Benigno e Cláudio

Matemática, aula por aula – volume 1

Este livro se caracteriza pela superficialidade com que os assuntos são abordados e, conseqüentemente, pelas ausências de vários tópicos relevantes que se referem a esses assuntos. Nele, o leitor não é solicitado nem induzido a raciocinar ou a usar sua imaginação. Não há argumentos dedutivos, as afirmações são feitas peremptoriamente, sem justificativas, e os exercícios (resolvidos ou propostos) não exigem argúcia mínima sequer. Praticamente inexiste contextualização.

Passemos à análise dos capítulos, um por um.

Capítulo 1. Conjuntos

Normalmente, os livros da primeira série do Ensino Médio começam com um capítulo sobre conjuntos. Deste modo, fica estabelecida uma linguagem que permite tratar os assuntos da Matemática com a precisão e a generalidade necessárias. A noção de conjunto substitui com vantagem as idéias de propriedade e de condição. Isto faz com que os conceitos lógicos como implicação, equivalência, negação, etc. se traduzam muito convenientemente para a linguagem dos conjuntos, a qual se torna assim o veículo adequado para transmitir os conceitos, processos e argumentos matemáticos.

Infelizmente, nenhuma das considerações acima transparece ao leitor do presente livro. Os conjuntos que ocorrem nos exemplos são finitos e têm os seus elementos especificados um a um. A noção de inclusão entre conjuntos não é relacionada com a implicação lógica. Aliás, não há explicação alguma sobre implicação, equivalência, condição necessária, condição suficiente, proposição, recíproca, contrapositiva, etc. Nem sequer propriedades simples (e imprescindíveis) como a transitividade da inclusão, por exemplo, são mencionadas. Em resumo, o tratamento dado aos conjuntos é primário e inútil.

O conjunto dos números naturais é apresentado em 10 linhas, onde é feita uma confusão entre os números e o sinais usados para representá-los. O brevíssimo comentário histórico é incorreto. E, naturalmente, nenhum aspecto relevante da estrutura do conjunto $\mathbb{N}$ é destacado ou ao menos mencionado. Exatamente os mesmos comentários se aplicam à seção que trata do conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

Como nada foi dito, os exercícios não se referem ao texto. Os números racionais são motivados pela necessidade de efetuar certas medidas mas na fração a/b, que exprime o resultado da medição, não se diz quais os significados dos inteiros a e b. Diz-se que "um número racional também pode ser escrito na forma decimal". Mas não se diz o que significa isto. E pior: nos exemplos, o que se faz é o contrário, ou seja, mostra-se como uma expressão decimal pode ser escrita como uma fração. Inclusive as dízimas periódicas têm suas geratrizes apresentadas, sem justificativa, é claro, quando devia ser o contrário. (Ah! mas se fosse o contrário poderia haver o perigo de ter de explicar a periodicidade, o que é imediato mas os autores de nossos livros ignoram.)

Em seguida, vêm os números irracionais. O livro diz simplesmente que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mas não diz por que. Os números irracionais são definidos como aqueles "cujas formas decimais não são exatas nem periódicas". E o que é a "forma decimal" de um número? Então vem o conjunto dos números reais, definido como a reunião dos racionais com os irracionais. Subentende-se que um número real é uma expressão decimal. Muito bem. Admitamos isso. Mas é preciso dizer o que significam certas relações como, por exemplo, $a < b$. E como se somam, multiplicam, subtraem ou dividem essas expressões? E quais são as conexões que existem entre as operações e as desigualdades? Ou mesmo, quais são as regras de manuseio para essas operações? Tudo isso precisaria ser esclarecido pois vai ser usado. Precisaria...

Os intervalos (abertos, fechados, etc.) são definidos por meio de desigualdades e depois ilustrados sobre uma reta, embora nenhuma referência tenha sido (nem venha a ser) feita sobre a correspondência entre $\mathbb{R}$ e os pontos de uma reta. As respostas dos exercícios sobre reunião e interseção de intervalos, postas no livro do professor, são dadas em figuras em vez de intervalos, como deveriam.

O capítulo chega ao fim sem que sejam mencionadas as regras para operações entre conjuntos ou entre números, as propriedades monotônicas dessas operações, o princípio da indução, o significado das expressões decimais, a correspondência entre $\mathbb{R}$ e a reta e muitos outros fatos fundamentais. Os exercícios são todos manipulativos e a maioria deles não está relacionada com o parco texto. Nenhum deles requer inteligência para ser resolvido.

Erros crassos (página 22): "o sinal $+$ indica a supressão dos números positivos" e "o sinal $-$ indica a supressão dos números negativos".

Capítulo 2. Funções

De forma vaga e confusa, o livro dá uma definição de função como um conjunto de pares ordenados, embora todos os exemplos de função que serão apresentados sejam de funções numéricas de uma variável numérica e — mais ainda — onde o valor $f(x)$ é dado por uma fórmula envolvendo x.

O capítulo começa definindo erradamente um par ordenado como um "conjunto de *dois* elementos". Isto, naturalmente, impede que (x, x) seja um par ordenado, logo a função identidade, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não existe.

Uma relação binária é definida como um subconjunto de um produto cartesiano mas não é feita nenhuma tentativa de motivar a denominação. Os exemplos apresentados são todos do tipo $y = ax + b$, $y = x^2$ ou bolinhas e flechinhas. Todas as relações mostradas são funções (dadas por fórmulas, inclusive as bolinhas e flechinhas).

A definição de função é dada do modo mais geral possível (domínio e contradomínio arbitrários), porém de forma incompreensível pois não se pode entender como uma relação, que é um subconjunto de $A \times B$, pode fazer corresponder a cada elemento de A um elemento de B.

Os exemplos, com bolas e flechas, são artificiais e infantis. Uma raiz, ou um zero de uma função $f\colon A \to B$ é uma noção definida no livro de modo geral, sendo A e B conjuntos quaisquer (numéricos ou não). Na verdade, mesmo se fosse $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não seria adequado falar numa raiz da função f. Equações têm raízes, funções têm zeros (quando seus valores são números).

O gráfico de uma função é usado mas não é definido. Aliás, como uma função é um conjunto de pares ordenados, ela já seria seu próprio gráfico.

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas são definidas brevemente. São conceitos de suma importância, por isso mereciam comentários e exemplos adicionais. Por exemplo, para as funções injetivas, a caracterização $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ é muito útil.

Sem dizer que $D(f) \subset \mathbb{R}$ nem que $CD(f) \subset \mathbb{R}$, o livro diz que o domínio de f é o conjunto dos números x para os quais as *operações* indicadas são possíveis. E se não houver operações? Depois de dar uma definição com máxima generalidade, o texto deixa subentendido que uma função é meramente uma expressão que envolve operações algébricas sobre uma variável numérica. Uma função real é definida no livro como aquela cujo domínio está contido em $\mathbb{R}$. Isto contraria o uso geral. Função real é aquela que assume valores reais. Por exemplo: a área de um polígono é uma função real. Seu domínio é o conjunto dos polígonos do plano e seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Toda a página 59 é uma grande confusão. Na página seguinte (60) a solução apresentada pelo livro para o exercício 33 diz que "o domínio da função $f(x) = (x-2)/(2x-1)$, cuja imagem é $\{-1, -1, 0, 1, 2\}$, é o conjunto $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 4/5\}$. Dá para entender?

A definição de função inversa não faz uso da hipótese de que f é uma bijeção; por isso não se pode assegurar a partir dela que f^{-1} existe. A melhor maneira de definir a inversa f^{-1} é por meio das igualdades $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Isto é útil, por exemplo, para estabelecer com clareza a conexão entre exponencial e logaritmo. Mas, mesmo que assim o desejasse, o livro não poderia dar esta definição porque a composição de funções só aparece nela depois da noção de inversa. Além disso, a função identidade só é definida no capítulo seguinte, e apenas para funções reais de uma variável real.

Capítulo 3. Função polinomial do 1º grau

Este capítulo trata das funções afins mas, por um capricho desnecessário, as funções constantes são excluídas e as que ficam recebem o nome mais complicado que serve de título do capítulo.

Logo no começo, as funções crescentes e decrescentes são definidas, sem que sejam apresentados exemplos. Tampouco se diz na definição que se trata de função real de uma variável real.

Na função afim $f(x) = ax + b$, o número a é chamado coeficiente angular. O nome certo é taxa de variação, pois função não tem ângulo. Quando a definição foi dada, o gráfico de f não tinha sido ainda apresentado mas, mesmo que tivesse sido, o ângulo que ele faz com o eixo x depende das unidades que se tomam para medir distâncias nos dois eixos.

Afirma o livro, peremptoriamente, que a função afim $f(x) = ax+b$ é crescente ou decrescente conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Mas não diz uma palavra sequer para convencer o leitor de que esta afirmação é correta. Aliás, o hábito de fazer declarações gratuitas, ainda que verdadeiras, é péssimo mas é usado neste livro de ponta a ponta. Este mau costume transmite a falsa noção de que a Matemática consiste numa série de enunciados cuja veracidade se deve aceitar porque resulta da autoridade do professor e daqueles que escrevem os livros. A verdade é o oposto: o estudo da Matemática deve proporcionar aos jovens a oportunidade de desenvolver o seu espírito crítico, aprender a raciocinar corretamente, fortalecer a imaginação e a criatividade, e habituar-se a tomar decisões baseadas na análise cuidadosa dos fatos. Estudada do modo como está mostrada neste livro, a Matemática é monótona, desagradável e desestimulante.

Voltemos ao Capítulo 3. Sua segunda seção intitula-se "características importantes da função do 1º grau". (Função não tem grau e a boa norma gramatical manda escrever "primeiro grau".) Ora, a principal característica de uma função afim f é que a acréscimos iguais dados a x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$. Noutras palavras, $f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h mas não de x. Várias considerações interessantes, e bastante motivadoras para os alunos, podem ser feitas a partir deste fato (que, de resto, é realmente característico, ou seja, exclusivo das funções afins). Mas este aspecto essencial não é mencionado.

A função linear, $f(x) = ax$, com a desnecessária restrição $a \neq 0$, é mencionada mas não se diz que ela é o modelo para as questões de proporcionalidade, fundamentais em toda a Matemática. Aqui poderia ser explicado o significado da regra de três. E caberia também observar o princípio fundamental da proporcionalidade: $f(nx) = n \cdot f(x)$, com tantas e tão variadas aplicações.

Os exercícios são cada vez mais mecânicos.

O gráfico de uma função afim é uma reta. Isto afirma o livro. O leitor gostaria de saber por que. Mas não saberá, a menos que tenha outra fonte de informação.

O livro segue o mau costume de dizer que uma reta intercepta outra. O correto é intersectar.

Este capítulo contém 51 gráficos de funções afins. Em todos eles há uma preocupação sobre o ponto em que a reta "intercepta" o eixo x. Mas não há uma só observação ou um comentário sobre os significados geométricos dos coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$. Não se observa que b é a ordenada do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo y, ou seja, $b = f(0)$. E (nem ao menos para justificar a expressão "coeficiente angular") não se chama a atenção para o fato de que o valor de a determina a inclinação do gráfico em relação ao eixo x.

Várias páginas são dedicadas ao estudo do sinal da função $f(x) = ax + b$. Olhar para os gráficos é educativo e deve ser aconselhado ao aluno. Mas o (único) método apresentado para estudar esse sinal é bem mais complicado do que deveria. Bastaria observar que

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow \begin{cases} x > -b/a & (\text{se } a > 0) \\ x < -b/a & (\text{se } a < 0) \end{cases} . \quad \text{Só isso.}$$

O ponto crucial é que, na altura da página 87, quando está estudando inequações do primeiro grau, o livro ainda não mencionou (nem mencionará jamais) as propriedades de monotonicidade: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, $a < b \Rightarrow ac < bc$ $(c > 0)$, $a < b \Rightarrow ac > bc$ $(c < 0)$. Sem essas propriedades, que são fundamentais e indispensáveis, resolver inequações é impossível. O livro usa o artifício do gráfico e com isso parece evitá-las. Mas, na verdade, a monotonicidade está implícita no fato de que $f(x) = ax + b$ é crescente ou decrescente conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Além disso, o método apresentado no livro é bem mais trabalhoso do que o bom senso indicaria. Por exemplo (V. página 87), bastaria escrever:

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3/2. \qquad \text{Só.}$$

A trabalheira desnecessária e desmotivada continua por mais 14 páginas. Não há um único exercício que se refira a uma situação real, onde o conhecimento (?) adquirido no capítulo seja usado para resolvê-lo. Então completa-se o julgamento do leitor: além de sem graça, autoritária e desmotivadora, a Matemática serve apenas para resolver problemas de Matemática. É claro que isto é muito longe de ser verdadeiro mas esta é a imagem que fica quando se estuda Matemática desta maneira.

Capítulo 4. Função polinomial do 2º grau

Este capítulo tem o mérito de mostrar que é possível escrever 40 páginas sobre um assunto sem dizer praticamente nada sobre o mesmo. Continuando o estilo dos capítulos anteriores, as afirmações feitas nunca são justificadas, os fatos mais relevantes e básicos sobre as funções quadráticas são omitidos, os exercícios são quase todos de natureza manipulativa e nunca o leitor é induzido ou solicitado a raciocinar.

Uma vez definida uma função quadrática, o livro apresenta imediatamente seu gráfico, que chama de parábola, e em seguida passa a tirar todas as suas conclusões a partir das propriedades da parábola.

Acontece, porém, que o leitor não sabe o que é uma parábola; esta curva nunca foi estudada nas séries anteriores nem o livro a define aqui. E, mesmo que a definição tivesse sido dada, quem ou o que garante que o gráfico de uma função quadrática é mesmo uma parábola?

Na página 107 está dito que a concavidade da parábola, gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, está voltada para cima ou para baixo conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Por quê? E, como parábola nunca foi definida, quem garante que uma dessas curvas não tangencia o eixo x e depois volta a cortá-lo? Quem assegura que existe um eixo de simetria da parábola? E o que é mesmo eixo de simetria? Se ele existe, por que deve ser vertical? Por que a abscissa do vértice da parábola é a média aritmética das raízes? E se não houver raízes, como se justifica que $x_v = -b/2a$?

Dissemos acima que *quase* todos os exercícios são manipulativos. Há exatamente cinco que se referem a situações reais. Na verdade, todos eles são variações triviais do mesmo tema: achar o retângulo de área máxima que tem um perímetro dado. Isto está muito longe de dar a idéia da grande variedade de problemas interessantes que se referem a situações reais e que podem ser tratados via funções quadráticas. Veja-se, por exemplo, o Volume 1 do livro “A Matemática do Ensino Médio”, da Coleção do Professor de Matemática da S.B.M., ou mesmo o livro de Álgebra de Euler, publicado em 1770.

Algumas observações pontuais:

Na página 115, o exercício 4, tirado de um exame vestibular, é irreal. Quem vai construir uma casa tem um terreno, nunca um perímetro da mesma.

Nas páginas 116 e 117, as figuras deixam a impressão de que a imagem de uma função quadrática é um intervalo limitado. E por que descrever essa imagem por meio de uma desigualdade, sem usar a notação de intervalo? Afinal os intervalos foram introduzidos para quê? E quem garante que todos os números daquele intervalo são de fato valores da função?

O estudo dos sinais da função quadrática, que seria extremamente simples se fosse apresentada a forma fatorada, é feito de modo inconclusivo, com base num único exemplo. A resposta poderia ser dada em poucas palavras: $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem o mesmo sinal de a quando x está fora do intervalo das raízes e assume sinal oposto ao de a quando x está entre as raízes.

É muito grande a lista de tópicos importantes sobre funções quadráticas que foram omitidos neste capítulo. Em vez de abordar esses temas fundamentais, perdeu-se um tempo enorme com inutilidades como inequações-produto, inequações-quociente, etc.

Para finalizar o capítulo, umas figuras ilustram as seções cônicas, a quarta delas deixando a impressão de que a hipérbole é a interseção de um cone duplo com um plano que deve ser paralelo ao eixo, o que não é necessário.

Capítulo 5. Função exponencial

Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $f(x+h)/f(x) = c$ depende apenas de h mas não de x. Estas propriedades fundamentais são responsáveis pela importância da função exponencial, tendo em vista a grande variedade de situações na vida real em que grandezas variam segundo essas normas. O presente capítulo, além de não chamar a atenção para estes fatos, nem ao menos menciona que a função exponencial é monótona e que $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ para quaisquer x, y reais. Em vez disso, a atenção do livro é voltada inteiramente para equações e inequações exponenciais, tratadas de um ponto de vista meramente manipulativo, sem observações interessantes nem conclusões inteligentes.

O capítulo começa, como era de esperar, estendendo a noção de potência de um número positivo para o caso em que o expoente é um inteiro, um número racional ou um número real qualquer. As duas primeiras extensões são feitas por decreto, sem preocupação alguma de explicar por que foram escolhidas essas definições e não outras. As propriedades operatórias, como $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$, são mencionadas de passagem, sem justificativa alguma no caso de expoentes inteiros e aceitas como válidas, sem comentário adicional algum, para expoente racional. Nem ao menos se observa que se $r = m/n$, a definição de $a^{m/n}$ depende apenas do número racional r e não da fração que o representa.

Pior ainda é o caso de expoente irracional. É mencionado o exemplo 3^π, de forma inconclusiva e ambígua. Com efeito, os termos de qualquer seqüência crescente de números menores do que 3^π se aproximam de 3^π e se aproximam também de 20, de 45 ou de qualquer outro número maior do que 3^π. A noção de valores aproximados de um número real precisa de ser melhor explicada. Além disso, aqui seria uma boa ocasião de usar a calculadora e exibir, não apenas o valor de 3^π com algumas casas decimais exatas, como também os valores de $3^{3,14}$, $3^{3,141}$, $3^{3,1415}$, etc. para mostrar como efetivamente eles podem tornar-se tão próximos de 3^π quanto se deseje.

Não tem cabimento fazer como no livro: estudar equações exponenciais antes da função exponencial. As equações exponenciais são resolvidas com base na injetividade da função exponencial e as inequações se baseiam em sua monotonicidade. Outra propriedade essencial para resolver equações e inequações exponenciais é a regra $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Esta relação não é mencionada embora seja usada repetidamente. Antes de traçar o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ (digamos com $a > 1$), vários fatos precisam ser estabelecidos. Em primeiro lugar, como dissemos acima, f é crescente. Além disso, f é ilimitada superiormente e, para valores negativos de x, com $|x|$ muito grande, a^x pode tornar-se tão próximo de zero quanto se queira. Isto significa que o eixo x é uma assíntota desse gráfico. Nada disso é mencionado. Outro fato de suma importância que se pode verificar no gráfico (digamos de $f(x) = 2^x$, que fica mais fácil) é que cada vez que se aumenta a abscissa de uma unidade a ordenada fica multiplicada por a. Esta propriedade, que faz a conexão entre a função exponencial e as progressões geométricas, tem grande relevância nas aplicações. Por exemplo, se uma população dobra em 12 anos, por quanto fica multiplicada em 6 anos? (Resposta: por $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$).

Não se admite que uma exposição sobre a função exponencial não mencione a meia-vida de uma substância.

Os exercícios de aplicação são poucos e, com a exceção de dois, já trazem as fórmulas nos seus enunciados. As duas exceções falam de crescimento de bactérias. São ambas bem triviais. Dezenas de outras aplicações com perguntas bastante provocativas não são tratadas.

O número e (chamado num exercício "número de Neper") é apresentado como 2,718 apenas, sem maiores comentários.

Capítulo 6. Função logarítmica

Dada a igualdade $x^y = z$, o livro afirma, na página 169, que a operação de obter x quando y e z são conhecidos chama-se radiciação e se ilustra isto com a equivalência $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$. Nesta mesma ordem de idéias, se $x^{\sqrt{2}} = 3$

então $x = 3^{\sqrt{2}/2}$. Mas não é costume chamar $3^{\sqrt{2}/2}$ de uma raiz de 3 com índice $\sqrt{2}$.

O logaritmo de número $b > 0$ na base a, onde $0 < a \neq 1$, é definido como o expoente c tal que $a^c = b$. Correto, desde que se saiba que c existe e é único, seja qual for $b > 0$ dado. Isto significa que a função $f(x) = a^x$ é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e o intervalo $(0, +\infty)$. Para que se falou em bijeção antes se no momento em que vai ser usada ela é omitida?

Depois de manipular longamente os logaritmos, o livro define a função $\log_a x$ como a inversa de a^x. Demorou mas fez algo correto. Se tivesse feito isso antes teria ajudado o leitor a entender melhor as propriedades dos logaritmos.

A propósito, a propriedade $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$, que equivale a $(a^u)^v = a^{uv}$ é "provada" sem que esta última igualdade tenha sido mencionada antes, nem verificada pelo menos no caso em que u e v são racionais.

Fatos essenciais, que todos os usuários de logaritmos e de exponenciais têm em mente quando empregam estas funções, são passados ao largo. Teria sido interessante comentar como o crescimento exponencial é rápido e, em contraste, como é lento o crescimento logarítmico. Já que se estudaram as inequações logarítmicas, poderia ser posto o problema de determinar $x > 0$ de modo que $\log_{10} x < \sqrt{x}/1000$, e esboçar o gráfico correspondente a este problema.

O capítulo termina melancolicamente com dez páginas dedicadas ao cálculo de logaritmos decimais usando tábuas, inclusive (exerc. 66, pág. 197) propondo obter o valor de certas expressões numéricas usando logaritmos. Há décadas que este tipo de questão perdeu o sentido diante das calculadoras, muito mais rápidas e eficientes.

Capítulo 7. Função modular

Este capítulo, felizmente com apenas 10 páginas, é precedido de uma nota histórica repleta de generalidades vazias, que nada têm a ver com os assuntos tratados no livro e que em nada contribuem para a formação do aluno-leitor.

Os gráficos do exercício resolvido que começa na página 209 estão todos errados. A tangente à curva na origem deve ser horizontal. O erro é mais flagrante no último gráfico.

O capítulo, que poderia muito bem estar colocado no início do livro, trata de funções reais definidas como combinações de módulos de outras funções. Vários gráficos são traçados mas na hora de resolver equações e inequações que ficariam muito mais claras com seu uso, eles não são empregados. Um ponto a favor do livro é que o tema é tratado com a brevidade que merece. Um ponto negativo é a ausência de exercícios interessantes que façam uso da função modular.

Capítulo 8. Progressões

A primeira seção do capítulo trata da noção geral de seqüência. Embora todos os exemplos dados e todos os exercícios, tanto resolvidos como propostos, exibam seqüências em que o n-ésimo termo é definido como uma função de n, a definição de seqüência é dada como "um conjunto cujos elementos são considerados numa certa ordem".

Há pelo menos dois erros nesta definição. Em primeiro lugar, uma seqüência não pode ser um conjunto porque um conjunto com todos os elementos iguais é um conjunto de um só elemento, enquanto várias seqüências diferentes, como (a, a), (a, a, a), (a, a, a, a) podem ser formadas usando-se um único elemento a. Em segundo lugar porque o fato essencial a respeito de uma seqüência é que cada um dos seus termos ocupa uma posição determinada por um *número natural*. Assim, por exemplo, o conjunto dos números reais tem seus elementos "considerados numa certa ordem", como prescreve o livro, mas não é uma seqüência. A definição correta é a seguinte:

Uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais de 1 até n (seqüência finita, com n termos) ou o conjunto de todos os números naturais $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (seqüência infinita).

A definição de progressão aritmética (P.A.) é precedida do exemplo concreto $(2, 5, 8, 11, \ldots)$, em que a seqüência é infinita mas, após a definição, é dito que uma P.A. é representada na forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde n é o número de termos. Afinal, admite-se ou não uma P.A. infinita? Deveria admitir.

As definições de P.A. crescentes e decrescentes ($r > 0$ ou $r < 0$), embora corretas, não se adaptam ao caso geral de uma seqüência. Por que não dizer simplesmente $a_n < a_{n+1}$ e $a_n > a_{n+1}$ respectivamente? O sinal de r é conseqüência.

Não é feita figura alguma ilustrando que os termos de uma P.A. são igualmente espaçados sobre uma reta. Nem é apresentado o gráfico de uma P.A. onde seus termos seriam pontos alinhados no plano. A primeira figura deixaria claro o significado da interpolação aritmética e a segunda mostraria uma conexão importante com um assunto já estudado no Capítulo 3: uma P.A. é meramente a restrição de uma função afim ao conjunto dos números naturais $\{1, 2, \ldots, n\}$ ou ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Por que será que os autores de livros didáticos brasileiros, que insistem em incluir o zero entre os números naturais, incorrendo no mau gosto de escrever $\mathbb{Z}_+^*$ em vez de $\mathbb{N}$ para representar o conjunto $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, por que será que esses autores excluem o zero entre os índices de uma seqüência? Justamente quando sua presença contribuiria para simplificar as fórmulas, o zero é afastado.

A verdade é que P.A.'s são pouco interessantes. Elas consistem simplesmente em saltos consecutivos sobre uma reta, todos com o mesmo comprimento r. O único fato a seu respeito com algum interesse é a soma dos seus termos, que aliás resulta imediatamente do caso particular $1+2+\cdots+n$. (O qual, embora seja o exemplo mais importante, não é mencionado no livro.) Merece menção também, pela elegância, o fato de que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. (Isto é relegado a um exercício proposto no livro.)

A fórmula da soma dos termos de uma P.A. é deduzida mas a expressão de S_n em função de n não é tornada explícita, perdendo-se assim a oportunidade de estabelecer uma conexão entre P.A.'s e funções quadráticas.

Progressões geométricas (P.G.) são mais interessantes, devido à variedade de situações em que ocorrem, como por exemplo, Matemática Financeira, Desintegração Radioativa, Crescimento Populacional, etc.

Agora a notação do livro salta para o outro extremo: todas as P.G.'s são indicadas sob a forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ logo são infinitas, mas nos exercícios não são, mas na página 241, na fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ do termo geral, n é chamado o número de termos.

Nem olhando esta fórmula o livro se dá conta de que uma P.G. é a restrição de uma função $f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$, do tipo exponencial, ao conjunto dos números naturais $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Esta conexão é importante, entre outras coisas porque mostra não ser coincidência que os problemas científicos e financeiros onde se usam funções do tipo exponencial são os mesmos nos quais se podem usar, alternativamente, progressões geométricas.

A fórmula da soma dos termos de uma P.G. é deduzida, inclusive no caso de infinitas parcelas, onde ocorrem algumas imprecisões e omissões. Em primeiro lugar teria sido necessário explicar que, na verdade, não há somas infinitas. Com cautela, boa vontade e alguma inspiração, pode-se transmitir a mensagem de que se trata de um valor limite, do qual as somas parciais podem tornar-se tão próximas quanto se desejem. Em segundo lugar, não basta simplesmente declarar que, se $-1 < q < 1$, a expressão q^n tende a zero quando n tende ao infinito. O que significa isto? E por que isto é verdade? Nem uns exemplos para ilustrar?

Mais uma vez um capítulo (desta feita o livro) termina de forma melancólica. A fórmula do produto dos termos de uma P.G. é uma grande inutilidade. E o símbolo de somatório, embora deva ser parte integrante da notação matemática com a qual o estudante deve familiarizar-se, não enriquece o estudo das progressões.

Algumas conclusões

O livro é bem apresentado, diagramado e ilustrado. Também é extremamente pobre em teoria e em exercícios. Não enfatiza a estrutura lógico-dedutiva da Matemática. Não há nenhum rigor matemático, ao contrário do que se afirma na

Apresentação. Não há clareza no que seja uma definição de um conceito, ou uma conseqüência de fato anterior. Resultados importantes são impostos peremptoriamente e muitos são omitidos. Os exercícios são quase sempre elementares e exclusivamente manipulativos. Não estimula a criatividade e nem proporciona situações instigantes ao aluno, ao contrário do que se afirma na Apresentação. São raros os exercícios contextualizados e, mesmo assim, os que aparecem, ou são totalmente elementares ou já fornecem a fórmula pronta. Não caracteriza as funções. Não ensina a modelagem de um problema por meio da função adequada. Não faz conexão entre assuntos do livro, nem com temas de outras áreas da Matemática ou de outras matérias. Portanto, é difícil aceitar que a Matemática oferecida no livro forneça "condições para a busca da compreensão do mundo", como está escrito na Apresentação do livro.

Benigno e Cláudio

Matemática, aula por aula – volume 2

Este segundo volume da coleção, com 352 páginas, trata de Trigonometria, Álgebra Linear (matrizes, determinantes e sistemas lineares), Análise Combinatória, Probabilidades e Geometria Espacial. Como no primeiro volume, a parte conceitual é deficiente, as manipulações são inexpressivas e as aplicações realísticas inexistem. O leitor não é levado a raciocinar, a tomar decisões nem a usar a imaginação. Os resultados lhe são apresentados como fatos consumados, sem motivação ou justificativa. Isto é mais patente ainda no capítulo final, que se refere à Geometria.

Passemos ao exame pontual do livro.

Trigonometria

Este capítulo inicial tem 108 páginas. Ele começa com a trigonometria do triângulo retângulo. E bastante razoável que, antes do estudo das funções trigonométricas, se faça uma apresentação elementar da Trigonometria propriamente dita, ou seja, senos, cossenos e tangentes dos ângulos de um triângulo. Com isso, adia-se um pouco a questão de medir ângulos de muitas voltas, até que o manejo das propriedades e usos desses novos conceitos seja praticado. No âmbito dos triângulos, sen, cos e tg são funções cujo domínio é o conjunto dos ângulos planos (um ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem) e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais. Para saber o que significa $\operatorname{sen}\widehat{A}$, não há necessidade de medir o ângulo $\widehat{A}$. Quando escrevemos $\operatorname{sen} 30°$, por exemplo, estamos querendo dizer o seno do ângulo que mede 30 graus, mas o número 30 é usado apenas para identificar o ângulo.

Por outro lado, não é razoável restringir-se aos ângulos agudos, como faz o livro, talvez com escrúpulos de considerar alguns cossenos negativos. Escrúpulos injustificáveis. Se tivessem sido incluídos os ângulos obtusos, como seria natural, teríamos uma introdução que permitiria aplicações interessantes e realísticas, como o cálculo da distância entre dois pontos inacessíveis numa cidade ou no campo. Como foi feito no livro, as aplicações são todas banais.

Um defeito que permeia o livro (e toda a coleção), desde a primeira página até o fim, é que as definições e as proposições são enunciadas e destacadas da mesma maneira. O leitor nunca é avisado se os autores estão afirmando que um fato é verdadeiro ou se estão dando nome a um conceito.

Na seção inicial (trigonometria no triângulo retângulo) $\operatorname{sen}\widehat{A}$ é definido a partir de um triângulo retângulo do qual $\widehat{A}$ é um dos ângulos agudos. Mas a observação fundamental, de que o valor de $\operatorname{sen}\widehat{A}$ é o mesmo, seja qual for esse triângulo retângulo, nunca é feita. Este fato, de importância essencial, não só deveria ser mencionado como precisaria ser destacado a fim de deixar claro que a base da Trigonometria é a semelhança de triângulos. Ainda nesta seção, não é observado que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ nem que $\operatorname{tg} = \operatorname{sen}/\cos$, fatos que ajudariam em muitos exercícios interessantes (se os houvesse).

Ainda na seção inicial, o destaque, os exemplos e os exercícios se referem sempre a ângulos de 30, 45 e 60 graus. Um leitor atento notaria (cheio de razão) que não há necessidade alguma de Trigonometria para esses casos; bastam conhecimentos extremamente elementares de Geometria Plana. Aqui se perde a ocasião de salientar o significado da Trigonometria, conforme foi criada. Seu interesse provém da elaboração de uma tábua (função) com os valores dos senos e cossenos dos vários ângulos, tábua essa cuja validade é assegurada pela semelhança de triângulos e cuja utilidade se revela principalmente quando os ângulos considerados não medem 30, 45 nem 60 graus.

Na seção 2 do capítulo de Trigonometria tem início a tarefa de definir seno, cosseno, tangente, etc. como funções de uma variável real. Antes de analisar como isto é feito, salientemos que o livro não se preocupa em compatibilizar as novas definições com as anteriores. Ao lado do seno e do cosseno definidos na seção 1, temos outros introduzidos agora de modo diferente. Quando é preciso, usa-se um ou outro. Afinal de contas, se levam o mesmo nome devem ser iguais. Pior é a tangente, que tem três definições diferentes e nem ao menos se avisa que elas conduzem ao mesmo resultado.

A fim de dar significado à expressão $\operatorname{sen} x$ quando x é um número real qualquer, é necessário associar a cada $x \in \mathbb{R}$ um ângulo, de modo que $\operatorname{sen} x$ seja o seno daquele ângulo. A maneira mais conveniente de fazer isso é considerar a função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$, cujo contradomínio é a circunferência C de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Para cada $x \in \mathbb{R}$, o ângulo que corresponde ao número x é o ângulo do semi-eixo positivo das abscissas com a semi-reta que vai da origem ao ponto $E(x) \in C$. Então $\operatorname{sen} x$ é a ordenada e $\cos x$ é a abscissa do ponto $E(x)$. Noutras palavras, tem-se $E(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. A função de Euler é definida enrolando a reta $\mathbb{R}$ sobre a circunferência C de modo que o zero caia sobre o ponto $(1, 0)$. Essas coisas podem ser explicadas a nível da segunda série do Ensino Médio, de modo honesto e claro. Infelizmente os livros didáticos em uso no país fazem grande confusão sobre o assunto.

No presente caso, o livro começa medindo arcos de uma circunferência mas não esclarece nunca que a mesma unidade de medida (por exemplo, um grau) é representada por arcos de tamanhos diferentes em circunferências de diferentes raios. Logo não estamos medindo arcos e sim os ângulos centrais por eles subtendidos.

Não é esclarecida a diferença entre essa medida de um arco e o comprimento do mesmo (que é mencionado e usado). Aliás não se diz o que é o comprimento de um arco. O radiano é definido como medida de arcos mas é usado também como medida de ângulos, sem justificativa. Não é dito que duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes (sendo a razão de semelhança igual à razão entre seus raios). Isto é essencial mas é omitido, embora uma regra de três seja montada na página 23 para transformar graus em radianos e, na página 24, para relacionar radiano com comprimento. O leitor nunca é advertido de que as regras de três só valem quando há proporcionalidade e, em Geometria, isto significa semelhança.

Não se calcula quantos graus tem um radiano nem quantos radianos mede um grau.

Nos exercícios e nos exemplos, todas as medidas em radianos são múltiplos racionais de π. Não se fala em seno de 3 rad, por exemplo.

A partir da página 28 são mencionados arcos como o de $480°$, sem que tenha sido dito antes o que significa isto. Falta a função de Euler.

Talvez um dos co-autores do livro não tenha lido o que o outro escreveu, pois na página 31 está escrito: "Já vimos que podemos associar a cada ponto de um eixo um único número real e vice-versa". Mas a correspondência entre $\mathbb{R}$ e os pontos de um eixo não foi estabelecida no Volume 1. Aliás, a palavra "eixo" nunca é definida no livro.

As funções $\operatorname{sen}, \cos \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não estão bem definidas, pois a unidade de medida de ângulos não foi fixada. Por exemplo, quando se diz que o período da função sen é 2π, tacitamente se admite que a unidade é o radiano. Se for o grau, o período é 360.

As funções cotangente e, principalmente, as funções secante e cossecante, deveriam ter seus gráficos exibidos como as demais tiveram.

"Arcos replementares" é uma terminologia esdrúxula, que matemáticos não usam mas já ouviram falar quando eram crianças. Mas "arcos explementares"? Tenham paciência...

As fórmulas do seno, cosseno e tangente de uma soma e de uma diferença são estabelecidas corretamente, mas são aplicadas apenas para calcular o seno, o cosseno e a tangente de somas e de diferenças... Na página 66, obtém-se

$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ e na página 71 vê-se que $\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Não caberia aqui um comentário? Também caberia um comentário na página 70 sobre o duplo sinal do cosseno do arco metade. As fórmulas da transformação em produto servem apenas para resolver problemas que poderiam ser facilmente resolvidos sem elas (como o exercício resolvido na página 81). Elas são um resquício do tempo em que se usavam logaritmos para efetuar cálculos. Hoje em dia, se alguma serventia possuem, seria a de lê-las da direita para a esquerda. Transformando um produto em soma fica mais fácil calcular certas integrais. E mesmo estas já estão todas arquivadas em aplicativos bem divulgados.

Eis um exemplo de frase muito mal redigida (pág. 82): "O semi-plano localizado acima da reta r forma, na interseção com o ciclo, as imagens dos reais x, sendo $\operatorname{sen} x > m$". (Frases análogas encontram-se às páginas 83 e 85.)

Um ponto positivo neste capítulo: são apresentados os gráficos das funções arcsen, arccos e arctg. Isto é essencial mas os livros congêneres não o fazem.

O capítulo de Trigonometria termina com a lei dos senos e a lei dos cossenos. Ficou faltando aplicar essas fórmulas para estudar a resolução geral dos triângulos: dados três elementos, sendo pelo menos um deles um lado, determinar os outros três. E, a partir daí, resolver interessantes problemas de aplicação.

Em nenhuma ocasião o leitor é solicitado a usar uma calculadora ou é informado de sua indispensabilidade. Isto seria inevitável se lhes fossem propostos problemas reais, nos quais nunca aparecem os ângulos de 30, 45 e 60 graus.

Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares

Esses três capítulos consecutivos, que examinaremos em conjunto, tratam de assuntos que se enquadram no contexto da Álgebra Linear. Esta disciplina, que ocupa uma posição central na Matemática de hoje, abrange três aspectos: o geométrico, o algébrico e o numérico (ou computacional). A abordagem do livro segue a mesma linha dos seus congêneres brasileiros e dificilmente se poderia imaginar um modo pior de expor esses assuntos.

Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, que deveria ser o centro das considerações desses três capítulos, é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física. Com isto, fica impossível olhar para tais assuntos do ponto de vista geométrico, perdendo-se assim um importante aliado do bom entendimento, que é a intuição espacial. Fica-se também impedido de falar das transformações geométricas simples que abundam em nosso dia-a-dia, como rotações, translações e dilatações ou contrações (mudanças de escala), as quais dariam um significado concreto à noção de matriz e às operações entre matrizes, principalmente a multiplicação.

Em vez disso, as matrizes são introduzidas como objetos caídos do céu. As poucas tentativas de motivá-las não convencem pois não têm conteúdo matemático significativo. Tem-se uma série de definições arbitrárias, com exemplos infantis e desligados da realidade, culminando com a multiplicação de matrizes, definida de modo peremptório, sem desculpa nem justificativa e — o que é pior — muito confusamente explicada neste livro.

Aqui, a riqueza de situações novas e interessantes ligadas à multiplicação de matrizes é deixada de lado, mencionando-se apenas a não-comutatividade, ilustrada com um único exemplo, como se fosse algo esporádico, quando está muito mais perto de ser a regra do que a exceção.

A matriz inversa é definida e tratada como se toda matriz quadrada fosse invertível. Não é dado um só exemplo ou proposto um exercício em que a inversa não exista. Todas as matrizes das quais se menciona a inversa são 2×2, de modo que fica a impressão de que calcular A^{-1} é um trabalho imediato.

São 20 páginas sobre matrizes. Ao começar sua leitura, o aluno não recebe nenhuma indicação sobre o rumo que vai seguir e, ao terminar, não tem idéia de onde chegou. Na verdade, não chegou a lugar algum.

Seguem-se 25 páginas sobre determinantes, escritas de modo bastante desorientado. O capítulo abre com essa frase: "Determinante de uma matriz quadrada é um número real que associamos a essa matriz segundo algumas regras". Claro está que dizer isso ou não dizer nada dá no mesmo. Mais grave é que o capítulo não contém nenhuma definição de determinante que seja mais esclarecedora do que esta. O mais próximo daquilo que poderia ser considerado como uma definição é apresentado como um teorema. ("Teorema de Laplace", página 140.) Presumivelmente, se é um teorema, deve admitir uma demonstração, ainda que omitida aqui. Mas como seria possível provar algo se não se sabe o que é um determinante nem quais são suas propriedades?

O enunciado do Teorema de Laplace poderia ser tomado como uma definição indutiva de determinante (o que não foi feito). Mesmo assim restaria o ônus de provar que a linha ou coluna que se toma para fazer o desenvolvimento não influi no resultado. E, como ocorre muitas vezes no livro, o próprio enunciado do Teorema de Laplace é defeituoso, não ficando claro que uma linha ou coluna foi escolhida e manteve-se fixada.

São calculados vários determinantes 3×3 usando-se a regra de Sarrus. Em seguida, alguns determinantes 4×4 são obtidos via Laplace, sendo de observar que em todos os exemplos e exercícios propostos, as matrizes 4×4 cujos determinantes vão ser calculados têm sempre dois ou três zeros numa mesma linha ou coluna. Com isto, esconde-se o fato de que o desenvolvimento de Laplace é um processo de cálculo extremamente penoso e demorado.

São enunciadas (mas não demonstradas) sete propriedades do determinante. Várias delas são conseqüências imediatas das outras, mas isto não é observado. O mais importante não é dito: o determinante depende linearmente das linhas (ou colunas) da matriz, anula-se quando duas dessas linhas (ou colunas) são iguais e assume o valor 1 na matriz identidade. Todas as outras propriedades são conseqüências destas porque o determinante é a única função de matriz que cumpre essas condições.

Na página 149 é definido o conceito de combinação linear de números reais (mas não de vetores) e logo em seguida se fala em combinação linear de linhas sem defini-la.

Nenhuma afirmação feita neste capítulo é provada ou pelo menos tornada plausível.

A indefectível bobagem conhecida como Regra de Chió fornece um final merecedor para essa apresentação dos determinantes.

Deveria ficar claro para todos os autores de livros didáticos em nosso país que os determinantes são extremamente ineficazes como instrumentos de cálculo com vistas aos sistemas lineares. Computacionalmente, eles são razoáveis até a ordem 3×3. A partir daí se tornam impraticáveis. Para que se tenha uma idéia, um computador que efetue um milhão de multiplicações por segundo (desprezando inteiramente o tempo usado para adições e subtrações), empregando o desenvolvimento de Laplace, levaria 134.149 anos (funcionado 24 horas por dia) para calcular o determinante de uma matriz 20×20.

Então determinante é uma noção inútil? Não. Do ponto de vista algébrico ele é importante pois é (a menos de um fator constante) a única função multilinear alternada das linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada. Ele fornece, portanto, um critério numérico para abordar noções sutis como a orientabilidade. Em virtude de suas propriedades características $\det A \neq 0$ é condição necessária e suficiente para que as linhas (ou colunas) da matriz A sejam linearmente independentes. Do ponto de vista geométrico, seu valor absoluto é igual ao volume do paralelepípedo cujas arestas são seus vetores-linha. Conseqüentemente, do ponto de vista analítico, os determinantes jacobianos ocorrem na fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas. Portanto determinantes desempenham papel fundamental na Álgebra, na Geometria e na Análise.

O erro que se comete no ensino de Matemática neste nível em nosso país é olhar para o determinante como um auxiliar para a resolução de sistemas lineares, via Regra de Cramer. Um sistema 20×20 resolvido por meio dessa regra, usando-se o desenvolvimento de Laplace para calcular os 21 determinantes, com auxílio do computador mencionado acima, levaria 2 milhões, 754 mil e 140 anos para ser resolvido. O mesmo sistema, no mesmo computador, sendo resolvido por escalonamento, demoraria 6 milésimos de segundo!

A definição de solução de um sistema linear é imprecisa e ininteligível. A linguagem usada para definir equação linear e sistema linear homogêneo é inadequada. "Consideramos como" não tem o mesmo significado que "chamamos de". (Páginas 168 e 169.) Ainda na página 169 é feita a afirmação peremptória: "Um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções além da trivial". Mas não é dado exemplo algum deste fato, nem sequer nos exercícios. O curioso é que o único exemplo de sistema homogêneo dado em todo o livro (logo acima da afirmação) admite soluções não-triviais como $(-9, 7, 1)$, por exemplo. Por que não dizer isso e acabar o mistério?

Em nenhum lugar se diz, prova ou torna plausível o fato de que um sistema linear não pode admitir um número finito > 1 de soluções.

A Regra de Cramer é chutada tranqüilamente. Não se dá a menor indicação de que ela deve e pode ser provada. E mais: o significado dos determinantes que nela ocorrem é muito mal explicado, como de resto acontece com as definições em outras partes do livro. Uma agravante: a Regra de Cramer é apresentada como um método "bastante prático" para resolver sistemas lineares. Não se pode deixar de conjeturar quantos sistemas lineares 20×20 os autores dessa afirmação já resolveram usando esse método "bastante prático".

Ao apresentar a classificação dos sistemas lineares são feitas, como de hábito, várias afirmações não justificadas.

O método do escalonamento é empregado em vários exemplos mas, como sempre, a descrição geral (e preliminar) do método é mal redigida.

Nas 70 páginas compreendidas por esses três capítulos há um único problema contextual, o que não faz justiça à variedade de questões da vida real nas quais os assuntos neles estudados encontram aplicações. No todo, tem-se uma exposição desinteressante, desmotivada, desconexa e dispersiva de um conjunto de tópicos relevantes porém mal apresentados.

Análise Combinatória e Binômio de Newton, Probabilidade

Estes são os títulos de dois capítulos. É estranho o destaque dado ao binômio de Newton, pois se trata apenas de uma fórmula, por sinal enunciada sem demonstração.

A Análise Combinatória tem início com uma árvore de possibilidades que deveria servir para ilustrar o princípio fundamental da contagem. Mas, de acordo com o estilo do livro, a apresentação da árvore é incompreensível.

Da primeira lista de exercícios consta a pergunta: "de quantos modos 3 pessoas podem sentar num sofá de 5 lugares?". A resposta certa é $3! = 6$ e não 60 como está no livro. Com efeito, sofás não costumam ter lugares marcados. A resposta seria 60 se fossem 3 pessoas em 5 cadeiras.

A linguagem usada no livro é, na maioria das vezes, inapropriada. Por exemplo, para definir fatorial o livro diz: "Considerando um número n, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, temos: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots$, onde: a leitura do símbolo $n!$ é 'n fatorial', $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 até n; estendendo a definição: $0! = 1$ e $1! = 1$." Começando com o *temos*, dificilmente se pode imaginar definição mais confusa e mal redigida. (Pág. 189.)

Na página 190, para achar o número natural x tal que $(x+2)(x+1) = 6$, a multiplicação é efetuada, a fórmula da equação do segundo grau é aplicada, a raiz negativa é desprezada e, finalmente, tem-se $x = 1$. Onde ficou o bom senso? Qualquer criança sabe que dois números naturais consecutivos cujo produto é 6 só podem ser 2 e 3. Fica a impressão de que a Matemática despreza o senso comum e serve para dar soluções complicadas para problemas triviais.

As definições de permutação simples, arranjo simples, combinação simples e permutação com elementos repetidos são mal formuladas, substituindo os termos a serem definidos por outros cujos significados não foram esclarecidos. (Por exemplo, *arranjo simples* é apresentado como um *agrupamento simples*.) As fórmulas correspondentes são impostas sem demonstração.

De repente, o número de combinações de n elementos p a p tem o nome mudado para "número binomial" e a notação $C_{n,p}$ é trocada por $\binom{n}{p}$, sem nenhum motivo ou explicação plausível.

Depois de verificar que $\binom{5}{3} = 10$ e $\binom{5}{2} = 10$, o livro diz: "Note que dois números binomiais complementares são iguais". Que maneira de se ensinar Matemática!

O binômio de Newton é apresentado nos seguintes termos: "Supondo um número natural n, podemos considerar a seguinte expressão: (segue-se a fórmula do binômio)". Ora, não se trata de uma expressão e sim da afirmação de que uma certa igualdade é válida, a qual nada tem de óbvia, logo precisa ser justificada. Além disso, *considerar* uma fórmula não significa que ela seja válida.

Análise Combinatória é muito mais do que arranjos, permutações e combinações. Trata-se de um belo tema matemático, contendo métodos simples porém bastante efetivos que conduzem à solução de problemas intrigantes. É um excelente meio de ensinar os alunos a tomarem decisões acertadas, a usarem a imaginação e a organizarem disciplinadamente seu raciocínio. Nada disso é transmitido nesse capítulo mal orientado, desprovido de exercícios interessantes, onde os fatos são apresentados peremptoriamente e as definições não esclarecem nada.

O capítulo sobre probabilidade tem 13 páginas e consiste nas definições de espaço amostral (finito), evento, probabilidade de um evento (caso equiprovável) e da união de dois eventos, probabilidade condicional e eventos independentes. As definições são seguidas de exemplos óbvios e triviais. As fórmulas são jogadas no colo do leitor sem nenhuma tentativa de torná-las pelo menos aceitáveis. Isto culmina com a distribuição binomial que merece um tratamento de 10 linhas, contendo uma fórmula estranha que o leitor não sabe de onde vem. Os exercícios são todos banais. O capítulo consegue ser mais fraco do que os anteriores. Mas não pior do que o próximo, como veremos.

Geometria Espacial

Este capítulo final tem 100 páginas e nele são repetidos os defeitos já assinalados anteriormente, com acréscimo de alguns novos, como pretender que se está demonstrando um resultado, mediante o uso de fatos não conhecidos do leitor nem apresentados aqui, além de outras deficiências que serão apontadas a seguir.

Se tivéssemos de resumir em poucas linhas o conteúdo deste capítulo, diríamos que ele contém uma apresentação das noções geométricas mais elementares, feita de modo intuitivo, acompanhada das fórmulas para as áreas e volumes das figuras geométricas mais comuns, a nível do que se faz usualmente no curso primário. Para dar um aspecto mais avançado à exposição, alguns postulados são mencionados, de forma ao mesmo tempo redundante, incompleta e desconexa, e algumas deduções são apresentadas, de forma incompreensível ao leitor.

O capítulo começa com uma revisão da Geometria Plana, na qual o ângulo reto é apresentado como aquele que mede 90 graus. (Na melhor hipótese isto seria a definição de grau.) Mais adiante, destaca-se que a soma dos ângulos externos de um quadrilátero é 360°, deixando a impressão de que isto não valeria para outros polígonos. A notação para os ângulos de um triângulo contraria o uso tradicional. Como fazem os livros congêneres em sua maioria, a palavra "interceptar" é usada erradamente no lugar de "intersectar".

É apresentada uma lista de postulados. O primeiro diz que a reta possui infinitos pontos. Este fato nunca vai ser usado explicitamente. Além disso, ele já foi admitido quando se tem a correspondência entre $\mathbb{R}$ e os pontos de uma reta. E, na verdade, dizer que a reta tem infinitos pontos é uma afirmação vaga e inútil. O que se precisa em Geometria é o chamado "postulado da régua", segundo o qual existem sobre uma reta exatamente dois pontos situados a uma distância dada de um ponto dado.

O terceiro postulado (existem infinitos pontos sobre um plano e fora dele) também é inútil, além de redundante. Bastava admitir que o plano tem ao menos dois pontos distintos e que o espaço não se reduz a um único plano.

Com efeito, a reta que une dois pontos de um plano está inteiramente contida nele e possui infinitos pontos. E a reta que une um ponto do plano a um ponto fora do mesmo também possui infinitos pontos, todos eles fora do plano em questão, salvo um.

Nesta ordem de idéias, um postulado que deveria ser citado mas não foi é o de que há 3 pontos não-colineares em cada plano. (Ou, nos termos do livro: há infinitos pontos do plano fora de cada uma de suas retas.)

Estamos mencionando esses defeitos em nome da correção lógica do texto. Temos, entretanto, plena consciência de que, no nível e no estilo em que o livro está escrito, são questões que dificilmente caberiam nele. Ausência mais grave, principalmente porque é um fato que será utilizado nas seções posteriores, é a afirmação de que um plano separa o espaço em dois semi-espaços. Seria necessário apresentar isto como um postulado ou então deduzi-lo como conseqüência do postulado 7 (dois planos distintos que têm um ponto em comum têm também uma reta em comum). Ambos, a separação do espaço por um plano e a interseção de dois planos ser uma reta, caracterizam a tridimensionalidade do espaço.

O livro acompanha a onda dos seus congêneres nacionais e adota a inconveniente convenção de considerar uma única reta como sendo o mesmo que duas retas paralelas coincidentes, critério análogo valendo para planos. Por outro lado, restringe o nome de "ortogonais" a retas reversas. Esses costumes terão que ser abandonados pelos estudantes que forem para a universidade, pois não são adotados em estudos mais avançados.

Para definir prisma, o livro usa semi-espaços, distância entre dois planos e conjuntos convexos, noções que não foram introduzidas antes e que certamente não são do conhecimento do leitor. Afirma que o volume do prisma é o produto da área da base pela altura mas não dá antes disso a definição de volume. Em seguida "prova" a afirmação feita mencionando o Princípio de Cavalieri, que também não foi citado antes e que muito certamente é algo que o leitor nem desconfia do que é.

Além disso, na aplicação desse princípio, usa-se que todas as seções do prisma por um plano paralelo à base têm a mesma área, o que teria de ser provado antes.

A diagonal de um paralelepípedo retângulo é calculada mas não foi definida antes.

Na página 284, o livro menciona "um polígono convexo *qualquer* $ABCDE$". Falta de cuidado na redação. Na mesma página, a definição de pirâmide regular usa a noção de projeção ortogonal, que não fora definida. Além disso, usa "consideramos" como se fosse sinônimo de "chamamos".

Para obter o volume de uma pirâmide, o livro começa exibindo o desenho de um prisma com três pirâmides ao lado. Um leitor atento pode até perceber como essas pirâmides foram retiradas do prisma, mas o texto não ajuda muito para isso. Nenhuma palavra é dita sobre o motivo pelo qual elas têm o mesmo volume, fato que é afirmado com a tranqüilidade de quem diz que dois mais dois são quatro. Mas o pior ainda está por vir. Na página seguinte (288), numa frase em que o sujeito está no singular e o verbo no plural, um fato bem menos óbvio também é afirmado de passagem: se duas pirâmides com a mesma altura e bases com iguais áreas (situadas sobre o mesmo plano) são cortadas por um plano paralelo às bases então as seções são polígonos de mesma área. Este fato requer o uso da semelhança (mais precisamente, homotetia) entre cada seção e a base correspondente. É claro que o leitor não vai entender a dedução da fórmula, principalmente porque em seguida é usado novamente o misterioso (para ele) Princípio de Cavalieri, que resolve tudo num passe de mágica.

Somente duas páginas depois é que se menciona a semelhança entre as seções de uma pirâmide por planos paralelos à base.

A semelhança em questão é estabelecida por decreto e, de igual modo, se conclui que as áreas de polígonos semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, bem como a razão entre os volumes de sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança. Tudo isto é feito de roldão, junto com as áreas laterais, numa confusão capaz de deixar atônito qualquer leitor.

Cilindros e cones têm seus volumes calculados com as mesmas conclusões não justificadas no caso de prismas e pirâmides. No fundo, a impressão que se tem é de que tais pseudodeduções não foram mesmo postas aí para serem entendidas por ninguém; o que interessa são as fórmulas.

A esfera é definida por rotação de um semicírculo sem preocupação de mostrar ao leitor que isto equivale à outra definição: pontos a uma distância $\leq r$ do centro.

A área da esfera é definida (pasmem!) por $A = 4\pi r^2$ e o volume (pasmem outra vez!) é, *por definição*, igual a $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Para completar, a respeito do Teorema de Euler sobre poliedros convexos, o livro "adota como válida" a relação $V - A + F = 2$.

Considerações finais

Após a leitura cuidadosa do livro, estas são as impressões que ficaram: em primeiro lugar, o texto não é redigido de modo a atrair o interesse do leitor. O estilo é impreciso, os fatos são enunciados sem justificativa e as pouquíssimas demonstrações são ininteligíveis, entre outros motivos porque apelam para conhecimentos que o aluno não tem e omitem explicações cruciais. Assim, do ponto de vista conceitual, ele deixa muito a desejar. Quanto aos exercícios, são praticamente todos rotineiros, faltando em todos os capítulos problemas de natureza contextual, que mostre o uso da Matemática em questões relevantes da vida moderna. O leitor não é estimulado a pensar, a usar sua imaginação nem sua criatividade, pois o texto e os exercícios não o induzem a isto. Do ponto de vista didático, os assuntos são lançados de chofre, sem uma motivação prévia; o aluno não é convidado a acompanhar o desenvolvimento dos temas (a menos que ver dois exemplos simples e daí passar bruscamente a uma conclusão muito mais geral sem explicação seja considerado método socrático). Há sérias lacunas nos vários assuntos tratados. Em suma, o livro não educa seu leitor para melhorar o raciocínio nem o habilita a utilizar de modo inteligente e significativo os temas nele abordados de forma a bem exercer sua cidadania.

Benigno e Cláudio

Matemática, aula por aula – volume 3

O terceiro volume desta coleção apresenta os mesmos defeitos dos anteriores. As definições são confusas e, mais geralmente, todo o texto é mal redigido. Um exemplo disso é o verbo "considerar", usado em diversas acepções, nenhuma das quais é correta. Esses defeitos dificultam a leitura, principalmente por parte dos alunos. Mesmo os professores, que têm no livro didático sua principal referência, habituam-se a uma linguagem inapropriada e a processos incorretos de raciocínio. (Por exemplo, na página 137, depois de tratar um único caso particular, o livro diz: "generalizando, temos ..." e afirma a validez geral de uma importante lei matemática, sem maiores preocupações.) A conceituação é deficiente, as manipulações são abundantes, porém pouco interessantes, e as aplicações inexistem. Estes senões, aqui apontados genericamente, serão a seguir abordados de forma específica.

O livro é dividido em sete seções: Geometria Analítica, Polinômios, Limites, Derivadas, Estatística e Matemática Financeira, Revendo o Vestibular.

Geometria Analítica

Esta seção tem 115 páginas e trata de retas, circunferências, elipses, parábolas e hipérboles.

Por simplicidade, precederemos cada um dos nossos comentários de um número que indica a página à qual ele se refere.

(12) As coordenadas de um ponto do plano não são definidas explicitamente. Seus sinais não são explicados. A noção de eixo tampouco é definida.

(19) As coordenadas do ponto médio de um segmento são obtidas sem justificação além de um "observe que". Esta frase autoriza, agora, antes e depois, qualquer conclusão que o livro obtenha.

Uma importante aplicação das coordenadas do ponto médio de um segmento é a relação entre as coordenadas de dois segmentos paralelos, de mesmo comprimento e mesmo sentido, ou seja, obtidos um do outro por translação. Trata-se de um resultado útil, cujo emprego simplificaria e esclareceria muitos argumentos. Mas é inteiramente ignorado aqui. (V., por exemplo, "A Matemática do Ensino

Médio", vol. 3, p. 11.)

(21) O fato de que o baricentro de um triângulo pertence às três medianas e as divide na razão 2 : 1 é usado sem nenhuma explicação adicional. Além de não ser razoável admitir que o leitor saiba isto, perde-se aqui uma excelente ocasião de mostrar como a Geometria Analítica pode ser usada para estabelecer resultados da Geometria Plana.

(23) A condição de alinhamento de três pontos é apresentada por meio de um determinante, surgido não se sabe de onde e descrito de forma confusa a partir da "matriz formada pelas coordenadas dos pontos". São apresentadas três igualdades que caracterizam o alinhamento mas nenhuma delas é a adequada. O modo correto seria observar que A, B e C estão alinhados é quando os segmentos AB e BC estão igualmente inclinados em relação ao eixo OX, isto é, $(y_B - y_A)/(x_B - x_A) = (y_C - y_B)/(x_C - x_B)$. O determinante é um complicador no qual os autores de textos brasileiros se viciaram.

(26) A equação da reta é apresentada (por meio de um determinante) mas nunca se diz o que significa "equação de uma curva" ou de uma reta.

(27) O determinante (que não tem mesmo serventia) é trocado pela equação $ax+by+c = 0$. Os coeficientes a, b e c possuem significados geométricos de grande utilidade, porém estes não são mencionados. Por exemplo: a reta é perpendicular ao segmento OP, onde $P = (a, b)$.

(30) Uma reta não "intercepta" e sim intersecta os eixos.

(33) O coeficiente angular de uma reta é definido como $\operatorname{tg}\alpha$, onde α "é convexo e forma-se no sentido anti-horário". A frase nunca é explicada.

A partir daqui, todas as questões sobre retas se reduzirão ao coeficiente angular. A definição oficial da equação da reta, por meio de um determinante, não tem nada a ver com ângulo, logo é abandonada. Se a ênfase fosse colocada na equação $y = mx + n$, o coeficiente angular já estaria dado desde o início.

(35) Para concluir que o coeficiente angular da reta $ax + by + c = 0$ é $-a/b$, o livro usa um método complicado, além de obscuro, pois faz uso de pontos A e B, que presumivelmente estão sobre a reta mas isto não é dito.

(38) Nesta página, "considerar" significa "concluir que".

(43) A definição de equação paramétrica é incompreensível. O livro deveria dizer qual é a utilidade das equações paramétricas de uma reta e dar exemplos. Não foi mencionado em que condições duas equações paramétricas descrevem uma reta. (Por exemplo: $x = 2t^3$, $y = 5t^3 - 1$.)

No tratamento do coeficiente angular é dado um destaque exagerado ao ângulo α. O importante é $\operatorname{tg}\alpha$, muito mais fácil de obter a partir da equação da reta (que não seja a do determinante). E na prática, o que interessa mesmo é a inclinação $(y_B-y_A)/(x_B-x_A)$. Por exemplo, no Livro dos Recordes de Guinness, a rua mais íngreme do mundo é citada como tendo inclinação 1 : 1. A razão $p : q$ do incremento da altura pelo incremento da distância horizontal é o padrão usado pelos agrimensores. O ângulo α é difícil de calcular e desnecessário.

(44) Aqui "consideradas" significa "denominadas".

(46) Outra vez "consideradas" em vez de "denominadas". A condição de perpendicularismo pode ser facilmente obtida sem Trigonometria. Outra coisa: se as retas forem dadas pelas equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, a importante expressão do perpendicularismo pela igualdade $aa' + bb' = 0$ não é jamais mencionada.

(52) Se fosse usada a equação $ax + by + c = 0$ e o cosseno do ângulo em vez da tangente (como o estudante fará na universidade), não haveria necessidade de tratar separadamente o caso em que uma das retas é vertical. A expressão do cosseno do ângulo entre as duas retas é $(aa' + bb')/(\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2})$. Mais ainda: nas equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ pode-se sempre supor que $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$ e então $\cos\theta = aa' + bb'$. Sem exceções e bem mais fácil. Acontece que os autores de livros brasileiros imitam uns aos outros, por isso perpetuam os defeitos ad infinitum.

(54) Na verdade, estamos escrevendo a equação $ax + by + c = 0$ para ser coerente com o livro. Mas é preferível escrever a equação da reta sob a forma $ax + by = c$, para deixar claro que se trata da linha de nível c da função $\varphi(x, y) = ax + by$. Variando o nível c e mantendo a, b fixos, obtêm-se retas paralelas, todas elas perpendiculares ao segmento OP, com $P = (a, b)$. Esta visão esclarecedora nunca é mencionada em nossos livros, o que é lastimável.

Se o ponto de vista acima fosse adotado, a fórmula da distância de um ponto a uma reta (não "entre" um ponto e uma reta) seria quase óbvia e bastante natural.

(56) A equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ foi, por algum motivo, chamada "equação reduzida" da circunferência. Desenvolvendo-se os dois quadrados e passando r^2 para o primeiro membro, ela passa a chamar-se "equação geral". Não é curioso? O pior não é isso. O grave é que o livro diz $\sqrt{A} > 0$ e $\sqrt{A} < 0$ quando deveria dizer $A > 0$ e $A < 0$. A condição necessária e suficiente para que a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

represente uma circunferência é que se tenha $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 > AF$ e não $\sqrt{D^2 + E^2 - F} > 0$ como erradamente diz o livro. Mas os erros não param aí : de um modo ou de outro o livro prova a necessidade da condição mas passa a usar a suficiência. E tem mais (agora do ponto de vista didático): submete o leitor ao uso sistemático de regras decoradas em vez de usar o método de completar o quadrado.

Completar o quadrado significa simplesmente escrever $x^2+2ax = (x+a)^2-a^2$. Esta observação, aparentemente inofensiva, tem aplicações importantes. No caso em pauta, é a maneira mais natural, direta, livre de memorizações, para constatar se uma dada equação representa ou não uma circunferência. Ela também já deveria ter sido empregada no estudo da função quadrática. Mas é inteiramente ignorada pelos autores de nossos livros didáticos. Talvez a solução seja incluir o completamento do quadrado em algumas questões de vestibular.

(81) Ausências deploráveis nos temas até aqui tratados: feixes de retas, conjuntos definidos por desigualdades no plano; aplicações em problemas simples de programação linear; uso da Geometria Analítica para resolver problemas de Geometria Plana; problemas diversos de aplicação; análise de sistemas lineares por meio das retas representadas por suas equações; equação da circunferência que passa por 3 pontos dados; exercícios que requeiram criatividade. Como foi possível usar 81 páginas para não dizer tanta coisa relevante?

(82) Apolônio é apresentado como "colaborador" das cônicas ... A parábola é descrita primeiro como a secção de um cone por um plano paralelo a uma geratriz e, logo em seguida, como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de foco e da diretriz. Nenhuma preocupação em estabelecer conexão entre essas duas visões, aparentemente tão diversas. Mais ainda: no Volume 1, o gráfico de uma função quadrática foi chamado de parábola porém o livro não parece lembrar-se disso. Era outro tipo de parábola, outra curva com o mesmo nome? Se era o mesmo tipo de curva, qual era o foco? e a diretriz? Nada disso está esclarecido.

A dedução da equação da parábola é incompleta. Prova-se que todos os pontos da parábola satisfazem uma certa equação mas, ao fazer isto, uma igualdade é elevada ao quadrado. Portanto seria cabível indagar se outros pontos, fora da parábola, também satisfazem a mesma equação. Mas o livro não se dá conta desse problema. Mais uma vez, os alunos (e seus professores) são deseducados em relação aos deveres da boa Matemática.

O mesmo erro se encontra nas deduções das equações da elipse e da hipérbole. (No caso da elipse são duas elevações ao quadrado.)

(89) A elipse é apresentada como a secção de um cone por um plano inclinado em relação ao eixo. Definição errada: isto pode dar uma elipse, uma hipérbole ou uma circunferência. Depois "podemos definir" a elipse como o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos focos é constante. Nenhuma preocupação em conciliar as duas abordagens; nem ao menos desculpas por não fazê-lo.

(97) A hipérbole também é definida como secção cônica erradamente: não é necessário que o plano seja paralelo ao eixo de simetria: basta que intersecte as duas bandas do cone.

Os 15 desenhos de hipérbole estão errados.

Não se justifica o fato de que o gráfico da função $y = 1/x$ seja chamado de hipérbole.

Não é dita uma palavra sequer sobre as propriedades de reflexão que têm as seções cônicas, as quais são responsáveis pela utilização dessas curvas em antenas parabólicas (que também empregam hipérboles), radiotelescópios, refletores, etc. Essas aplicações dariam excelentes temas de leitura, para substituir as crônicas "Saiba um pouco mais", usadas entre os capítulos, quase todas sem conexão com o texto do livro e/ou incompreensíveis para o nível dos leitores.

O leitor poderia indagar como é a equação de uma cônica cujos eixos não coincidem com OX e OY ou (no caso da parábola), cujo eixo de simetria não é OX nem OY. Mas ficaria sem resposta porque o livro não dá indicação alguma a esse respeito. Talvez os autores achem que os eixos a gente põe onde quer mas, se for assim, então toda equação da reta é da forma $y = 0$ ou $x = 0$.

Números complexos

Manda a boa didática que cada novo capítulo de uma texto escolar de Matemática comece com um problema que não mencione em seu enunciado o assunto que vai ser estudado ali mas cuja resolução o requeira ou, pelo menos, o empregue de modo substancial.

Quando isso não é feito, por um motivo ou por outro, a introdução ao novo assunto pode ser de natureza histórica, explicando as razões que levaram nossos antepassados a desenvolver aquela teoria.

O que não é aceitável é iniciar uma nova matéria com uma série de definições artificiais, injustificadas, estranhas e jogadas de chofre sobre o leitor-aluno. Pior ainda é usar uma linguagem oblíqua, arrevezada, nessa apresentação.

Ponhamo-nos na posição do aluno. Como aceitar que um par ordenado de números reais, que até agora representava as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, passe a ser chamado de "número complexo", e ainda por cima com uma multiplicação definida de forma estranha, além de arbitrária?

Sob o ponto de vista estritamente matemático, a apresentação é aceitável nas 15 primeiras páginas, salvo o estilo de sempre, com frases sem sentido, como: "A utilização deste novo símbolo [$z = a + bi$] facilita determinar as raízes da equação do segundo grau" (p. 123).

(137) Como já dissemos na introdução, após um único exemplo conclui-se o caso geral da fórmula do produto de números complexos sob forma trigonométrica. Mais ainda: não é apresentada uma figura nem é destacado o importantíssimo significado geométrico desta fórmula. Nem ao menos o significado geométrico da multiplicação por i é mencionado. A nível elementar, a maior justificativa

da introdução dos números complexos é a de que eles permitem tratar algebricamente as rotações e, mais geralmente, as semelhanças de figuras planas. São numerosos, variados e interessantes os exemplos, problemas e aplicações que podem facilmente ser apresentados nesse contexto. Fazer simplesmente um desfile de regras e fórmulas é contribuir para firmar a impressão de que a Matemática que se estuda na escola é, além de aborrecida, inútil e fútil.

(138) A fórmula de de Moivre é chutada, sem explicação nem aplicações.

(140) As raízes n-ésimas de um complexo são mencionadas brevemente. Trata-se de um conceito sutil, que merecia melhor explicação e mais ilustrações. A divisão da circunferência não é mencionada. O único desenho, da raiz cúbica de 8, é muito mal explicado.

(142) Equações binômias e trinômias não merecem o destaque que lhes foi dado. No máximo, um comentário ou um exercício.

Outras ausências estranhas são as interpretações geométricas da adição de números complexos e da conjugação. Isto está relacionado com a omissão dos vetores no ensino da Matemática neste nível. Trata-se de um erro grave, pois o conceito de vetor é central, indispensável tanto sob o ponto de vista teórico como nas aplicações. Sua ausência se fez sentir no Volume 2, quando foram estudados matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Neste Volume 3, teriam sido úteis para uma exposição mais clara, convincente e eficaz da Geometria Analítica e também para uma visão mais nítida dos números complexos.

Polinômios

Os polinômios são funções de uma natureza particularmente simples, que podem (e devem) ser olhadas tanto sob o ponto de vista algébrico (operações, divisibilidade, equações) como geométrico (estudo das suas propriedades por meio dos seus gráficos) ou numérico (cálculo aproximado de suas raízes, interpolação, etc.). Essa riqueza de interpretações possíveis, que poderia ser explorada com grandes méritos didáticos, está inteiramente ausente na exposição feita neste livro.

Aqui, os polinômios nem sequer são considerados como funções. São meramente objetos formais, sujeitos a operações, às vezes incorretamente definidas.

Uma propriedade crucial, o princípio de identidade de polinômios, correlaciona o polinômio-função com o polinômio-forma. Segundo ele, duas funções polinomiais são iguais somente se possuem o mesmo grau e os mesmos coeficientes. Esse princípio não-trivial é admitido como óbvio ou confundido com a sua recíproca praticamente por todos os demais autores brasileiros de textos para o Ensino Médio de Matemática. No presente livro, não há necessidade de provar tal princípio pois não se trata de funções polinomiais aqui. (Salvo, naturalmente, as afins e quadráticas, já estudadas no Volume 1. Mesmo para aquelas, nunca foi provado, por exemplo, que $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ implica $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.)

(160) A divisão de polinômios é apresentada como um fato consumado, sem que seja percebida a necessidade de provar a existência e a unicidade do quociente e do resto no algoritmo de Euclides. O fato de que o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, em vez de fazer parte da definição, é obtido como uma conclusão, na base do contumaz "observe que".

Embora os polinômios sejam definidos com coeficientes complexos, em todos os exemplos apresentados seus coeficientes são números reais.

(171) A definição de raiz de uma equação segue o estilo elíptico do livro. O Teorema Fundamental da Álgebra é apresentado como um dogma, secamente, sem comentário, justificativa ou histórico.

(172) Na primeira linha tem-se $n \geq 1$. Na sexta linha tem-se $n > 1$, para o mesmo n. A conclusão $Q_n = a_n$, na linha 14, precisaria de uma explicação mais clara.

(172) O teorema segundo o qual o conjugado de uma raiz de um polinômio com coeficientes reais é ainda uma raiz desse polinômio recebe uma demonstração diferente daquela tradicional (e mais simples) que diz $p(z) = 0 \Rightarrow p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = 0$. A demonstração é apresentada omitindo detalhes que ajudariam seu entendimento. Um leitor menos experiente dificilmente perceberá onde a hipótese de coeficientes reais está sendo utilizada. É tarefa obrigatória para um livro didático salientar o emprego das hipóteses e das propriedades admitidas em cada passagem crucial de sua argumentação ao provar um teorema.

(181) Na pesquisa das raízes racionais são usados fatos sobre a divisibilidade em $\mathbb{Z}$ que, embora básicos e relevantes, não devem ser do conhecimento dos alunos mas, nem por isso, são explicados.

O livro dá a impressão de que as equações algébricas sempre admitem pelo menos uma raiz racional, pois todos os exemplos de grau ≥ 3 têm essa propriedade. Não há um exercício ou exemplo das raízes irracionais. A calculadora, esse instrumento indispensável na vida de hoje, continua ausente até a última página do último volume.

As leituras adicionais (nesta seção e na próxima), sobre bolhas de sabão e superfícies de curvatura média constante, são belas páginas de autoria do Professor Manfredo do Carmo, as quais nada, absolutamente nada, têm a ver com os assuntos tratados em qualquer parte deste livro e, além do mais, estão num nível bem acima da compreensão de um aluno do Ensino Médio.

Limites e Derivadas

Estas duas seções pretendem servir de introdução ao Cálculo Infinitesimal. Mas deixam muito a desejar. Elas contêm uma série de noções mal apresentadas, nas quais a parte teórica é ausente ou deficiente e as aplicações interessantes não existem.

(194) Precedendo a definição de limite, há um exemplo sobre boliche absolutamente surrealístico, impossível de acontecer. Além de não ajudar a entender limites, ele reforça a impressão de que Matemática e Realidade são domínios disjuntos.

(195) A delicada e complexa definição de limite é apresentada de passagem, por meio de símbolos, sem comentários, não se sabe com qual objetivo pois nunca mais será usada no livro.

(196) Os símbolos de limite lateral são usados sem serem definidos. Aparece aqui o único exemplo do livro no qual o limite não existe.

Não é dada a mínima importância ao domínio da função f e muito menos à posição do ponto a em relação a esse domínio quando se considera $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(199) As propriedades operatórias dos limites são apresentadas por decreto. Salvo um exemplo artificial, todos os limites que aparecem são valores da função naquele ponto.

(200) Na definição de continuidade, nenhuma referência é feita ao domínio da função. A afirmação de que o gráfico de uma função contínua "não apresenta saltos nem furos" vale apenas quando seu domínio é um intervalo. Ela é falsa para a função $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 1/x$.

A advertência de que a expressão "no ponto $x = a$" quer dizer no ponto do gráfico de abscissa igual a a" não faz sentido nem tem necessidade.

(201) A afirmação de que o terceiro gráfico desta página é de uma função descontínua porque há um furo em $x = 3$ é incorreta. Como a função não está definida neste ponto não tem sentido perguntar se ela é contínua ou descontínua ali.

(202) A demonstração de que $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x/x) = 1$ apresenta dois pontos falhos. Em primeiro lugar, não é claro (nem mesmo a partir da figura) que $x < \operatorname{tg} x$. Em segundo lugar, a continuidade da função $\cos x$ no ponto $x = 0$ não foi provada ou pelo menos comentada antes.

(204) Segundo o livro, tem-se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ sempre que, quando x tende a zero, $f(x)$ assuma valores cada vez maiores. Isto não é verdade. A afirmação feita significa apenas que $f(x)$ cresce quando $x \to 0$. Por exemplo: quando x tende a zero, a função $1/(1 + x^2)$ assume valores cada vez maiores mas não tem limite infinito.

Outras afirmações análogas, todas incorretas, são feitas na página 205.

(206) O período que abre a página é confuso, pouco informativo e mal redigido.

(207) O número e, de extraordinária importância, merecia uma introdução e alguns comentários. A função que tem e como limite em $+\infty$ devia ter seu domínio explicitamente declarado e alguma justificativa deveria ser apresentada para as conclusões afirmadas.

(216) A noção de derivada não é seguida dos inúmeros exemplos, na Matemática e (principalmente) fora dela que justificam sua grande importância na vida moderna. A parte conceitual é deficiente: conclusões e regras são obtidas sem justificativas, argumentos incompletos são seguidamente apresentados e, acima de tudo, não há exercícios nem exemplos de máximo e mínimos ou problemas de qualquer outra natureza que sejam resolvidos usando derivadas.

Qual é afinal, o objetivo visado ao incluir estas noções (limite, continuidade e derivadas) no livro? A teoria é fraquíssima e eivada de erros, as manipulações são insuficientes e as aplicações não existem. Ao terminar a leitura, o aluno não se sentirá capaz de utilizar esses resultados nem em situações práticas nem como introdução a estudos mais avançados.

Estatística e Matemática Financeira

O capítulo começa falando de amostra. Mas não fala da dificuldade de obter uma amostra representativa. Por exemplo, para se ter uma idéia da porcentagem dos cariocas que gostam de praia, não adianta ir à praia de Copacabana e entrevistar pessoas perguntando: você gosta de praia? Esta não será uma amostra representativa. A imensa maioria das pessoas que lá estão naturalmente devem gostar. Um texto de estatística para estudantes deveria enfatizar que para compreender o todo examinando uma pequena parte é preciso que esta parte (amostra) seja quase uma miniatura da situação total. E aí está a dificuldade.

(252) O exemplo das quatro torcidas no Maracanã é bom mas, para obter as freqüências, o livro considera que todos os torcedores foram entrevistados, o que é irreal. Nunca ninguém entrevistou as 80.000 pessoas em um estádio. O que se pode fazer, por exemplo, é escolher uma das entradas do Maracanã e durante um período de, digamos, meia hora, perguntar a cada um que entre qual é o seu time. Temos aí uma amostra. Naturalmente que o planejamento de uma amostra deve estar baseada em hipóteses estabelecidas de acordo com o bom senso. Nesta proposta de amostra estamos admitindo que um torcedor não tem preferência sobre qualquer das entradas e que a ordem de entrada não obedece a nenhum critério (tipo, os flamenguistas sempre chegam mais cedo). Se essas premissas forem corretas, a amostra deve refletir o que ocorre no total dos torcedores. Entretanto, é bom dizer que não há garantia de que estejamos

absolutamente certos. Pode acontecer que chegue no momento da pesquisa uma caravana de paulistas que resolveu entrar pela porta onde a pesquisa está sendo feita.

O livro deveria comentar essas coisas. São importantes e são reais.

(256 a 262) O livro mostra como organizar dados em tabelas e fazer gráficos. Mostra a média, a mediana e a moda.

(265) As medidas de dispersão não ensinam nada. O livro não explica o significado do desvio-médio, da variância e do desvio-padrão. Ensina a calcular mas não ensina o principal: O que significam esses números? Para que servem essas coisas?

(269 a 274) A Matemática Financeira é apresentada como um manual de instruções. Para obter tal coisa, use esta fórmula.

(276) A fórmula dos acréscimos sucessivos é apresentada obscuramente. Como o aluno vai entender isto? Por que não dá uma demonstração?

(278) Idem.

O capítulo de Matemática Financeira do livro praticamente não contém Matemática Financeira. Fala superficialmente de lucro e desconto e trata, de forma apressada, de aumentos e descontos sucessivos. Não há um único problema do tipo:

a) Uma loja vende um artigo por R$ 90,00 à vista ou em duas parcelas de R$ 50,00, uma no ato da compra e outra 30 dias depois. Qual é a taxa de juros cobrada pela loja?
b) Uma pessoa deposita R$ 100,00 no primeiro dia útil de cada mês em uma caderneta de poupança que rende 0,7% ao mês. Qual será o seu saldo após o 12º depósito?

Os problemas reais de financiamento, cálculo de prestações ou taxa de juros não aparecem. O material do capítulo está longe de ser suficiente para a compreensão do que ocorre na vida real.

Revendo o vestibular

Por que “revendo”? A maioria dos alunos ainda não o viu. Esta seção consiste numa coleção de 133 problemas de vestibulares, variados e sem grandes dificuldades. Alguns são resolvidos passo a passo. Para os propostos há um “banco de dicas” que ajuda muito o aluno que estuda sozinho e, no final, todos são resolvidos. As soluções apresentadas são por vezes muito longas. Na página 292, a conclusão de que y é uma função afim de x não poderia ter sido obtida pelo leitor destes livros porque o Volume 1 não traz a caracterização da função afim, aqui chamada de “linear”.

Na página 310, a conclusão de que a reta s passa pela origem é correta, porém não se baseia em nenhum argumento.

O problema da página 312, resolvido numa página, poderia ter sua solução apresentada em 2 ou 3 linhas.

Algumas conclusões

O livro é escrito em linguagem telegráfica. É raro encontrar mais de 3 linhas seguidas de texto. Abusa de expressões vagas do tipo "podemos obter", "podemos calcular", "podemos determinar", "podemos considerar", "podemos definir", "podemos identificar", "podemos dizer que", "podemos escrever que", "verifica-se que", etc. Com raras exceções, não há definições claras dos conceitos. Demonstra algumas coisas mas outras não. Temas importantes como geometria analítica, números complexos e derivadas não merecem nenhuma aplicação no mundo real. O leitor tem todo o direito de perguntar: para que estudar essas coisas?

Não há problemas contextualizados, não há conexões entre assuntos diversos, não há questões que estimulem o raciocínio ou a criatividade. Não usa a calculadora (nem no capítulo de Matemática Financeira onde seu uso é imprescindível) e não aborda um problema sob pontos de vista diversos. Os exercícios são estritamente manipulativos.

A seção "Saiba um pouco mais" não tem relação direta com o assunto do capítulo. A maioria é incompreensível para o aluno por conter palavras, expressões e conceitos que eles não conhecem. São apenas extratos de artigos publicados em revistas científicas, sem nenhum comentário dos autores do livro que ajudem o leitor a entendê-los.

Em suma, o livro não cumpre sua própria proposta contida na Apresentação: "oferecer algumas das condições para a busca da compreensão do mundo".