemas $n \times n$

O capítulo começa mal, com a frase: "Para estender os resultados do capítulo anterior aos sistemas $n \times n$, (...) precisamos estabelecer uma definição que nos permita calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$."

Os autores optam por definir determinante de matriz $n \times n$ recursivamente, pelo desenvolvimento pelos elementos da primeira coluna. Tal escolha é um falso facilitador, pois, embora torne a definição algo bastante simples, torna bastante complicado provar as propriedades dos determinantes. O livro apresenta a seguir a regra de Sarrus, define cofatores e apresenta o Teorema de Laplace, o qual, conforme já se esperava, não é demonstrado. A regra de Cramer é então estendida — ou seja, diz-se que vale e ponto final — para sistemas lineares $n \times n$.

O que o livro não diz, e poderia dizer, é que resolver sistemas lineares pela regra de Cramer é um processo extremamente ineficaz. O leitor pode não perceber isto quando tenta resolver um sistema 3×3, mas se tentar resolver um 5×5 pela regra de Cramer vai perceber a quantidade absurda de contas que terá que fazer. Por exemplo, um computador comum, capaz de realizar um milhão de multiplicações e divisões por segundo, para resolver um sistema 15×15 pela regra de Cramer levaria 1 ano, 1 mês e 16 dias. Entretanto, utilizando o método do escalonamento, este mesmo computador levaria apenas 2,5 milésimos de segundo para resolver o mesmo sistema.

Capítulo 3g. Sistemas homogêneos

O livro inicia o curto capítulo apresentando um sistema homogêneo $n \times n$ e, em seguida diz textualmente: “Se S é um sistema linear homogêneo com igual número de equações e incógnitas, então a classificação de S quanto ao número de soluções pode ser feita rapidamente, com o emprego da regra de Cramer”. Não é verdade que calcular um determinante de ordem n seja um processo rápido. Só talvez para $n = 3$, mas no geral, o escalonamento é o processo adequado.

Capítulo 3h. Discussão de sistemas

O capítulo começa discutindo sistemas por escalonamento. Na realidade esta parte inicial do capítulo para nada serve, pois ela repete com menos brilho o Capítulo 3b. Com a agravante de lá haver problemas resolvidos de discussão de sistemas não-escalonados e aqui haver apenas uma conversa, sem nenhum exemplo, sobre sistemas já escalonados. Há um único exercício resolvido, no fim do capítulo, sobre sistemas que não sejam $n \times n$.

Em seguida, o livro discute sistemas $n \times n$. Para estes, sugere o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes e, caso tal determinante seja nulo, sugere em seguida o escalonamento. Tal recomendação é inteiramente fora de propósito. Para que serve calcular o determinante (de ordem n) da matriz dos coeficientes? O escalonamento vai dizer tudo sobre o sistema.

O autor de um livro didático deve ter a preocupação de transmitir sua experiência no trabalho com a Matemática. Ao mostrar métodos diversos para atingir certo objetivo, deve opinar e dizer qual acha mais eficiente. Este tipo de comentário, para os alunos que têm pouca experiência, é do maior valor.

Capítulo 3i. Matriz inversa e determinantes

O capítulo começa provando o teorema do determinante da matriz produto para matrizes 2×2 e em seguida o livro cita que o resultado vale para matrizes quadradas de qualquer ordem. Calculam-se os determinantes das identidades de ordens 2, 3 e 4 e “generaliza-se”! Em seguida prova-se que se A é invertível (aliás, em capítulos anteriores o livro falava corretamente em invertível; agora passou a usar a palavra inversível, palavra essa que não costuma ser encontrada nos dicionários), então o determinante de A é diferente de zero. A recíproca é afirmada, mas não provada.

O Capítulo 3 pode ser considerado confuso. Dá a impressão de haver sido escrito por autores que não compartilham o mesmo ponto de vista sobre a abordagem de sistemas de equações lineares — até a palavra invertível, a partir de certo ponto do livro, transforma-se em inversível. O ponto alto é a abordagem por escalonamento. Muito boa, chegando rapidamente à resolução e discussão de sistemas. Sente-se, no entanto, a ausência de algoritmos para determinação de inversas.

A abordagem de determinantes, entretanto, é confusa, incompleta e superficial. Insinua-se sua utilização para a discussão de sistemas, mas o teorema de Rouché não é citado. Define-se determinante recursivamente e nenhuma propriedade é demonstrada — nem ao menos a nulidade no caso de linhas ou colunas iguais, nem sequer o efeito da troca de posição de duas linhas ou de duas colunas. Propriedades que permitem o cálculo de modo eficiente de determinantes de ordem superior a 3, como o teorema de Jacobi, não são sequer citadas. Apresentam-se a noção de cofator, o teorema do determinante da matriz produto e o teorema da singularidade das matrizes de determinante nulo, mas não se ensina como achar inversas por meio de determinantes. Ao fim do capítulo a sensação que se tem é que determinantes servem para poucas coisas: permitem saber se uma matriz tem ou não inversa, mas não determinam a inversa; são dificílimos de calcular; permitem determinar a natureza de um sistema de equações lineares, mas apenas em certos casos...

Capítulo 4. Combinatória

Capítulo 4a. Introdução aos problemas de contagem

O capítulo de combinatória começa bem, apresentando o princípio multiplicativo e explorando árvores. Os exercícios, tanto os resolvidos como os propostos são fáceis e em todos eles, as árvores envolvidas são “regulares”. Exemplifiquemos melhor, com um exercício proposto no texto, o exercício 245: “Uma moça tem 5 saias e 8 blusas. Durante quantos dias poderá sair usando saia e blusa sem repetir o mesmo conjunto?” Este é um bom e fácil exercício. A moça pode escolher a saia de 5 modos e, qualquer que tenha sido a escolha da saia, poderá escolher a blusa de 8 modos. Portanto, ela poderá forma $5 \times 8 = 40$ conjuntos diferentes. Entretanto, não há no texto problemas em que o número de modos de realizar a segunda etapa dependa de como foi realizada a primeira etapa. Por exemplo, este mesmo problema não seria tão elementar se uma das saias fosse vermelha e duas das blusas fossem amarelas e a moça não vestisse nunca saia vermelha com blusa amarela. Problemas como este estão completamente ausentes do livro.

Capítulo 4b. Combinações, arranjos e permutações

O capítulo é curto e introduz as noções de combinações simples, arranjos simples e permutações simples. Permutações, em particular, são introduzidas de modo independente de arranjos e não como um caso particular destes. Uma opção que muitos autores atualmente adotam é simplesmente não falar em arranjos. As combinações e permutações resolvem os problemas onde devemos escolher subconjuntos de um conjunto dado e, eventualmente, formar listas ordenadas de seus elementos.

Capítulo 4c. Cálculo combinatório

Aqui são deduzidas as fórmulas para o cálculo de combinações, arranjos e permutações simples. O livro define fatorial de inteiros maiores que zero e a definição $0! = 1$ só vai aparecer no capítulo seguinte.

Capítulo 4d. Complementos de cálculo combinatório

Neste capítulo são apresentadas a relação das combinações complementares e a relação de Stifel. As deduções são feitas por elegantes raciocínios combinatórios. Apresentam-se também arranjos com repetição e permutações com elementos repetidos, mas as permutações circulares e combinações com repetição são omitidas.

Os exercícios apresentados são bons mas, quase sempre, do tipo direto não apresentando nada diferente, criativo ou desafiador. Em suma, um capítulo correto e tradicional.

Capítulo 5. Binômio de Newton

O Binômio de Newton é um assunto austero, que não permite grandes brilhos na exposição. O texto é correto, e explica com detalhes o desenvolvimento do binômio. Entretanto, nota-se a ausência do triângulo aritmético.

Capítulo 6. Probabilidade

Capítulo 6a. Introdução à teoria das probabilidades

O capítulo é muito bom, introduzindo o conceito de experimento aleatório, espaço amostral e evento. Constrói também união, interseção e complemento, de forma clara e didática.

Capítulo 6b. Probabilidades em um espaço amostral finito

O livro contém aqui a definição e as propriedades das probabilidades em espaços amostrais finitos e, em particular, o caso equiprovável. Da mesma forma que no capítulo anterior, a exposição é muito boa e tanto os exemplos quanto os exercícios resolvidos permitem que o assunto seja bem entendido pelos alunos.

Capítulo 6c. Complementos sobre probabilidades

Aqui se trata de probabilidade condicional e de independência. Os exercícios propostos e os resolvidos são interessantes, havendo inclusive problemas que envolvem o teorema de Bayes, embora este teorema não seja enunciado. Opção correta do livro pois isto seria uma formalização desnecessária e que só serviria para dificultar a compreensão. Causa apenas um pouco de estranheza a não-utilização de árvores de probabilidades, já que as árvores haviam sido introduzidas no início do capítulo de Combinatória e seriam bastante úteis neste ponto.

Embora se sinta falta de problemas clássicos, como o problema dos aniversários, e de problemas sobre as loterias tão comuns no Brasil, o capítulo de probabilidades é um dos pontos altos do livro. Preciso e claro, sem ser superficial.

Capítulo 7. Introdução à geometria espacial

As noções iniciais de geometria espacial são apresentadas de maneira informal. São muitas as figuras e as notações e vocabulário do capítulo de conjuntos são utilizados corretamente. O livro cita alguns axiomas, explica que são proposições aceitas sem demonstração e, em seguida, faz com detalhes a determinação do plano.

Capítulo 8. Diversos temas de geometria espacial

Na questão do paralelismo, o livro inclui planos coincidentes também como paralelos. Todos os livros brasileiros fazem assim, apesar de não ser a atitude mais cômoda uma vez que em todas as questões relevantes sobre planos paralelos, eles são distintos. Isto obriga a um cuidado nos enunciados em dizer: "dois planos *distintos* são paralelos ..." como se percebe nos exercícios do capítulo. Melhor seria definir simplesmente planos paralelos como sendo planos que não possuem ponto comum. Mas, isto é realmente uma questão de opinião (ou de gosto) e não desmerece o capítulo que está muito bem feito.

Na questão do perpendicularismo ocorre algo semelhante. Em nossa opinião, retas ortogonais são retas que formam ângulo reto. Só isto. O livro entretanto obriga que retas ortogonais sejam reversas e não vemos qual a vantagem disso.

Muito pelo contrário. O termo ortogonal deve ser amplo. Por exemplo, livros de geometria analítica falam nos eixos *ortogonais* e um famoso teorema diz que se uma reta for ortogonal a duas retas concorrentes então ela é perpendicular ao plano definido pelas concorrentes. Esta atitude simplifica os enunciados. Por exemplo, a definição da página 205 poderia ser: "uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano". A não inclusão do perpendicularismo na ortogonalidade faz com que o livro crie símbolos distintos para "perpendicular", "ortogonal" e "perpendicular ou ortogonal". Convenhamos que isto é uma complicação inteiramente desnecessária.

Sobre distâncias, há uma retificação a fazer. A distância entre dois pontos A e B não é o segmento AB; é o *comprimento* do segmento AB. Distância é um número real positivo (ou nulo).

O livro tem a virtude (e não poderíamos deixar de elogiar) de falar em teoremas, hipótese, tese e demonstração. Aqui o aluno terá oportunidade de perceber um pouco da estrutura lógico-dedutiva da Matemática. O livro enuncia teoremas de forma clara, destaca a hipótese e a tese, e fornece demonstrações corretas e precisas. A demonstração do Teorema 1 (página 216) é uma rara oportunidade que os alunos têm de observar o método de redução ao absurdo. Na demonstração do Teorema 2 (página 219), o argumento que leva à contradição é o postulado de Euclides, mostrando a importância dos axiomas como base lógica para se obter o resultado proposto. O difícil Teorema 3 (teorema do pé de galinha como era chamado antigamente) é demonstrado da maneira tradicional, mas de forma clara e precisa.

Os exercícios do capítulo são completamente teóricos e têm como objetivo fixar todas as informações do texto. Neste aspecto, são perfeitos. Entretanto, faltam aplicações. O ambiente em que vivemos está cheio de retas paralelas, concorrentes e reversas, planos paralelos e secantes. Sente-se falta da conexão entre os temas apresentados e o mundo real.

O capítulo de introdução à geometria espacial deste livro supera em muito os outros similares brasileiros. É cuidadoso e objetivo. Não fala demais e tem a preocupação de estabelecer bases sólidas para o desenvolvimento da geometria espacial. Para ficar ainda melhor, deveria incluir as noções de ângulo entre dois planos e ângulo entre reta e plano.

Capítulo 9. Prisma

O prisma é definido corretamente e a noção de translação aparece mesmo que de forma intuitiva. A apresentação dos diversos prismas e suas denominações é feita com esmero e com boas ilustrações. Depois de todo o cuidado demonstrado até agora, alguns senões aparecem. A palavra volume não é definida e não é dito explicitamente o que significa medir o volume de um sólido. Em seguida vem o grande chute: "De um modo geral, o volume V de um cubo de aresta a é dado pela fórmula $V = a^3$". Trata-se realmente de um ponto delicado. Não é fácil explicar por que esta fórmula vale para qualquer valor real positivo de a. Mas, pelo menos, o livro poderia reconhecer essa dificuldade e mostrar, por exemplo que o volume de um cubo de aresta 2,5 é $(2{,}5)^3$. Ao abordar o volume do paralelepípedo retângulo ocorre a mesma rapidez na conclusão. É claro que se as três dimensões forem inteiras, o volume é o produto delas como mostra o exemplo do livro. Mas, e se não forem inteiras? Por que continuamos a multiplicá-las?

No volume do prisma qualquer ocorre um fato curioso. O livro mostra um prisma qualquer e um paralelepípedo retângulo com bases de mesma área apoiados em um plano horizontal. Um outro plano também horizontal produz nos dois sólidos seções de mesma área pois ambas são congruentes às respectivas bases. Tudo muito bom e correto. Mas, em seguida aparece a enigmática frase: "Por isso, podemos dizer que o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo". Reparem que não há nenhum argumento anterior que permita tirar essa conclusão e o leitor deve ficar atônito. (Por que não decretar logo que o volume do prisma qualquer é o produto da área da base pela altura?) O que resolve a questão é o Princípio de Cavalieri que, inexplicavelmente, não foi sequer citado.

Capítulo 10. Pirâmide

O livro define a pirâmide e descreve seus elementos com clareza. A pirâmide regular, as relações métricas entre seus elementos e a área são apresentadas com cuidado. O problema está na obtenção do volume como veremos a seguir.

O prisma triangular é cortado em três pirâmides triangulares e as figuras mostram isso muito bem. Entretanto, o livro usa na "demonstração" que duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume. Ora, isto não é claro de jeito nenhum. Nada do que se disse anteriormente permite esta conclusão e, mais uma vez, a chave para a resposta é o Princípio de Cavalieri. Vamos ver de forma breve como se pode justificar. Considere duas pirâmides com bases de área A contidas num plano horizontal e vértices O e O' distando h do plano que contém as bases. Considere agora um outro plano horizontal distando x de O $(0 \leq x \leq h)$. Este plano secciona as duas pirâmides segundo figuras de áreas S e S' que são semelhantes às respectivas bases. Como a razão de semelhança entre figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança temos $\dfrac{S}{A} = \left(\dfrac{x}{h}\right)^2 = \dfrac{S'}{A}$, e portanto, $S = S'$. Como, para qualquer plano horizontal as seções produzidas nas duas pirâmides têm mesma área, então, pelo Princípio de

Cavalieri, elas têm mesmo volume.

Utilizando o argumento acima e a decomposição do prisma triangular mostrada pelo livro, conclui-se que o volume da pirâmide triangular é a terça parte do produto da área da base pela altura. Resolvida esta parte percebemos mais uma imprecisão na leitura da página 255. Textualmente:

> "Apoiados no volume da pirâmide triangular, podemos generalizar a expressão $V = 1/3 \cdot$ (área da base) $\cdot$ (medida da altura) para qualquer pirâmide."

Esta é uma frase enigmática para o leitor. Por que não dizer claramente como fazer a generalização? Basta dividir uma pirâmide qualquer em pirâmides triangulares. Uma figura mostrando o polígono da base dividido em triângulos esclareceria a questão.

Capítulo 11. Cilindro

O livro só aborda cilindro de base circular e, portanto, a definição perde sua generalidade. Mais uma vez, usa o argumento correto que, da mesma forma que no prisma, seções paralelas à base são congruentes às respectivas bases, e daí conclui que o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura. A falha está que essa conclusão (que está correta) não se apoia em nenhum fato anterior.

Os exercícios são bons e muitos são contextualizados.

Capítulo 12. Cone

Neste capítulo, o cone também é apresentado apenas com base circular. Para o cálculo da área lateral do cone circular reto (página 278), lemos com satisfação uma frase que transcrevemos textualmente:

"Notemos que quando dobramos o arco, dobra a área do setor; triplicando-se o arco, a área do setor também é triplicada, e assim por diante. De um modo geral, a área do setor é proporcional ao comprimento do arco. Portanto, a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples".

Esta singela lição deveria estar presente com destaque no Volume 1 da coleção quando se estudou a função linear. Se duas grandezas são relacionadas de tal modo que multiplicando uma por um número natural verifica-se que a outra ficou multiplicada pelo mesmo número, então elas são diretamente proporcionais e a regra de três é a ferramenta adequada para resolver os problemas dessa situação.

Quanto ao volume do cone vale o mesmo comentário feito várias vezes anteriormente: argumento correto mas sem a justificativa adequada. Os exercícios do capítulo são bons e adequados à compreensão do assunto.

Capítulo 13. Esfera

O capítulo sobre a esfera é bom. O volume é deduzido com esmero usando o (inexistente) Princípio de Cavalieri. A esta altura, o leitor já deve ter se acostumado com o fato que:

Se dois sólidos são tais que qualquer plano paralelo a um plano dado produz em ambos seções de mesma área então eles têm mesmo volume.

Este é o axioma que resolve todas as questões sobre volumes dos sólidos simples, e que deveria ter sido enunciado com todo o destaque no Capítulo 9, quando se começou a falar no volume do prisma.

A área da esfera é deduzida com um bom argumento (que pode parecer sofisticado mas na verdade não é) e utiliza de modo simples e informal a noção intuitiva de limite.

Sente-se falta da relação da esfera com os sólidos apresentados anteriormente. As esferas inscrita e circunscrita a cilindros, cones, cubos, prismas e pirâmides regulares, geram problemas interessantes que estão infelizmente ausentes.

Capítulo 14. Troncos de pirâmide e de cone

Somente agora o livro vai falar de semelhança. Mesmo assim, o assunto fica restrito a pirâmides e cones.

O livro mostra que um plano paralelo à base de uma pirâmide produz uma seção que é semelhante à base e que a razão entre as áreas (da seção e da base) é o quadrado da razão de semelhança. Este importantíssimo fato, se fosse inserido no Capítulo 10, onde se estudou a pirâmide, permitiria obter o volume da pirâmide de forma bem mais convincente.

O livro mostra ainda que com uma seção paralela à base, a razão entre os volumes da pirâmide menor e o volume da pirâmide total é o cubo da razão entre as respectivas alturas mas é incapaz de dizer que as duas pirâmides são semelhantes. Infelizmente não aparece a definição geral de semelhança e o livro perde a oportunidade de explorar o fato que a razão dos volumes de dois sólidos semelhantes quaisquer é o cubo da razão de semelhança.

O volume do tronco de pirâmide é deduzido com todos os detalhes e em seguida o tronco de cone é abordado com interessantes exercícios. Uma pergunta entretanto fica no ar: por que não aparecem os troncos de prisma e cilindro?

Capítulo 15. Poliedros

O capítulo final inicia com diedros, triedros e ângulos poliédricos. Relações entre ângulos são apresentadas mas não se percebe que importância tem este material num capítulo que pretende concluir o estudo da geometria espacial.

O livro contém uma definição adequada de poliedro convexo e cita (sem nenhuma menção a uma demonstração) que neles vale a relação de Euler: $V+F=A+2$. Os sólidos platônicos são definidos e há argumentos de como se poderia obter uma demonstração que eles são apenas cinco.

Os exercícios sobre poliedros podem parecer um pouco difíceis ao leitor pois na teoria, muito resumida, o livro não mostra claramente como contar as arestas de um poliedro observando-se como são suas faces ou como são os seus vértices. O leitor deve descobrir que os exercícios resolvidos R.140 e R.141 contêm o raciocínio que deve ser utilizado.

Conclusão

O segundo livro da coleção não é regular na qualidade da apresentação, contendo muitos bons momentos e outros nem tanto. A parte de progressões, especialmente a de progressões geométricas, peca pela ausência de aplicações, principalmente as financeiras. Os capítulos sobre matrizes são adequados ao público a que o livro se destina, mas a parte de determinantes destoa do resto da coleção. Sistemas são bem tratados por matrizes e mal tratados por determinantes. A parte de combinatória é boa, embora um pouco superficial e a parte de probabilidades é excelente.

Os capítulos sobre geometria espacial são muito bons. Há um grande cuidado na exposição dos conceitos, as figuras são claras e bem feitas e os exercícios são excelentes. Devemos dizer que o conteúdo de geometria espacial deste livro é um dos melhores (senão o melhor) entre as coleções analisadas. Pequenos senões foram registrados no texto deste relatório, e a única falha maior foi a não apresentação explícita do Princípio de Cavalieri no início do tratamento dos volumes.

Gelson Iezzi et al.

Matemática – volume 3

O volume se encontra na oitava edição (a primeira foi em 1990). O prefácio informa que para esta edição foi feita uma reformulação atendendo às sugestões de muitos professores, mas as alterações não modificaram a essência e a estrutura do volume.

Este volume trata de geometria analítica plana, limites e derivadas, números complexos e polinômios. O texto é claro, apresentado de forma tradicional na parte de geometria analítica e tem grandes qualidades na parte de introdução ao cálculo. Os exercícios são coerentes com a teoria apresentada, graduados em diversos níveis de dificuldade, estritamente manipulativos em geometria analítica mas com boas aplicações no capítulo de cálculo diferencial.

Não há conexões explícitas entre assuntos diversos tratados neste livro ou nos dois anteriores. Calculadoras e computadores são ignorados, não há exercícios desafiadores, que estimulem a criatividade ou que necessitem de uma discussão do resultado.

No final de cada capítulo há um texto de autoria de Hygino Domingues com tópicos interessantes da história da Matemática e há também, no fim de alguns capítulos, algumas leituras suplementares.

A qualidade gráfica é boa e não há erros de digitação ou nas respostas dos exercícios.

Capítulo 1. O ponto

O livro inicia com um capítulo muito bem escrito. É excelente a abordagem dos problemas sobre pontos que dividem segmentos em razões dadas. O livro consegue vencer muito bem a dificuldade gerada pelo fato de os programas da maioria das escolas não incluírem vetores, construindo, disfarçadamente, um "cálculo vetorialzinho" de soma e produto por número para ser usado nesse contexto.

Não vamos aqui insistir no óbvio: um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para o ensino médio existentes no mercado é a completa omissão dos vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática. Talvez a justificativa esteja no fato que os vetores não estejam presentes nos programas de muitos vestibulares (mas estão, por exemplo nos vestibulares do Rio de Janeiro). Mesmo assim, esta possível justificativa não se sustenta, uma vez que os vetores são uma ferramenta extremamente útil, simplificando cálculos e permitindo soluções simples e elegantes de diversos problemas. Por exemplo considere o seguinte e básico problema:

$ABCD$ é um paralelogramo e os vértices A, B e C são dados em coordenadas. Determine o vértice D.

Se o aluno conhece vetores dará a resposta imediatamente: $D = A + C - B$. Se não conhece terá que estudar o Capítulo 2, construir as equações de duas retas paralelas a AB e BC, e fazer a interseção delas.

Uma qualidade importante do livro é a de não dar ênfase a coisas que não são importantes. A determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo, por exemplo, é apenas um problema resolvido, e não parte integrante do texto, como ocorre na maioria dos livros. A lamentar que, depois de uma brilhante construção "vetorial" da condição de alinhamento de três pontos, os autores abandonem-na em favor da condição pouco prática de nulidade de um determinante de terceira ordem.

O livro não faz conexões com outras partes da Matemática e não há sequer uma tentativa de mostrar que a Geometria Analítica pode ser usada para resolver, de modo simples, problemas de geometria. Vejamos um exemplo de problema que poderia ilustrar o poder dos métodos analíticos:

É dado um triângulo ABC. Determine o ponto P do plano do triângulo tal que $PA^2 + PB^2 + PC^2$ seja mínimo.

Este problema abordado por geometria sintética demanda um considerável esforço de imaginação e de cálculos. Entretanto, se abordado analiticamente a solução é quase mecânica. Escolhendo um sistema de coordenadas no qual $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$, conclui-se que o ponto P é o baricentro do triângulo ABC.

Há ainda uma questão: o problema da graduação dos eixos coordenados. Não se deixa claro se os eixos devem estar graduados com a mesma escala ou não. A fórmula da distância entre dois pontos, por exemplo, só é válida se a escala for a mesma.

Capítulo 2. A reta

O capítulo sobre a equação da reta é bem escrito. O livro prova que as equações do primeiro grau representam retas e que toda reta pode ser representada por uma equação do primeiro grau. O texto é enxuto e corretamente não dá ênfase aos supérfluos. A equação segmentária da reta, por exemplo, é apenas um problema resolvido, e não parte integrante do texto, como ocorre na maioria dos livros.

A noção de coeficiente angular é bem apresentada e a condição de paralelismo entre duas retas se segue de forma natural. O perpendicularismo é estabelecido e o livro tem o mérito de mostrar que $m_r \cdot m_s = -1$ é condição necessária e suficiente para que as retas r e s sejam perpendiculares.

A fórmula de distância de um ponto a uma reta é deduzida com algum esforço de cálculo, mas tudo correto e bem cuidado. Se entretanto, o livro tivesse observado que a reta que contém a origem e o ponto (a, b) é perpendicular à reta $ax + by + c = 0$, poderia oferecer uma demonstração mais simples desta fórmula.

O material apresentado neste capítulo é, como dissemos, muito bem escrito, com texto claro e didático. Entretanto, sente-se falta de algumas coisas:

1. No item sobre equações paramétricas, o leitor não percebe a sua utilidade. Não há um problema onde o uso de equações paramétricas seja recomendado. Mais ainda, o livro não mostra como parametrizar uma reta, dada na forma $ax + by + c = 0$. As aplicações não aparecem. Os poucos exercícios são apenas manipulativos e as equações das retas já são dadas na forma paramétrica nos enunciados. Não há menção ao fato de o parâmetro poder representar o tempo em problemas de cinemática.

2. O livro não fala em feixe de retas, paralelas ou concorrentes.

3. Não há uma tentativa de mostrar que a Geometria Analítica pode ser usada para resolver problemas de geometria, como já assinalamos no primeiro capítulo. Neste aspecto, vamos fazer um comentário.

A Geometria Analítica não deve ser tratada como a parte da Matemática que trata apenas de resolver os problemas de Geometria Analítica. Muito pelo contrário. O método das coordenadas é uma ferramenta extremamente útil para resolver certos problemas de geometria. Por exemplo, considere o seguinte problema:

Um retângulo tem base igual ao dobro da altura. Qual é o ângulo entre suas diagonais?

Este é um problema de geometria em que a solução analítica é muito prática, eficiente e educativa. O aluno pode escolher seu sistema de coordenadas, ou seja, onde colocar seus eixos e qual será a sua unidade de medida. É interessante perceber que estas decisões são arbitrárias, ou seja, cada um pode fazer o que quiser. Alguns alunos colocarão a origem em um vértice do retângulo e outros (talvez mais espertos) colocarão a origem no centro mas todos, esperamos, vão traçar os eixos paralelos aos lados do retângulo. Como a unidade de medida é também arbitrária, cada aluno terá os vértices do seu retângulo definidos em suas próprias coordenadas. Uma possibilidade é colocar os vértices em $(2, 1)$, $(-2, 1)$,

$(-2,-1)$ e $(2,-1)$ e neste caso as retas suportes das diagonais são $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -\frac{1}{2}x$ e tudo o que o aluno tem a fazer é calcular a tangente do ângulo entre essas duas retas pela fórmula dada no livro.

Nos exercícios do livro, tudo já aparece dado em coordenadas. Infelizmente não há nenhum problema em que o aluno deva estabelecer um sistema de coordenadas para resolvê-lo.

Capítulo 3. Circunferência

O capítulo sobre a circunferência é escrito com o mesmo cuidado dos anteriores. Discute a posição de um ponto em relação à circunferência e as inequações, examina as posições relativas entre reta e circunferência e entre duas circunferências, mostra como obter interseções e resolve problemas de tangência. O único senão está na determinação do centro e do raio da circunferência dada por sua equação desenvolvida. Em vez de estimular o aluno a completar os quadrados, o livro dá preferência à memorização de fórmulas.

Os exercícios são bons e adequados à teoria desenvolvida no livro. Entretanto, todos os enunciados já aparecem em termos analíticos. Faltam problemas em que o aluno tenha a opção de estabelecer um sistema de coordenadas. Por exemplo, considere o seguinte problema:

Calcule o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm.

A resolução deste problema com geometria analítica é interessante. Colocando os eixos de forma que os vértices do triângulo sejam (0,0), (4,0) e (0,3) e sendo r o raio da circunferência inscrita então devemos ter que a distância do ponto (r,r) à reta $3x - 4y - 12 = 0$ seja igual a r. Entretanto, a solução da equação correspondente fornece duas soluções. Como isto é possível? Trata-se de uma excelente oportunidade para discussão.

Faltam exercícios mais criativos, exercícios em que os alunos devam estabelecer um sistema de coordenadas, exercícios cuja resposta seja "impossível" (que também fazem parte da Matemática e também da vida), exercícios de resposta múltipla e exercícios em que os alunos tenham que discutir ou verificar a resposta.

Capítulo 4. As cônicas

A dedução das equações das cônicas é apenas delineada. Os autores fogem da discussão das possíveis soluções estranhas introduzidas pelas elevações ao quadrado. As equações das cônicas são apresentadas apenas nas formas reduzidas e, em particular, não há nenhuma tentativa de mostrar que a parábola que aqui aparece tem algo a ver com a parábola que apareceu no primeiro volume como gráfico da função quadrática. Não há também menção à relação entre as cônicas que aqui aparecem e as seções do cone. Não há aplicações, com exceção de um único problema na parte dedicada à elipse, que fala sobre a órbita da Terra.

As propriedades refletoras das cônicas, em especial da parábola, não são sequer mencionadas e não há ao menos exercícios propostos sobre tangência. As excentricidades da elipse e da hipérbole são mencionadas nos exercícios mas sem que se explique o seu significado. Seria interessante mostrar que a excentricidade define a "forma" da cônica, mas isto o livro não faz. O conceito de excentricidade fica obscuro, tratando-se apenas de um número que se pode calcular sem saber para que. A assíntota da hipérbole aparece também em um exercício (página 263) sem que se diga o que ela representa. Fornecer conceitos sem explicação induz ao aluno à memorização de conteúdos vazios de significado.

Não é, certamente, um dos melhores capítulos do livro. Sendo este o último dos capítulos de Geometria Analítica, cabe ressaltar a ausência de problemas de determinação de lugares geométricos.

Capítulo 5. Polinômios

O capítulo sobre os polinômios é similar ao dos outros livros didáticos brasileiros. As dificuldades iniciais são sutilmente escondidas, e o polinômio identicamente nulo é um exemplo disto. Os teoremas de identidade de polinômios não são demonstrados e tampouco se demonstram a existência e unicidade de quociente e resto na divisão de polinômios.

Um pequeno reparo deve ser feito na página 108. O teorema de d'Alembert, devido ao enciclopedista Jean Le Rond d'Alembert é citado como sendo devido a Jean L. e R. d'Alembert.

Capítulo 6. Limites

O capítulo começa com uma revisão de funções, assunto tratado no Volume 1. Aborda agora, com numerosos exemplos, funções definidas por várias sentenças. Tudo bem explicado e com gráficos bem feitos. São tão raros no texto os problemas contextualizados, que merece ser citada a existência de um interessante problema, o de número 377, sobre aquecimento de um corpo. É também muito interessante o exercício proposto 421.

Limites e continuidade são assuntos tratados de modo adequado, até mesmo com alguma formalização, embora nunca desprezando a intuição. A única restrição a fazer é o tratamento superficial dado ao número e.

Capítulo 7. Derivadas

O capítulo é muito bom, apresentando o conceito de derivada como taxa de variação. A interpretação geométrica é explorada e também são apresentadas as relações entre derivadas, velocidade e aceleração. A maior parte dos problemas é contextualizada. Entretanto, sente-se falta de uma explicação melhor do significado da aceleração, ou seja, da derivada segunda. Por exemplo, o clássico problema da torneira de vazão constante enchendo um reservatório, que aparece no livro (exercício 437), poderia ser explorado com reservatórios de várias formas, mostrando a diferença de concavidade entre os gráficos da altura da água em função do tempo.

Capítulo 8. Regras de derivação

Neste capítulo são deduzidas as fórmulas que permitem calcular as derivadas das funções usuais. O capítulo é bem escrito e os autores não caem na tentação do falso "facilitário" de fazer um monte de fórmulas para um monte de casos particulares. Por exemplo, há a fórmula para o cálculo da derivada do logaritmo neperiano e, para o cálculo da derivada de logaritmos em outras bases, muda-se para a base e, evitando assim uma fórmula desnecessária.

São delineadas as provas da regra da cadeia e da fórmula para a derivada da função inversa. Aqui há uma pequena fraqueza do livro, que dá a entender estar provando as fórmulas, quando na verdade há uns problemas sutis (caso o Δy seja zero, no caso da regra da cadeia) envolvidos na demonstração. Mas, nada que desmereça o capítulo que, como dissemos é muito bom. Na verdade, é bastante difícil escrever sobre cálculo para alunos do ensino médio pois a todo momento se corre o risco de cair na intuição demasiada ou na excessiva formalização. Neste ponto, o livro conseguiu um ótimo equilíbrio.

Há duas leituras suplementares, uma sobre o conceito de custo marginal e outra, extremamente interessante, sobre a relação entre os ângulos de giro do volante de um automóvel e das rodas.

Capítulo 9. Estudo da variação das funções

O capítulo que estuda a variação das funções é muito bom. Mostra as relações entre o sinal da derivada e o crescimento da função, e distingue muito bem extremos absolutos de extremos locais. Os problemas, tanto os resolvidos como os propostos, são contextualizados e interessantes. Há entretanto quatro reparos a fazer:

1. A linguagem não mantém o apuro usual; em grande parte do texto está a se falar de funções deriváveis, e isso não é explicitado.
2. Falta uma explicação melhor do significado da derivada segunda. Concavidade não é citada embora se fale em ponto de inflexão.
3. Faltam exemplos de funções com extremos em pontos nos quais a derivada não existe. Tais exemplos não são necessariamente sofisticados, como mostra, por exemplo, a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
4. Embora haja exercícios resolvidos em que o gráfico da função é construído, não há exercícios propostos de construção de gráficos.

Há duas leituras suplementares, uma sobre calor específico e outra, muito interessante, sobre gradiente de temperatura.

Capítulo 10. Números complexos

A motivação deste capítulo é falsa e, na realidade, não motiva o aluno — no máximo pode levá-lo a pensar que os matemáticos do passado eram pessoas muito esquisitas. Certamente os complexos não teriam sido criados se o motivo fosse o citado, fazer com que todas as equações do segundo grau tivessem solução. Por que não respeitar a História e mostrar que eles surgem para que se possa usar a Fórmula de Cardano no caso de a equação do terceiro grau ter três raízes reais? Apesar disso, o capítulo é muito bom. O corpo dos complexos é construído com rigor compatível com o público a que se destina. Os complexos são pares ordenados de reais, a igualdade, a adição e a multiplicação são definidas cuidadosamente. Também os reais são identificados a um subcorpo dos complexos.

Há, entretanto, algumas opções estranhas por parte dos autores:

1. A definição de imaginário puro estranhamente exclui o zero do conjunto dos imaginários puros.
2. Na página 223 aparece um dos mais comuns erros nos livros didáticos brasileiros (o outro é chamar a fórmula das raízes da equação do segundo grau de fórmula de Báscara): chamar a imagem de um complexo de afixo. Afixo de um ponto é o complexo cuja imagem é o ponto.
3. Argumentos só são considerados com valores no intervalo $[0, 2\pi]$.

O aspecto geométrico não é explorado e este é o maior defeito do capítulo. Problemas como (exercício 121) "representar o conjunto dos complexos z tais que $|z| = 2$" são resolvidos sem apelo à interpretação geométrica. O livro faz $z = x + yi$, com x e y reais, obtendo $x^2 + y^2 = 4$, e tal conjunto pode ser representado por uma circunferência de centro na origem e raio 2. Teria sido mais simples identificar $|z|$ à distância da imagem de z à origem. Do mesmo modo, não é feita conexão entre a multiplicação de complexos e as rotações, o que permitiria a resolução elegante de muitos problemas de Geometria Analítica, tais como "dadas as coordenadas de dois vértices de um quadrado, obter as coordenadas dos outros dois." De uma maneira geral, o tratamento dos números complexos é essencialmente algébrico e, portanto, sem aplicações relevantes.

Capítulo 11. Equações polinomiais

O capítulo pretende abordar alguns tópicos da teoria das equações polinomiais. O critério que provavelmente norteou a escolha dos tópicos deve ter sido a importância do tópico — assim são abordados o teorema fundamental da Álgebra, a fórmula de fatoração de um polinômio, as relações entre coeficientes e raízes, o teorema das raízes complexas conjugadas nos polinômios de coeficientes reais — ou o fato de esses assuntos aparecerem em provas de vestibular. O defeito do capítulo talvez seja exatamente a escolha dos tópicos. Certamente métodos para determinação aproximada de raízes como o método de Newton são mais importantes que o teorema sobre raízes racionais de polinômios de coeficientes inteiros, e o teorema de Bolzano também não é citado. Há também uma ausência, inexplicável em um livro que tratou tão bem de derivadas. Não aparecem gráficos de polinômios e, em especial, não se comenta o aspecto do gráfico nas proximidades de uma raiz múltipla. Finalmente um comentário sobre uma falha que talvez só tenha ocorrido uma única vez no livro: a falta de clareza. Embora o texto vá tratar de raízes múltiplas, na primeira vez que elas aparecem (página 245) a compreensão é difícil para o leitor que está tendo um primeiro contato com o assunto. A questão da multiplicidade deveria ser logo comentada.

Conclusão

A coleção é uma das melhores existentes no mercado e este terceiro volume é o melhor dos três. A teoria é apresentada com cuidado e as demonstrações são feitas com argumentos e linguagem adequadas ao estudante da terceira série do ensino médio. Os exercícios são bem escolhidos, em graus diferentes de dificuldade e, em cada capítulo, cobrem todo o material teórico apresentado. Sente-se falta de um maior número de aplicações sobretudo nos capítulos dedicados à geometria analítica que está praticamente em um compartimento estanque da coleção. Mas no geral, é um bom livro que os estudantes deveriam ler e, sobretudo guardar.