Bianchini e Paccola

Matemática – volume 1 (versão beta)

Descrição sucinta do Volume 1

Este volume é distribuído em duas versões, alfa e beta. A primeira, inclui conjuntos, conjuntos numéricos, funções, função do 1º grau, função do 2º grau, função modular, função exponencial, logaritmos, cálculo e aplicações dos logaritmos decimais, noções sobre matemática financeira, progressões aritméticas e progressões geométricas. Na versão beta, as progressões aritméticas e geométricas são substituídas por trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria — arcos e ângulos, funções trigonométricas, fórmulas de transformação e equações e inequações trigonométricas. O volume analisado é o da versão beta, que possui 395 páginas, divididas em 15 capítulos.

A programação gráfica do livro é boa, com ótimas ilustrações a cores. Não foram encontrados enganos tipográficos.

Análise detalhada do Volume 1

O Capítulo I trata de conjuntos, apresentando a linguagem e o simbolismo da teoria dos conjuntos. A busca de contextualização para os conceitos ou linguagem apresentados conduz a um certo exagero. Por exemplo, para ilustrar a noção de conjunto, se fornece um conjunto de logotipos de emissoras de televisão, certamente com o intuito de apresentar um exemplo atraente graficamente. Outros exemplos, no entanto, cumpririam melhor o papel de motivar a noção de conjunto. Ainda na página 1, se explica que, para indicar que um elemento x não pertence a um conjunto A, “cortamos” o símbolo de pertinência com um traço. A seguir são mostradas quatro placas com avisos de proibição, e afirma-se que “Esse tipo de indicação é utilizado em muitas outras situações. Você pode verificar isso no conjunto a seguir, onde os sinais são cortados, indicando proibição”. Embora a analogia seja adequada, há um exagero, que pode desviar a atenção do aluno para um aspecto secundário (a analogia é ainda mais expandida na página 7, onde outras 15 placas de proibição são exibidas).

Nas páginas 5–6, sob o título “Alguns símbolos da linguagem dos conjuntos”, o livro apresenta algumas noções de lógica. O tratamento não é adequado, por várias razões. Em primeiro lugar, a maior parte das notações aqui apresentadas não são utlizadas no que se segue. É, por exemplo, um exagero introduzir-se um símbolo para representar "existe um único". A relação existente entre a linguagem das proposições e a de conjuntos, que seria a maior motivação para esta seção, não é explorada. Em segundo lugar, as notações empregadas são ruins. Por exemplo, o livro dá, como exemplo do emprego do quantificador universal, a seguinte sentença: $\forall x \in U \Rightarrow 0x = 0$. Há, aqui, uma mistura do uso do quantificador e do símbolo de implicação. Seriam preferíveis as formas $\forall x$, $x \in U \Rightarrow 0x = 0$ ou $\forall x \in U$, $0x = 0$.

Na página 15, o autor perde a oportunidade de fazer uma demonstração simples, que serviria para mostrar aos alunos que a Matemática não é um amontoado de fatos desconexos e que ela possui um modo próprio de argumentação, a demonstração matemática. O resultado que dá o número de elementos de uma união de dois conjuntos, quando se conhece o número de elementos de cada um dos conjuntos é enunciado sem demonstração, a qual é bem simples, pois é suficiente observar que cada elemento da intersecção dos dois conjuntos é contado duas vezes.

O capítulo termina, como os demais, com um útil resumo das noções principais nele tratadas. Como um ponto positivo da apresentação de conjuntos, deve-se frisar que não se notam exageros de formalismo ou abstração. Os exemplos e exercícios apresentados, no entanto, poderiam ser mais interessantes.

O Capítulo 2 trata dos conjuntos numéricos. O capítulo principia com uma breve introdução histórica, apresenta os números naturais, incluindo o número 0 (zero) entre eles, os números inteiros e os racionais.

Na apresentação dos números racionais, começa-se a observar o hábito, generalizado nos livros para este nível da escolaridade, de convencer o leitor da veracidade de uma afirmação pela simples apresentação de exemplos, quando uma demonstração seria inteiramente acessível ao leitor, e o familiarizaria com uma ferramenta matemática essencial, a de demonstração matemática. Assim, por exemplo, o texto diz, na página 25, que "todo número decimal exato é racional" e apresenta dois exemplos para convencer o leitor que esta afirmação é verdadeira. Certamente os exemplos devem ser dados e preceder qualquer demonstração, mas não seria difícil, após apresentá-los, demonstrar este fato, tanto mais que a demonstração seria uma simples generalização do que foi feito no caso dos exemplos.

A seção 5 deste capítulo, dedicada ao conjunto dos números irracionais deixa a desejar, como na maioria dos livros didáticos do ensino médio. O texto mostra corretamente, utilizando $\sqrt{2}$, que existem números irracionais. No entanto, não mostra que os números irracionais são exatamente aqueles cujos desenvolvimentos decimais são infinitos e não-periódicos. Este fato é simplesmente citado. Observe-se que a demonstração de que todo número racional tem desenvolvimento decimal finito ou infinito periódico é fácil de fazer, pois usa unicamente o fato de que os restos da divisão do numerador pelo denominador se repetirão inevitavelmente, o que é uma aplicação trivial do princípio da casa dos pombos.

No exemplo a) da página 28 nota-se uma impropriedade. Nada garante que o número $0,373\,373\,337\ldots$ tem desenvolvimento decimal infinito não-periódico. Além disso, não é feito nenhum comentário sobre o fato fundamental de que o número π é irracional. O simples enunciado de que $\pi = 3{,}14149\ldots$ não garante isso. A importância de π certamente justifica comentar que ele não é um número racional. 337?? 3,141 5 9 . . . ??

A apresentação da noção de módulo é apropriada, relacionando-o com a distância do número à origem.

Um ponto positivo do livro é a introdução bem cedo do conceito de função, no Capítulo 3, página 42. O capítulo começa adequadamente, apresentando a noção de correspondência entre duas variáveis. No entanto, já na 2ª seção, este tratamento é interrompido por uma exposição sobre pares ordenados, gráfico cartesiano do par ordenado, produto cartesiano e noção de relação. Embora a discussão destes conceitos seja boa, sem exageros e formalismo, inclusive com bons exemplos de gráficos de produtos cartesianos nas páginas 46 e 47, a apresentação de funções por este caminho constitui um tratamento artificial do conceito de função. A situação se agrava com o título da seção que introduz as funções como tipo especial de relações: "Noção matemática de função", o que passa a idéia errônea de que a noção de função como correspondência seja menos matemática. Melhor seria apresentar de vez o conceito de função como feito na página 50, como uma correspondência entre dois conjuntos.

O livro enfatiza corretamente a importância dos gráficos no estudo das funções, estudando-os a partir da página 55. Ensina como reconhecer quando um gráfico representa uma função e como identificar o domínio e a imagem de uma função por seu gráfico. Os exemplos e exercícios são apropriados para deixar o aluno à vontade com estes conceitos.

O capítulo se encerra com uma discussão sobre os zeros de uma função, função crescente e decrescente, valor máximo e valor mínimo de uma função, função par e função ímpar, função bijetora, funções inversas, gráfico da função inversa e função composta. A apresentação do conceito de função inversa é muito bem feita, explicando com bastante clareza como obter a expressão que a define. Observe-se que o conceito de função inversa é apresentado antes de se definir a composição de funções. Talvez por este motivo, o livro apresente uma omissão, que é a de não comentar, sequer sob forma de exemplo ou exercício, que da composição de uma função com sua inversa resulta a função identidade.

O Capítulo 4 intitula-se "Função do 1º grau". Principia explicando o que é uma função constante e mostrando seu gráfico. O exemplo que motiva a definição é muito bem escolhido: trata-se de uma situação geométrica na qual a função constante surge de maneira natural para representar como varia a área de uma certa figura. Exemplos análogos são utilizados para motivar as funções afins, logo a seguir, e as funções quadráticas, no capítulo seguinte.

A função $f(x) = ax + b$ é apresentada, sendo denominada função afim ou do 1º grau. Dois dos três exemplos apresentados nesta seção são simplesmente do cálculo do valor da função dada por $f(x + 2) = x + 3$ no ponto $(x - 5)$. Este exercício poderia ter sido bem explorado, mostrando ao aluno, por experimentação, que o que a função realmente faz é adicionar 1 ao valor da variável, donde se deduz facilmente que $f(x - 5) = x - 4$. Em vez disso, o livro, seguindo um viés muito presente no ensino do segundo grau, faz substituições de variáveis puramente mecânicas para chegar ao mesmo resultado.

Na página 82, é afirmado, sem nenhuma justificação, que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. Seria fácil, usando proporcionalidade, demonstrar que isso acontece e que também toda reta não perpendicular ao eixo dos x representa o gráfico de uma função do 1º grau ou de uma função constante. O livro também não faz nenhum comentário sobre a interpretação geométrica dos coeficientes da equação da reta. Deste modo, o aluno fica privado dos conhecimentos mais importantes para ser capaz de utilizar funções afins para modelar situações reais, limitando-o a situações onde tal modelo já seja apresentado pronto. É o caso, por exemplo, do exemplo 4, da página 86, no qual se diz que um automóvel percorre uma trajetória retilínea, com velocidade constante, segundo um gráfico que é uma linha reta. Tudo que se pede é determinar "o tempo em que o automóvel percorre 30 km", sem se fazer qualquer comentário sobre o porquê da velocidade do automóvel ser constante. Mais grave: o problema é resolvido erradamente, confundindo-se o instante em que o automóvel está na posição 30 km com o tempo necessário para percorrer 30 km.

Encontram-se neste capítulo alguns exercícios interessantes, como os de número 33 e 35 da página 96. No entanto, aproveitamos aqui a oportunidade para chamar a atenção para uma característica deste livro, comum a quase todos os compêndios destinados ao ensino médio: a maior parte dos exercícios propostos são simples repetição dos exercícios apresentados como exemplo, com modificações mínimas. Assim, neste livro, o exercício 17 da página 85 é uma simples repetição, substituindo o automóvel pela bicicleta e modificando os valores numéricos, do exemplo 4 da página 84.

O capítulo termina com o estudo do sinal da função do primeiro grau, com aplicações à resolução de inequações do 1º grau ou inequações obtidas através do produto ou quociente de tais inequações.

A função quadrática é estudada no Capítulo 5, a partir da página 100. Analogamente ao que foi feito para a função afim, ela é introduzida por meio de uma situação geométrica interessante (página 100). Afirma-se, sem nenhum comentário ou discussão, que seu gráfico é uma parábola. Não é difícil provar, a partir da definição geométrica da parábola, que sua representação analítica é uma função quadrática e que, reciprocamente, toda função quadrática tem por gráfico uma parábola. No mínimo, algum comentário sobre a caracterização geométrica da parábola deveria ser feito. O livro calcula corretamente os valores da abscissa e da ordenada do vértice de uma parábola. A ilustração da página 103 não é das mais apropriadas, pois nada garante que a curva descrita pelos aviões é um arco de parábola.

Ao estudar o gráfico da função quadrática, o livro simplesmente apresenta dois exemplos, um de uma parábola com a concavidade voltada para cima e outro com a concavidade voltada para baixo, dos quais deduz, sem nenhuma explicação, que "Examinando os gráficos das funções do exemplo anterior, podemos observar que aquela que apresenta o coeficiente a do termo em x^2 positivo tem a concavidade da parábola voltada para cima e aquela que apresenta o coeficiente a negativo tem a concavidade da parábola voltada para baixo. Esta característica constitui uma regra geral para toda função do 2º grau".

Ora, embora no ensino médio nem tudo possa ser demonstrado rigorosamente, deve-se procurar, quando as demonstrações dos resultados são fáceis, fazê-las, para habituar o aluno com o tipo específico de raciocínio matemático — a dedução. Isso deve ser feito principalmente quando a demonstração emprega conceitos e técnicas já vistos, o que permite exercitá-los.

O estudo do eixo de simetria segue modelo idêntico. É feito um exemplo e a partir dele induz-se o caso geral. Cabem aqui os comentários feitos no parágrafo anterior. Uma vez conhecido o eixo de simetria da parábola, o livro deduz corretamente as coordenadas do vértice e o valor máximo de mínimo da função (página 105).

São apresentados bons exemplos e exercícios, nas páginas 106–108, envolvendo o cálculo de máximos e pontos de intersecção de gráficos de parábolas.

No capítulo anterior, o livro introduziu a definição de zero da função do 1º grau. Neste capítulo, a nomenclatura é alterada, e fala-se das raízes da função do 2º grau (página 109), após o que se estuda a variação do sinal da função do 2º grau, o que será empregado no estudo das inequações do 2º grau. A fórmula de resolução da equação do 2º grau é considerada conhecida, não se fazendo qualquer comentário relativo à sua dedução.

O Capítulo 6, que principia na página 123, é dedicado à função modular, tópico que exerce fascínio estranho sobre autores de livros para o 2º grau.

O encaminhamento dado ao exemplo 1, página 123, é artificial, pois parte-se de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ e em seguida afirma-se "Podemos indicar as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ por uma única função $f(x) \ldots$". Mais natural seria discutir como a função $f(x)$ pode ser estudada reduzindo-a ao estudo de duas outras funções, $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

A partir da página 132 estudam-se as equações modulares e logo em seguida as inequações modulares. Nos exercícios-teste (páginas 141–144) trabalha-se com vários gráficos interessantes, inclusive de regiões do plano (exercício 57).

O Capítulo 7, sobre a função exponencial, principia com uma revisão apropriada das definições e propriedades das potências de expoente racional. Em seguida, apresentam-se exemplos de fenômenos que variam exponencialmente com o tempo para motivar a definição da função exponencial de base a. Para traçar seu gráfico, calculam-se os valores da função para alguns valores da variável x. Semelhantemente a quase todos os livros-texto, não são feitos comentários sobre a maneira como se sabe que o gráfico tem realmente esta forma. Em verdade, usando-se somente os pontos da tabela, é impossível concluir que a forma do gráfico é a apresentada. Seria mais honesto dizer ao leitor que mais tarde ele verá que o gráfico de qualquer função exponencial tem um dos dois aspectos mostrados no livro, dependendo de a, a base, ser maior ou menor do que 1. As tabelas servem somente para localizar pontos pelos quais passa o gráfico cujo aspecto geral é conhecido. Neste capítulo não são utilizados calculadoras ou computadores para trabalhar com funções tipo exponencial. Bases racionais ou irracionais são utlizadas somente para se verificar se a função é ou não crescente. Admite-se, sem o menor comentário, que expressões do tipo a^x fazem sentido para um número real x qualquer.

As equações e inequações exponenciais são estudadas a partir da página 149, com muitos exemplos e exercícios. O livro enfatiza, corretamente, que os métodos desenvolvidos só funcionam no caso em que é possível, sem outras técnicas, transformar equação dada em uma equação exponencial em que ambos os membros têm a mesma base. O livro também esclarece que a injetividade e a monotonicidade das funções exponenciais são exatamente o que permite resolver equações ou inequações exponenciais escritas nessa forma. Os exemplos apresentados dispensam o uso de calculadoras ou computadores.

Os logaritmos são estudados mais detalhadamente do que a função exponencial. Como acontece na maior parte dos livros para o ensino médio, estuda-se primeiramente o *logaritmo* e somente posteriormente a *função logaritmo*. Ora, um fato básico é que a função logaritmo é a inversa da função exponencial. O estudo dos *logaritmos* antes da *função logaritmo* obscurece este fato e em nada contribui para esclarecer o conceito de logaritmo. Ao contrário, a apresentação de *logaritmos* seguidos da *função logaritmo* pode obscurecê-lo. A única justificativa para tal fato é parece ser a tradição, proveniente da época em que a habilidade com cálculos numéricos com logaritmos (hoje desnecessária, devido às calculadores e aos computadores) era importante para algumas profissões, para as quais o 2º grau era um curso propedêutico — como engenharia, por exemplo. A apresentação dos dois tópicos, logaritmos e função logaritmo, parece corresponder à prática de "acender uma vela a Deus e outra ao diabo": por um lado apresenta-se o desenvolvimento tradicional, que enfatizava os logaritmos como recurso de cálculo, e por outro lado apresenta-se a função logaritmo, um ponto de vista mais moderno e condizente com a visão atual do assunto, que enfatiza as propriedades das funções exponencial e logaritmo, e relega a segundo plano os aspectos computacionais. A vantagem de uma apresentação que enfatize a relação entre as duas funções, uma como a inversa da outra, é que as propriedades dos logaritmos são deduzidas imediatamente das propriedades de sua função inversa — a função exponencial.

No estudo dos logaritmos, admite-se, mais uma vez sem o menor comentário, que expressões como 2^x fazem sentido para um número real x qualquer.

O autor demonstra, na página 168, algumas propriedades fundamentais dos logaritmos. A propriedade do logaritmo de um produto é demonstrada separadamente na página 171 e a do logaritmo de um quociente na página 173.

A função logaritmo é estudada a partir da página 183. Cabem aqui as mesmas observações que fizemos sobre a determinação do gráfico da função exponencial. Ou seja, do simples exame de uma tabela com quatro ou cinco valores de x e os correspondentes valores da função, é impossível, em realidade, mostrar que seu gráfico tem o aspecto ilustrado.

O Capítulo 9 trata de "Cálculo e aplicações dos logaritmos decimais". Comparado com a maior parte dos textos para o ensino médio, este livro é inovador, pois reconhece a existência e a necessidade do uso das calculadoras para se trabalhar com logaritmos. Ele mostra, inclusive, como calcular o logaritmo de um número (e também o problema inverso, dado um logaritmo achar o número de que provém) usando uma calculadora.

Em seguida, o livro mostra como trabalhar com tábuas de logaritmos. A interpolação de logaritmos (páginas 214 e 215).

Embora de um modo geral o Capítulo 9 contribua positivamente para que o aluno adquira alguma apreciação sobre a importância das funções exponenciais e logarítmicas, deve-se fazer uma observação. Na página 197, afirma-se que uma função tem crescimento exponencial quando é da forma $f(t) = f_0 \cdot e^{kt}$. Embora isto esteja correto, esta afirmativa pode levar o aluno a pensar que funções da forma $g(t) = g_0 \cdot a^{kt}$, onde $a > 1$, não tem crescimento exponencial. Seria extremamente interessante mostrar ao aluno que as formas são equivalentes e que a adoção da base e se deve a uma maior facilidade para expressar a rapidez com que a função varia.

O Capítulo 10 é inovador: trata da matemática financeira, assunto extremamente útil mas esquecido ou tratado sumariamente pela maior parte dos livros para o ensino médio. O capítulo trata de porcentagem, juros simples e juros compostos, apresentando exercícios bem contextualizados, que se referem a situações realistas.

Em verdade, o estudo da matemática financeira deveria ser posterior ao estudo das progressões, a partir das quais a dedução das várias fórmulas empregadas em matemática financeira fica fácil. A opção de colocar o estudo das progressões em outro volume prejudica bastante o desenvolvimento do capítulo. Com as progressões, o capítulo poderia ser aprofundado sem nenhuma dificuldade e serviria de ótima aplicação para o que o aluno estudou em progressões.

O estudo da trigonometria fecha este volume da coleção. Ele se estende da página 239 à página 395.

O autor apresenta, inicialmente, no Capítulo 11, a trigonometria no triângulo retângulo. Uma falha da apresentação é não explicitar que o que torna possível definir as razões trigonométricas é a semelhança dos triângulos retângulos com um ângulo agudo igual. Apenas ao fazer a dedução das razões trigonométricas de ângulos de 30° e 60°, com o auxílio de um triângulo equilátero, se chama a atenção para o fato de que estas não dependem do lado do triângulo. Esta falha é largamente compensada pela escolha de exemplos e exercícios contextualizados, que fazem uso de situações motivadoras, ilustradas por figuras de ótima qualidade. Embora as situações não correspondam, em geral, exatamente às que ocorrem na prática (em topografia, por exemplo), elas atendem ao propósito de mostrar ao aluno que os conceitos estudados encontram aplicações em situações da vida prática. Outra virtude dos exercícios é não se limitarem aos famosos ângulos de 30°, 45° e 60°. Outros ângulos ocorrem e são devidamente atacados com auxílio de calculadora ou uma tábua.

Uma apresentação preliminar da "lei dos senos" e da "lei dos cossenos", limitadas a triângulos acutângulos, também faz parte deste capítulo (mais tarde elas são generalizadas para triângulos quaisquer). Na demonstração da lei dos senos, não se determina qual a constante de proporcionalidade ($2R$, onde R o raio do círculo circunscrito ao triângulo). Uma outra omissão é a de não apresentar o aluno ao problema geral de resolver um triângulo, conhecido três de seus elementos.

No Capítulo 12, sobre arcos e ângulos, a definição de radiano é apresentada (página 273) através de uma situação concreta bastante motivadora, em que um pneu de bicicleta gira sobre uma faixa colorida no solo. Há, no entanto, um senão fundamental: não se menciona que a medida de um ângulo em radianos independe do arco da circunferência considerada, ou seja, que dois círculos quaisquer com mesmo centro são semelhantes. O autor introduz a nomenclatura "ciclo trigonométrico". Observe que tal noção, que será empregada constantemente, independe da introdução do "ciclo trigonométrico", que pode se caracterizar simplesmente como uma palavra a mais para ser memorizada pelos alunos. Um ponto positivo a ser destacado na introdução do círculo trigonométrico é a analogia que é feita entre o círculo orientado e o eixo orientado.

O Capítulo 13 é dedicado às funções trigonométricas. São apresentadas as funções seno, cosseno e tangente, com seus gráficos. Mais uma vez, o livro recorre a uma analogia bastante feliz para introduzir estes conceitos (a de uma roda gigante em movimento). Os gráficos são traçados marcando-se alguns pontos que lhes pertencem e observando o seu comportamento quanto a crescimento e decrescimento. Vale aqui a mesma observação feita anteriormente para os gráficos das funções exponencial e logaritmo: A simples determinação de alguns pontos dos gráficos não garante que eles terão as formas mostradas. Na seção, "Os gráficos das funções seno e coseno" se menciona que uma vez conhecido o gráfico de uma das funções o outro é obtido facilmente, por translação. O livro estuda funções do tipo $a+b\,\mathrm{sen}(cx+k)$ e $a+b\cos(cx+k)$. De maneira geral, não se mostra como os gráficos destas funções não são relacionados com o gráfico da função seno e cosseno, respectivamente (isso é feito somente para as funções $\mathrm{sen}(cx)$ e $\cos(cx)$). A relação entre os senos e cossenos de x e de $(\pi/2-x)$ é obtida a partir do estudo da relação entre os gráficos de seno e cosseno, em vez de utilizar as fórmulas de $\mathrm{sen}(a-b)$ e de $\cos(a-b)$, que serão estudadas posteriormente. O capítulo termina com a apresentação das funções secante, cossecante e cotangente.

O tópico seguinte é a relação entre as funções trigonométricas (página 319), que não são estabelecidas com a generalidade devida (a dedução foca apenas os arcos do 1º quadrante, sendo "generalizada" para os demais). A seguir, se estuda a redução de um arco ao primeiro quadrante (página 324), estudando separadamente os casos em que o arco está no segundo, terceiro e quarto quadrantes. Uma apresentação mais integrada seria, provavelmente, mais proveitosa para o aluno.

A seguir, o livro dedica uma seção (página 332), ao cálculo dos valores das funções trigonométricas, priorizando-se o uso de uma tabela de linhas trigonométricas (menciona-se, também, de passagem, o uso da calculadora, já abordado no Capítulo 11).

Estranhamente, encontra-se, nesta seção, um complemento sobre a lei dos senos e cossenos, estendo-as a triângulos quaisquer. Ora, estes dois resultados são fundamentais para a chamada “resolução de triângulos”, e deveriam ser enfatizados, e não relegados a este complemento. Este capítulo termina com o estudo das funções trigonométricas inversas, arcsen, arccos e arctg, inclusive com seus gráficos.

O último capítulo do livro, o Capítulo 14, é dedicado às “Fórmulas de transformação”. Embora o autor tenha apresentado bem cedo a lei dos senos e a lei dos cossenos, deixa para este capítulo a apresentação do seno, do cosseno e da tangente dos arcos soma e diferença. Em verdade, a fórmula para a soma de dois arcos **não** é demonstrada. Faz-se um exemplo e afirma-se “Esta última sentença pode ser generalizada para dois arcos cujas medidas sejam a e b quaisquer” (página 351). A fórmula para o seno da diferença de dois arcos e para os cossenos da soma e da diferença de dois arcos são uma simples conseqüência deste primeiro resultado. Como casos particulares, são apresentadas as fórmulas para o arco duplo e o arco metade. O capítulo se encerra com a apresentação das funções trigonométricas de um arco em função da tangente do arco metade e das fórmulas para transformação de somas em produtos.

O último capítulo trata das equações e inequações trigonométricas. Um grande mérito do capítulo é motivá-las através de situações geométricas, que dão ao aluno uma boa noção do motivo pelo qual se tem interesse em resolvê-las. O tratamento dado às equações é adequado e sem exageros, limitando-se aos casos que de fato são importantes para o aluno.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 1

O livro sob análise possui muitas das características desejáveis a um livro voltado ao ensino médio. Sua linguagem é adequada ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Quase todos os conceitos são introduzidos através de exemplos motivadores, que fornecem, ao aluno, indicações relativas à relevância do que se está ensinando. Entre os exercícios resolvidos e propostos há bons exemplos de aplicações. O livro não ignora completamente a tecnologia atual, fazendo menção ao uso de calculadoras, quando adequado (embora o uso do computador não seja mencionado). Encontram-se, também, quando necessários, textos explicativos relativamente longos, o que prepara o aluno para ler textos mais avançados no futuro. Ao final de cada capítulo, encontra-se uma seção intitulada “relembrando conceitos”, em que são sucintamente apresentados os resultados mais importantes do capítulo, o que auxilia a organizar o pensamento do aluno.

Há também falhas, já explicitadas na análise acima. Uma parte delas é fruto da preocupação em cobrir todos os aspectos do programa consagrado pelos exames vestibulares, que leva a apresentar certos fatos sem justificativa, o que compromete, perante o aluno, a imagem da Matemática como ciência que emprega o método lógico dedutivo.

No balanço geral, o livro cumpre satisfatoriamente seu papel de levar ao aluno que inicia o ensino médio uma visão adequada da Matemática. Se, em futuras edições, alguns dos senões já mencionados forem sanados, sua contribuição poderá ser ainda mais apreciável.

Bianchini e Paccola

Matemática – volume 2 (versão beta)

Descrição sucinta do Volume 2

Este volume da coleção cobre progressões aritméticas e geométricas, matrizes, determinantes, equações lineares, binômio de Newton, análise combinatória, probabilidades, geometria no espaço, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. A exemplo do que ocorre nos demais volumes, o livro é bem ilustrado e tem boa composição tipográfica. A boa qualidade das ilustrações é especialmente bem-vinda nos capítulos dedicados à geometria espacial, facilitando o entendimento e atraindo o aluno para o assunto.

Análise detalhada do Volume 2

O Capítulo 1 estuda as progressões aritméticas. Inicia-se definindo, de forma errônea, seqüências numéricas como sendo "conjuntos numéricos em que os elementos se sucedem em uma determinada ordem". Aqui, se confunde uma sucessão, que é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, com seu conjunto de valores. Na verdade, ao não definir uma seqüência como um caso particular de uma função, o livro já demonstra sua intenção de não correlacionar progressões aritméticas e geométricas com funções afins e exponenciais, respectivamente, o que resulta em prejuízo para o aluno, que deixa de fazer as conexões adequadas entre os assuntos.

Na página 4 encontra-se uma definição adequada de progressão aritmética, como uma sucessão em que a diferença entre dois termos sucessivos quaisquer é constante. Na página 7, encontra-se uma demonstração correta para o termo geral de uma progressão aritmética. A introdução de demonstrações é essencial para que o aluno se familiarize com a maneira específica da argumentação matemática — a demonstração. Nesta seção, encontram-se exercícios interessantes, como o de número 31, na página 9 que examina subdivisões sucessivas de um triângulo equilátero. O exemplo 6, da página 10, que pede para achar o número de múltiplos de 8 entre 100 e 800, também é interessante.

A interpolação aritmética é apresentada na seção 4, página 11. A apresentação é correta, mas poderia, facilmente, ser melhor motivada (é natural, por exemplo, desejar saber em que posições devem ser colocados 10 postos de gasolina entre os quilômetros 12 e 111, de modo que as distâncias entre postos consecutivos sejam iguais). Aliás, em todo o capítulo referente a progressões aritméticas a preocupação em apresentar motivações para os tópicos ensinados é bem menor do que no restante do livro.

A soma dos termos de uma progressão aritmética é apresentada a seguir, motivada através da bem conhecida história de sua descoberta por Gauss. O capítulo se encerra com uma coleção de exercícios propostos. Entre os exercícios complementares há exercícios interessantes, como o de número 70 da página 18, que usa progressões aritméticas para modelar um processo de crescimento.

O Capítulo 2, sobre progressões geométricas, ao contrário do anterior, principia com uma boa motivação. Uma progressão geométrica é definida como uma sucessão na qual o quociente de dois termos sucessivos quaisquer é constante. Analogamente ao que foi feito para as progressões aritméticas, encontra-se no texto uma demonstração para a expressão do termo geral de uma progressão geométrica (página 27). A interpolação geométrica é apresentada na página 29, novamente sem qualquer tipo de motivação.

A seção 3, a seguir, trata da soma das progressões geométricas finitas, enquanto a seção 4 é dedicada à soma de infinitos termos de uma progressão geométrica. O tratamento deste tema, que é o primeiro contato dos alunos com a noção de limite, é conciso, mas adequado (embora talvez fosse preferível um maior grau de motivação para o conceito). O exemplo 5, da página 34, é bastante útil, pois mostra como se pode transformar uma dízima em fração ordinária utilizando a soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, sem a necessidade de decorar fórmulas. O exemplo 6 (página 35), que explica uma situação geométrica, é bom. No entanto, o exercício 37, na mesma página, proposto aos alunos, é uma simples repetição do exemplo 6, o que lhe retira o caráter de problema, de desafio que exija reflexão por parte do aluno.

As matrizes são estudadas no Capítulo 3, introduzidas com uma boa dose de motivação, através de vários exemplos que apresentam matrizes como modelos matemáticos para tabelas de dupla entrada. A seguir são introduzidas diversas definições rotineiras: linhas, colunas, matrizes quadradas, matrizes diagonais, matriz identidade, matriz transposta e igualdade de matrizes. A definição de matriz diagonal, na página 47, é desnecessariamente complicada (e foge à definição usual) pela exigência de que pelo menos um dos coeficientes da diagonal seja não-nulo.

Depois, são abordados soma e subtração de matrizes e multiplicação de matriz por escalar. A apresentação é correta, mas poderia ser melhor motivada por exemplos. Já a muliplicação de matrizes, tópico difícil para os alunos, está muito bem motivada, através de um exemplo cuidadosamente trabalhado, levando o aluno a perceber que a definição, aparentemente complicada, para o produto de duas matrizes é natural. Os exemplos e exercícios, no entanto, são mais rotineiros e menos interessantes. O capítulo termina com a definição de matriz inversa de uma matriz quadrada.

O Capítulo 4 é dedicado aos determinantes e se inicia com uma tentativa inadequada de motivar o assunto através de quadrados mágicos. Como não há qualquer relação entre os assuntos, esta abordagem pode apenas levar o aluno a ficar confuso. Este texto introdutório fica melhor em seu final, que associa, corretamente, os determinantes a processos de resolução de sistemas lineares. O livro apresenta inicialmente a definição dos determinantes de ordens 1, 2 e 3. Em seguida, é dada a regra de Sarrus para o cálculo dos determinantes de ordem 3. Na página 74 define-se matriz cofator e na página 76 é mostrado como calcular um determinante de ordem n. A definição apresentada é o teorema de Laplace. Isso causa dificuldades não discutidas, como por exemplo mostrar que o valor do determinante independe da linha ou coluna pela qual será desenvolvido.

A seção 3 é dedicada às propriedades dos determinantes. Nada é demonstrado. São somente apresentados alguns exemplos, para determinantes de ordem 2 ou 3, e é dito que a propriedade é válida em geral, Mesmo no caso em que a propriedade decorre imediatamente da "definição" de determinante apresentada, como por exemplo a propriedade de que se um determinante tem uma fila (linha ou coluna) nula, então ele é nulo, nada é demonstrado, somente exemplificado.

Na página 85, a relação entre determinantes e matrizes invertíveis está mal apresentada. Ter determinante não-nulo é condição necessária e suficiente para que uma matriz seja invertível. O que o livro mostra é que se uma matriz é invertível então seu determinante é não-nulo e não, como é afirmado, que se o determinante é não-nulo então a matriz é invertível.

O livro apresenta, na página 86, a maneira de calcular a inversa de uma matriz utilizando a matriz cofator e o determinante da matriz, como geralmente feito nos livros do ensino médio. Esta definição, que não será explorada posteriormente, é importante do ponto de vista teórico, mas deficiente, e mesmo inútil, do ponto de vista prático, para o cálculo efetivo do cálculo da inversa de uma matriz (o método da redução à matriz identidade através de operações elementares é muito superior).

O Capítulo 5 é dedicado às equações lineares. O capítulo se inicia com uma boa introdução motivadora, mostrando que sistemas de equações lineares ocorrem na resolução de problemas. A seguir, o livro apresenta, com muita propriedade, os conceitos de solução de um sistema e de sistemas equivalentes. Estes conceitos iniciais fornecem uma base sólida para o aluno entender a classificação de sistemas lineares e seus métodos de discussão e resolução.

Depois das definições iniciais, é apresentada a Regra de Cramer, que é devidamente demonstrada para sistemas com 2 equações e 2 incógnitas. A seguir, se informa ao aluno que a regra de Cramer se aplica, em geral, para sistemas com n equações e n incógnitas. A seguir, na seção 6 (página 103) apresenta-se a classificação tradicional de sistemas (impossíveis, possíveis e determinados, e possíveis e indeterminados). O livro mostra, corretamente, por meio de um exemplo, que mesmo se os determinantes de todas as incógnitas forem nulos, justamente com o determinante do sistema, não se pode garantir que o sistema tem solução. Falta aqui, no entanto, uma menção de que a classificação aqui apresentada se aplica também a sistemas com diferentes números de equações e incógnitas e que, neste caso, não se pode empregar determinantes.

A seção 7 estuda a resolução de sistemas lineares por escalonamento. A apresentação é detalhada, com vários exemplos resolvidos que incluem sistemas de todos os tipos. Em especial, o livro mostra que é possível resolver sistemas indeterminados (ou seja, é possível descrever todas as suas soluções). Falta, nesta seção, apenas informar ao aluno que o método de escalonamento é superior ao de Cramer, mesmo para sistemas com mesmo número de equações e incógnitas. Uma outra omissão é não apresentar nenhuma interpretação geométrica para os sistemas (nem mesmo para os com duas incógnitas).

No Capítulo 6 é dedicado ao binômio de Newton. A opção por apresentar este assunto antes dos métodos de contagem acarreta diversos problemas. Em primeiro lugar, a apresentação da definição de fatorial de um número é puramente factual, não sendo apresentada qualquer motivação. Além disso, não explica porque se convenciona que $0! = 1! = 1$. Estes fatos são simplesmente incorporados na definição do fatorial, sem nenhum comentário.

A seguir, se apresentam os números binomiais, introduzidos de modo igualmente árido, já que não é possível interpretá-los como resultantes de contagens. As diversas propriedades dos números binomiais são estabelecidas de modo puramente algébrico, justamente quando a interpretação em termos de contagem é o que as torna mais interessantes. A seção 4 do capítulo estuda o triângulo de Pascal. Este estudo se presta admiravelmente à apresentação de demonstrações utilizando indução matemática ou argumentos de contagem, mas esta oportunidade é perdida. As propriedades são generalizadas a partir de exemplos numéricos específicos. Finalmente é apresentada a fórmula do Binômio de Newton. Como métodos de contagem ainda não foram introduzidos, o livro se limita a observar que os coeficientes dos termos são (por acaso?) os elementos do Triângulo de Pascal. Assim, algo que poderia se revestir de significado, traduzindo uma aplicação de métodos de contagem, se torna mais um fato da matemática que é apresentado sem a devida justificativa.

A análise combinatória é estudada no Capítulo 7. Como em outros capítulos, existe uma boa introdução para o assunto. O princípio fundamental da contagem é discutido com um bom exemplo, nas páginas 139 e 140. No entanto, não se chama a atenção para o fato de que para aplicar o princípio, o número de resultados de cada um dos eventos deve ser independente dos resultados dos eventos precedentes. De todo o modo, há um bom número de exemplos, que ilustram adequadamente a aplicação do princípio.

A discussão de agrupamentos é bem feita na seção 3, páginas 145–147. A seguir, são deduzidas as fórmulas para arranjos, permutações e combinações. Malgrado as qualidades deste capítulo, inclusive boa quantidade de exercícios e exemplos interessantes, a seção 5, intitulada "Problemas que envolvem arranjos e combinações" pode induzir no aluno o hábito de querer classificar qualquer problema de análise combinatória como um problema de arranjos, combinações ou permutações, em vez de raciocinar e utilizar o princípio fundamental da contagem, sem a preocupação de memorizar fórmulas ou tipos de problemas.

No Capítulo 8 estudam-se as probabilidades, iniciando-se, como em muitos outros capítulos, através de um exemplo motivador. A seguir, são introduzidas as definições de espaço amostral, evento e de probabilidade de um evento. Ocorre aqui, uma impropriedade comum a vários livros para o Ensino Médio, ao se introduzir a noção de "espaço amostral equiprovável". Ora, equiprobabilidade é um atributo do modelo de probabilidade e não do espaço amostral. Por outro lado, o exemplo 2, da página 166, é um problema de contagem que nada tem a ver com espaços amostrais.

Apesar destes senões, o capítulo sobre probabilidades tem várias virtudes. A coleção de exemplos e exercícios é bastante boa, apresentando probabilidades como uma ferramenta que pode ser aplicada a diversas situações reais (especialmente ligadas a jogos, como o da Sena, abordada no exercício 13, da página 170). A seção 5, dedicada à probabilidade condicional, é bastante boa, explicando com cuidado um conceito delicado. Finalmente, a seção 7 estuda o tópico interessante das probabilidades geométricas, isto é, obtidas através do quociente de dois comprimentos ou duas áreas. Este assunto, raramente abordado no Ensino Médio, é uma introdução apropriada à noção de probabilidade contínua e proporciona exemplos bastante motivadores.

A partir do Capítulo 9, o livro dedica-se à geometria. Neste capítulo, estuda-se a geometria espacial "de posição". A maior parte dos livros de Ensino Médio, neste ponto, faz referência à construção lógico-dedutiva da Geometria. Na maior parte dos casos, no entanto, este tratamento tem muitos defeitos, além de ser algo contraditório com o tratamento dado aos demais assuntos, levando os alunos à idéia equivocada que a Geometria é a única parte da Matemática que tem tal estrutura. Este livro opta por uma outra abordagem, que introduz noções relativas a pontos, retas e planos através de modelos concretos para os mesmos. Assim, ao invés de apresentar provas para as propriedades apresentadas, convida os alunos a verificá-las através dos modelos. Embora se perca a oportunidade de se evidenciar, para o aluno, o exemplo mais clássico da estrutura lógica da Matemática, a apresentação é, provavelmente, bastante atrativa para o aluno.

Há, porém, alguns equívocos na ordem em que os conceitos são apresentados. Por exemplo, a definição de reta perpendicular a um plano é devidamente apresentada, na página 197, como a de uma reta que é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo seu ponto de interseção com o plano. Mas na página anterior já tinha sido introduzida a noção de distância de um ponto a um plano como a distância entre o ponto e sua projeção ortogonal sobre o plano; no entanto, não se explica o que é tal projeção ortogonal. A inversão da ordem de apresentação resolveria o problema.

De todo o modo, o capítulo apresenta exercícios interessantes, como o de número 11 da página 198, sobre uma mesa que se deve apoiar sobre um plano. Este capítulo termina com a apresentação, sem demonstração, da relação de Euler para poliedros e termina mostrando os cinco poliedros regulares. Não se menciona que o fato de existirem somente cinco desses poliedros é decorrência da relação de Euler.

O Capítulo 10 estuda os prismas. Depois de apresentar a definição, de modo correto, são dados vários exemplos de prismas (principamente paralelepípedos) que ocorrem na vida cotidiana. A seguir, mostra-se como calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo e as áreas lateral e total de prismas. O cálculo de volumes começa pelo paralelepípedo retângulo. Argumenta-se que, em um paralelepípedo de dimensões a, b e c cabem abc cubos unitários e, portanto, este é seu volume. Não se faz nenhum comentário a respeito do caso em que a, b e c não são inteiros e, muito menos, ao caso em que são irracionais. A seguir, encontramos o enunciado do princípio de Cavalieri, apresentado para o caso de que seções cortadas por um mesmo plano paralelo às bases têm áreas iguais e utilizado para obter o volume de um prisma arbitrário. A motivação apresentada para o princípio de Cavalieri é bastante apropriada, mostrando que o volume de uma pilha de lajotas não se altera quando as lajotas são deslocadas horizontalmente. De um modo geral, o capítulo apresenta bons exemplos e exercícios.

As pirâmides são estudadas no Capítulo 11. O capítulo tem as mesmas características do anterior. Inicialmente, são exploradas as relações métricas em pirâmides regulares, com atenção especial ao tetraedro regular. Depois, mostra-se como calcular áreas laterais e totais. O volume da pirâmide é deduzido com base no princípio de Cavalieri e no fato de que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides equivalentes. Para aplicar o princípio de Cavalieri se demonstra que a razão entre as áreas de seções transversais é igual à razão entre o quadrado de suas distâncias aos vértices. A demonstração é correta, mas não enfatiza o fato fundamental de que um plano paralelo à base determina uma pirâmide semelhante à original. Outro fato fundamental — o de que áreas e volumes de figuras semelhantes são proporcionais, respectivamente, ao quadrado e ao cubo da razão de semelhança — é também ignorado. Mais uma vez, os exemplos e exercícios são interessantes.

Os capítulos seguintes, 12 e 13, são dedicados aos cilindros e cones, respectivamente. Têm características análogas aos dos anteriores, com uma exposição cuidadosa e um bom número de exercícios interessantes.

O Capítulo 14, o último do livro, é sobre a esfera. A apresentação segue o mesmo padrão dos capítulos anteriores, com uma exposição cuidadosa, boas ilustrações e bons exemplos e exercícios. Destaca-se, neste capítulo, a seção 3, que calcula corretamente o volume da esfera, utilizando o princípio de Cavalieri. Encontramos nele também uma demonstração informal da expressão para a área de uma superfície esférica, utilizando uma passagem ao limite, baseada na diferença entre os volumes de duas esferas de raios próximos.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 2

Este volume, de modo geral, contém um tratamento adequado para os assuntos nele cobertos. O livro não é uniforme. Alguns capítulos são melhores que outros, há falhas conceituais, já apontadas acima, e algumas escolhas (como a de apresentar o Binômio de Newton antes de contagem) são equivocadas.

No entanto, ele oferece ao aluno uma boa oportunidade de aprendizagem. Na maior parte do livro, a matemática é algo que faz sentido e que pode ser usada para resolver problemas reais.

Bianchini e Paccola

Matemática – volume 3 (versão beta)

Descrição sucinta do Volume 3

Este volume cobre geometria analítica, incluindo o estudo das cônicas; polinômios; números complexos; equações polinomiais ou algébricas; limites de funções; derivadas e noções de estatística. Possui 354 páginas e um bom número de ilustrações de boa qualidade, principalmente no capítulo referente a estatística. A composição tipográfica é bem cuidada e não se observam erros de impressão.

Análise detalhada do Volume 3

O primeiro capítulo apresenta noções de geometria analítica, e principia com a introdução dos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais. O tratamento é sucinto. Embora levando em conta que este tópico está sendo apresentado a alunos da 3ª série, já maduros, seria recomendável mais detalhes e exemplos neste tópico extremamente importante, base para tudo o que se segue.

A fórmula da distância entre dois pontos é deduzida corretamente na página 3, motivada por um problema prático. Este, aliás, é um ponto extremamente positivo deste livro. Diferentemente do que fazem a maior parte de seus congêneres, neste livro a geometria analítica é apresentada como uma técnica para resolver problemas de geometria e não como uma disciplina isolada, com fim em si mesma. Por exemplo, na situação utilizada para introduzir a fórmula da distância o sistema de coordenadas não é apresentado já pronto, fazendo parte do proceso de resolução adotar um sistema adequado de coordenadas.

A expressão para a razão de seção de um segmento por um ponto também é demonstrada, usando o teorema de Tales (página 7), sendo aplicada para achar as coordenadas do ponto médio de um segmento e para achar as coordenadas do baricentro de um triângulo (página 12). Este é um dos poucos livros para o ensino médio que se preocupa em dar ao aluno uma boa noção do significado do baricentro, ao invés de simplesmente fornecer uma fórmula a mais.

O capítulo se encerra com a fórmula para a área de um triângulo, inteligentemente demonstrada (página 16).

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da linha reta. Novamente, o aluno é tratado como adulto e o capítulo se inicia com um exemplo de situação geométrica para o qual a determinação da equação da reta se revelará útil. Ainda melhor: o problema é inicialmente resolvido através de geometria euclidiana sintética (usando semelhança de triângulos) e, depois, usando geometria analítica. Isto evita a idéia nociva de que geometria sintética e geometria analítica são partes completamente separadas dentro da matemática.

A equação geral da linha reta é deduzida utilizando a expressão para a área de um triângulo, chegando-se à expressão tradicional para a equação da linha reta sob a forma de determinante. Embora esta formulação tenha a desvantagem de fornecer uma expressão que o aluno tende a usar sem muita reflexão, deve-se salientar que o livro mostra corretamente que a equação de uma linha reta tem a representação dada e, reciprocamente, que as expressões dadas representam linhas retas.

Ao contrário de muitos outros textos, o livro não fragmenta demasiadamente o estudo da linha reta. Apresenta somente a "equação reduzida da reta" e a "forma paramétrica da equação da reta".

Na apresentação da equação reduzida, são devidamente apresentadas as interpretações para os coeficientes. Embora o coeficiente angular seja inicialmente apresentado como a "tangente do ângulo que a reta forma com o eixo-x" (que coloca uma ênfase desnecessária em um fato não tão importante), o livro mostra que ele também corresponde à razão entre diferenças de ordenadas e abscissas. É pena que não se faça a conexão com os gráficos de funções afins e aproveite-se para interpretar o coeficiente angular como taxa de variação (o que não foi feito no Volume 1).

A equação paramétrica da reta é devidamente contextualizada, através de um exemplo envolvendo a trajetória de um móvel.

Os feixes de retas concorrentes em um ponto são corretamente estudados nas páginas 42 e 43.

Em seguida, o livro estuda retas concorrentes, relacionando-as com sistemas lineares. Seria interessante que o livro mostrasse que o estudo da posição relativa das retas fornece uma ferramenta geométrica para a discussão de sistemas lineares.

Na seção 7 deste capítulo, são estudados o paralelismo, o perpendicularismo e o ângulo entre duas retas concorrentes.

A distância de um ponto a uma reta é motivada por um exemplo, que é detalhadamente resolvido. Em seguida, o livro apresenta a fórmula geral. Embora ela seja apresentada sem demonstração, pelo menos é verificada para o exemplo antes resolvido.

As inequações lineares são interpretadas graficamente na seção 10. A exposição é clara e são apresentados vários exemplos. Faltam, no entanto, exemplos em que desigualdades lineares sejam utilizadas para expressar restrições em situações de modelagem (como em programação linear).

O Capítulo 3 estuda a circunferência. Após mostrar como escrever a equação de uma circunferência, dados seu centro e seu raio, o livro mostra como reconhecer se uma equação dada representa uma circunferência e, em caso afirmativo, como determinar seu centro e raio. Corretamente, a ênfase está em usar completamento de quadrados, que tem a vantagem de não exigir a memorização de fórmulas e, ao mesmo tempo, utilizar os recurso algébricos desenvolvidos nas séries anteriores.

A seguir, são estudadas as posições relativas de duas circunferências e de uma reta e uma circunferência. O capítulo tem muitos exemplos resolvidos e os exemplos vêm acompanhados de ilustrações que mostram as situações geométricas estudadas. Nos exercícios propostos, páginas 103, 104 e 105, há problemas envolvendo regiões do plano definidas por inequações do segundo grau.

O Capítulo 4 é dedicado à elipse, hipérbole e parábola. São dadas as definições destas cônicas, motivadas a partir de situações geométricas, que, embora um pouco artificiais, podem despertar a atenção dos alunos. A partir delas são deduzidas suas equações cartesianas. Ao final da apresentação de cada cônica, é ilustrado o processo prático de construção, com barbante, pregos, etc.

Cada uma das cônicas é também identificada como um particular tipo de seção em um cone. Há, entanto, uma falha séria. Hipérboles são caracterizadas como produzidas por seções paralelas ao eixo do cone. De fato, planos paralelos ao eixo do cone determinam uma seção hiperbólica. No entanto, não é necessário que isto ocorra. Toda a vez que o plano corta as duas folhas de um cone ele determina uma hipérbole.

O último tópico abordado no capítulo é o estudo da equação $y = ax^2 + bx + c$, para o qual o livro introduz a idéia importante de translações de eixos, nas páginas 134 e 135, dando exemplos. Deve-se observar, porém, que o livro não faz a conexão explícita com a função quadrática, estudada no Volume 1. Perde, assim, uma boa oportunidade para mostrar aos alunos que as diversas partes da matemática não são, de forma nenhuma estanque. Certamente, seria bem-vindo pelo menos um comentário do gênero: "... demonstramos, assim, que tínhamos razão, no volume 1, quando dissemos que o gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola".

Nos comentários finais do capítulo, são citadas aplicações dos três tipos de cônicas. Os comentários, no entanto, são sucintos demais para realmente dar uma idéia do uso das cônicas (e de suas propriedades) nas aplicações.

O Capítulo 5 estuda os polinômios, principiando com um problema motivador. Como acontece com praticamente todos os livros do segundo grau, o livro não estabelece corretamente a relação entre polinômios identicamente nulos e o polinômio zero, ou seja, aquele cujos coeficientes são todos nulos (parágrafo 4, páginas 157 e 158): o livro tacitamente admite que não seja necessário justificar porque essas noções são equivalentes. Na verdade, esta é uma propriedade fundamental dos polinômios e merece, pelo menos, ser discutida.

O parágrafo 5 estuda as operações com polinômios. A adição, subtração e multiplicação de polinômios, já estudadas no primeiro grau, são rapidamente revistas. A divisão de polinômios é abundantemente exemplificada. O parágrafo 6 estuda o resto da divisão de um polinômio por um polinômio do primeiro grau e relaciona isso com a divisibilidade do polinômio pelo binômio $ax + b$. O capítulo se encerra com o dispositivo prático de Briot-Rufini para calcular o quociente e o resto da divisão de dois polinômios. Não é feita menção ao fato, bastante útil, que o dispositivo de Briot-Rufini se constitui em um método eficiente para calcular o valor numérico de um polinômio (preferível ao cômputo de cada potência de x).

Os números complexos são estudados no Capítulo 6. Eles são motivados por meio de um problema do segundo grau, resolvido por Cardano. O livro não cita que foi a resolução das equações do 3º grau que obrigou os matemáticos a encararem de frente os números complexos. Os números complexos são introduzidos sem rigor excessivo, por meio da introdução da unidade imaginária i e das expressões da forma $a + bi$.

O capítulo apresenta as noções usuais, como igualdade de números complexos, operações com números complexos, conjugado de um número complexo. O parágrafo 5 introduz a representação dos números complexos, após o que se estudam o módulo e argumento de um complexo.

A forma trigonométrica dos números complexos é apresentada na seção 7 e imediatamente aplicada à multiplicação, potenciação e radiciação de complexos.

Este capítulo apresenta muitos exemplos e exercícios. No entanto, nem todos os aspectos são tão bem explorados quanto possível. Por exemplo, a interpretação geométrica do módulo de um complexo é explorada apenas de maneira óbvia. Não há nenhum exercício que ilustre, por exemplo, que os complexos que são soluções da equação $|z-a| = r$ estão em um círculo de centro a e raio r do plano complexo.

O Capítulo 7 estuda as equações algébricas. Principia com uma introdução histórica sobre a resolução das equações do 3º grau pelos algebristas italianos. A seguir, define corretamente uma equação algébrica, ressaltando que os coeficientes do polinômio são números complexos. Nota-se, aqui, uma certa falha na lógica do livro: os polinômios estudados no Capítulo 5 tinham coeficientes reais; agora, subitamente aparecem polinômios complexos, sem nenhum comentário a respeito das definições e propriedades lá estabelecidas continuarem válidas. É por esta razão que a maior parte dos autores prefere estudar números complexos antes de polinômios.

O parágrafo 3 do Capítulo 7 estuda a decomposição de um polinômio em um produto de fatores do 1º grau. A partir do Teorema Fundamental da Álgebra, o livro mostra corretamente que uma equação algébrica de grau n tem n raízes complexas. A noção de multiplicidade das raízes é estudada na seção 4. Enuncia-se, corretamente, que as raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais se apresentam em pares conjugados. O parágrafo 6 mostra como determinar, quando elas existem, as raízes racionais de polinômios, enquanto que o parágrafo 7 apresenta as relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio.

O Capítulo 8 estuda os limites das funções. O exemplo utilizado para motivar a definição do conceito de limite é apropriado, pois o limite no ponto desejado não se acha simplesmente pelo cálculo do valor da função naquele ponto. Ou seja, a função cujo limite se procura não é contínua no ponto.

O conceito de limite é cuidadosamente explicado, com várias ilustrações, após o que é apresentada sua definição formal, corretamente.

As propriedades usuais dos limites são simplesmente citadas, sem demonstração, como anunciado no texto (páginas 222 e 223), o que é bastante razoável neste nível.

Há um parágrafo dedicado ao cálculo dos limites laterais das funções (página 226). A indeterminação 0/0 é discutida em exemplos, nas páginas 227 e 228.

A continuidade das funções é estudada a partir da página 229. É apresentada uma definição correta na página 229, seguida de vários exemplos com interpretações gráficas. O livro afirma, sem demonstração, que as funções usuais (incluindo as funções racionais, nos pontos em que o denominador é não-nulo) são contínuas.

Na seção 9 são estudados dois limites importantes: o limite, quando x tende para 0, de $\operatorname{sen} x/x$ e o limite, quando x tende para o infinito, de $(1+1/x)^x$. O primeiro é demonstrado geometricamente. O segundo é simplesmente motivado, apresentando-se o valor de $(1+1/x)^x$ para valores crescentes de x.

As derivadas são estudadas no Capítulo 9. Como muitos outros capítulos, este principia com um exemplo motivador. A apresentação do conceito de derivada é feita utilizando a noção de velocidade média, em intervalos de tempo cada vez menores, após o que é dada sua definição matemática como o limite de um quociente de acréscimos. Após isso, introduz-se a função derivada e interpreta-se geometricamente a derivada de uma função.

As regras de derivação são apresentadas nos parágrafos 3 e 4. Observe-se que a regra da cadeia, para a derivada de uma função composta é deduzida erroneamente (páginas 270 e 271), pois não há garantias de que Δu é sempre diferente de zero.

A expressão para a derivada de uma função inversa (página 281) é demonstrada diretamente, quando é simplesmente uma conseqüência da regra da cadeia. A demonstração apresentada, baseada no cômputo do limite de $\Delta x/\Delta y$ quando Δx tende a 0, é incorreta, pois não se pode afirmar que Δy é sempre não-nulo.

As derivadas são aplicadas a problemas de máximos e mínimos no parágrafo 5. A regra para determinar máximos e mínimos locais de funções deriváveis é motivada por meio de gráficos. O mesmo é feito sobre a determinação dos pontos de inflexão. O parágrafo 6 aplica as derivadas a problemas de máximos e mínimos, com vários e bons exemplos de geometria e de física.

O balanço geral dos capítulos de introdução ao Cálculo é bastante positivo. Embora a exposição contenha falhas, conforme apontado acima, a escolha dos tópicos de cálculo a tratar e, especialmente, dos exemplos e exercícios, foi feita com bom-senso e fornece uma boa introdução ao assunto.

O último capítulo do livro o décimo, é uma introdução sucinta à estatística descritiva. Contém muitos exemplos resolvidos e exercícios propostos. O capítulo discute histogramas, polígonos de freqüência, gráficos em setores. Este capítulo é especialmente bem ilustrado e recorre, com sucesso, a gráficos no estilo dos usados em jornais e revistas para ilustrar suas matérias. Há uma seção dedicada às medidas de tendência central (média, média ponderada, mediana) e outra sobre as medidas de dispersão (variância e desvio-padrão). Não há, no entanto, maiores explicações, ou exercícios resolvidos ou propostos, sobre a importância de tais medidas para compreender a variabilidade dos dados. Seria interessante, por exemplo, se apresentar ao aluno duas coleções de dados com a mesma média e variâncias diferentes e indagar o que isto significa. Poder-se-ia, ainda, pedir para o aluno dizer onde esperaria encontrar maior variância: entre as alturas dos colegas de turma ou entre as alturas de todos os alunos da escola. Deste modo, as medidas estatísticas deixam de ser simplesmente resultados numéricos e passam a adquirir significado.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 3

A exemplo dos volumes anteriores, o Volume 3 desta coleção possui mais qualidades do que defeitos. Neste livro, a matemática não é vista como algo completamente desvinculado do cotidiano. Os autores se esforçam para apresentar aplicações da maior parte dos tópicos estudados e as utilizam para motivar o estudo.

Apesar de algumas falhas conceituais (quem sabe remediadas em futuras edições), já mencionadas acima, a visão da matemática oferecida nesta coleção será mais útil ao aluno em sua vida futura do que aquela presente na maior parte dos livros para o Ensino Médio.