Maria Helena e Spinelli

Matemática – volume 1

Descrição sucinta do Volume 1

Este livro cobre o conteúdo descrito a seguir em um total de 390 páginas, seguidas de uma pequena tabela de logaritmos e das respostas dos exercícios propostos. Está dividido em 7 capítulos, intitulados Conjuntos; Funções; Funções cujos gráficos são retas; Funções cujos gráficos são parábolas; Exponencial; Logaritmos; Progressões.

A programação gráfica do livro é boa, com ilustrações a cores de boa qualidade.

O texto, de um modo geral, é claro, sem exageros, com muitos exercícios e exemplos resolvidos. Os exercícios são divididos em tipos: os de compreensão, que "devem ser resolvidos em sala de aula pelo professor, com muito cuidado, pois conduzem a conclusões ou sínteses indispensáveis para a estruturação de um conhecimento mínimo"; os de fixação, que apresentam diferentes graus de dificuldade; e os exercícios suplementares, mais elaborados e com maior grau de dificuldade. Encontramos ainda exercícios de recuperação e uma lista de exercícios de vestibulares. Cada capítulo contém sugestões para auto-avaliação, com as quais o aluno pode testar seu conhecimento. Os exercícios das seções de auto-avaliação se encontram resolvidos no fim do livro.

Análise detalhada do Volume 1

O Capítulo 1 aborda conjuntos, tópico cuja presença no ensino fundamental e médio é atualmente polêmica. Sua apresentação neste livro é feita sem exageros. Inicialmente os autores afirmam que "Neste capítulo, você tem a oportunidade de fazer uma revisão e, também, uma uniformização da teoria dos conjuntos e, com isso, recordar equações, sistemas de equações e, inclusive, números reais".

Isso realmente acontece. O capítulo explica sem pressa, com exemplos, a notação básica dos conjuntos. Explica que os conjuntos podem ser dados pela listagem de seus elementos ou por uma propriedade que os caracterize sem ambigüidades. Os exemplos são quase sempre de natureza matemática e o capítulo enfatiza os conjuntos numéricos. Nota-se, no entanto, o exagero de todos os livros deste grau de escolaridade em enfatizar a notação empregada para distinguir conjuntos numéricos, como por exemplo o conjunto dos inteiros não-nulos ($\mathbb{Z}'$), dos inteiros positivos não-nulos ($\mathbb{Z}_+^*$), etc. No lugar de dar atenção a notações de uso restrito, seria melhor fazer uma revisão a respeito da natureza dos conjuntos numéricos. Isto não é feito apropriadamente. Por exemplo, em um exercício resolvido da página 11 o aluno deve julgar se $\sqrt{3}$ é real. A resposta apresentada é: "verdadeiro; $\sqrt{3}$ é irracional, portanto é real". A explicação é incorreta. O número $\sqrt{3}$ é real porque existe um número positivo cujo quadrado é igual a 3. Como tal número não pode ser expresso na forma p/q (p, q inteiros), ele é irracional.

Não se encontram no capítulo exercícios capciosos. Alguns deles, entretanto, cometem descuidos na notação. Por exemplo, o exercício 6 da página 15, que pede para listar os elementos do conjunto $H = \{5a/4, 3b/2 \mid a, b \in \mathbb{R}, 2a + 3 = 3 \text{ e } 3b + 4a = 1\}$. O objetivo do exercício parece ser o de listar os pares de número da forma $(5a/4, 3b/2)$ cumprindo as condições dadas; no entanto, a notação respectiva deveria ter sido empregada.

Na seção 4, dedicada ao conjunto das partes de um conjunto, é apresentada uma terminologia pouco usual: o número de elementos de um conjunto é chamado de *ordem* do conjunto, quando cardinalidade do conjunto seria o nome mais indicado.

Ainda neste capítulo, apresentam-se os conectivos lógicos *e* e *ou*, relacionando-os com as operações de união e interseção de conjuntos. Os autores explicam que o significado de ou em matemática difere do significado de ou na vida real, que é exclusivo, enquanto em matemática ele é inclusivo. Os intervalos da reta real são apresentados corretamente, a partir da página 30. O livro dá atenção a um aspecto negligenciado na maior parte dos congêneres: o de representar diferentes números na reta (inclusive dízimas periódicas e números irracionais) e estabelecer relações de ordem entre eles.

O módulo ou valor absoluto de um número real é estudado a partir da página 39, seguido de uma seção dedicada a equações e inequações modulares. Nota-se, na página 41, impropriedade de linguagem, quando se encontra no texto a expressão "qualquer a e b reais", quando o correto seria escrever quaisquer a e b reais.

O capítulo se encerra, como todos os demais, com testes de vestibulares e uma seção intitulada "sugestão para auto-avaliação".

Este texto enfatiza o pensamento funcional no estudo da Matemática, como já pode ser percebido pela enumeração dos capítulos feita anteriormente. O conceito de função é introduzido já no Capítulo 2. A introdução do capítulo mostra gráficos e tabelas de revistas e jornais que expressam relações funcionais. Em seguida, introduzem-se os pares ordenados e define-se o produto cartesiano de dois conjuntos e o sistema cartesiano ortogonal no plano.

Como a maioria dos livros do ensino médio, os autores desta obra optaram por introduzir formalmente o conceito de função como caso particular de uma relação em um produto cartesiano. Isso é desnecessário e interrompe a orientação adotada na introdução deste capítulo, a de enfatizar relações funcionais. Toda a preparação feita até agora poderia ter sido coroada definindo uma função f de um conjunto A em um conjunto B como uma lei de correspondência que a cada elemento de A associa um único elemento de B. Antes de chegar a esta formulação fundamental e universalmente utilizada em Matemática e suas aplicações, o texto discorre sobre relações, relações definidas por sentenças e funções como relações particulares, antes de considerar funções como leis de correspondência entre dois conjuntos.

Os gráficos de funções são introduzidos na página 83, usando situações reais. No entanto, deve-se mencionar que, no exemplo 1, a situação descrita na ilustração à esquerda da página 83 não dá origem a um gráfico contínuo, como mostrado na ilustração à direita. Este gráfico contínuo resulta de um processo de abstração e do uso de um modelo matemático que transforma a situação discreta em uma situação contínua, a fim de permitir a utilização de ferramentas matemáticas poderosas. A mesma observação se aplica aos exemplos seguintes. Em particular, o livro afirma que "o crescimento dos juros é contínuo, ou seja, ele não ocorre aos saltos". Isto não é correto e passa ao aluno uma informação equivocada sobre um assunto de extremo interesse prático, já que, em geral, juros evoluem de modo discreto.

Em seguida, o livro discute se um gráfico do plano é ou não o gráfico de uma função e como identificar o domínio e o conjunto-imagem de uma função dada por seu gráfico e o domínio de uma função dada por uma sentença matemática.

Na seção 10 deste capítulo (página 92) estuda-se como construir o gráfico de uma função e na seção 11 o crescimento de uma função. O exemplo que ilustra o conceito é muito mal escolhido. Trata-se de uma situação que mostra o número de consultas ao SCPC ao longo de 4 meses. Como nos casos anteriores, o gráfico é desenhado de modo contínuo e se conclui que o gráfico é crescente no intervalo de dois meses consecutivos. Teria sido preferível um exemplo onde o gráfico contínuo fizesse sentido ou uma situação discreta com um número maior de pontos.

Encontram-se neste livro, na edição destinada ao professor, seções intituladas "Conversa com o professor". Por exemplo, na página 98 em uma destas seções lê-se: "Sugerir aos alunos que tragam gráficos recortados de jornais e revistas, para que possam ser analisados quanto ao crescimento".

Ainda neste capítulo, na página 100, estudam-se as “raízes de uma função”. Seria mais apropriado denominar esta seção de “zeros de uma função”, pois uma função não é uma equação. Além disso, a exposição não é boa. A seção começa afirmando que “pontos importantes do gráfico de uma função são os de encontro com os eixos” e que para encontrar os pontos de interseção com o eixo das abscissas “é necessário obter os valores de x para os quais $f(x) = 0$”. Do ponto de vista do estudo das funções, a apresentação está sendo invertida. O problema de interesse é o de obter os zeros de uma função dada graficamente, que são obtidos através dos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

A seção 13 estuda a composição de funções e a 14 as “Qualidades de uma função”, ou seja, as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Nela se encontra uma observação algo críptica: “ATENÇÃO: Não basta apenas observar o contradomínio de uma função para saber se é sobrejetora ou não. É preciso analisar também a sentença da função”. É difícil entender a necessidade desta observação, sendo óbvio que o exame do contradomínio não basta para caracterizar sua sobrejetividade.

A última seção do capítulo estuda a inversa de uma função dada. O fato de que a composta de uma função com sua inversa é a matriz identidade é destacado através da igualdade “$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$”. Seria importante chamar a atenção do aluno para o fato de que esta igualdade contém um abuso de notação, já que as expressões $f^{-1}(f(x))$ e $f(f^{-1}(x))$ são definidas para valores diferentes de x. O exercício resolvido R24 mostra como obter f^{-1} a partir de f, trocando x por y na expressão de $f(x)$. É interessante observar que, ao obter a inversa de $f(x) = 2x$, o livro começa por observar que f é bijetora. Mas não está claro como se pode chegar diretamente a esta conclusão (pelo menos neste ponto do livro, quando ainda não foi estudado o comportamento de funções lineares). Na verdade, esta conclusão decorre do processo de obtenção de $f^{-1}(x)$ como para todo x real, existe um único y tal que $x = 2y$, segue-se que f é bijetora.

O capítulo seguinte, o terceiro, é dedicado às funções cujos gráficos são retas. Corretamente, o livro considera a função constante como função, ao contrário de alguns livros didáticos. Em seguida, estuda as funções lineares e as funções afins. Não é demonstrado que se uma função é afim então seu gráfico é uma linha reta, ou que a linha reta é o gráfico de uma função afim. Estas são demonstrações simples, que familiarizariam o aluno, aos poucos, com o estilo de argumentação característico da matemática, o método dedutivo. Nos exercícios propostos nas páginas 135 e 136 são feitas perguntas para que o aluno chegue a conclusões sobre o significado dos coeficientes a e b na função $ax + b$. Estas conclusões são sistematizadas no quadro-resumo da página seguinte. Depois, na conversa com o professor da página 141, sugere-se que ele incentive os alunos “para que a escolha da letra para a variável independente ou dependente se desprenda um pouco de x e y, o que é útil para a física, que habitualmente dá outras nomeações para as variáveis". Seria bom acrescentar que, na maior parte das aplicações, as unidades utilizadas para os eixos são diferentes (até porque envolvem, em geral, grandezas de naturezas diferentes).

A seção 5 estuda as posições relativas de retas no plano, utilizando os coeficientes angulares e lineares. Como sempre, tudo é induzido a partir de alguns exemplos, sem demonstrações. Ora, o ensino médio é o nível de escolaridade em que o aluno deve começar a familiarizar-se com o modo próprio de argumentação da Matemática, afastando-se aos poucos das argumentações indutivas, baseadas em poucos exemplos. Isso não significa que neste estágio da escolaridade a Matemática deva ser apresentada de maneira formal, rigorosa, mas que sejam dadas demonstrações simples dos resultados matemáticos, após eles terem sido motivados e exemplificados. Os conteúdos de Matemática do ensino médio se prestam bem a isso, devido a sua simplicidade. Limitar demonstrações à parte de Geometria é artificial e tende a cristalizar, na mente dos alunos, a idéia de que em matemática só existem demonstrações em Geometria.

O restante deste capítulo é dedicado às inequações de primeiro grau e a funções modulares obtidas a partir de funções afins. Uma seção interessante, a de número 9, página 154, trata das funções definidas por partes. O exemplo 1, da página 154, é especialmente interessante, por tratar de uma situação estudada em outras disciplinas (resfriamento de uma substância que muda de estado físico). Mas seu potencial de contextualização e multi-disciplinaridade é prejudicado por não explicar ao aluno a razão do comportamento observado (isto é, que a temperatura permanece constante durante uma mudança de estado). Ao invés de fornecer a explicação, o livro apenas sugere que o aluno procure o professor de Química para explicações.

O Capítulo 4 estuda as funções cujos gráficos são parábolas. Na conversa com o professor (página 168) é dito, acertadamente, que "O estudo da função do 2º grau com base nos tipos é feito para facilitar a compreensão das variações que são provocadas por transformações em $f(x)$, como $c \cdot f(x)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x) + b$, $f(x + a)$ e $c \cdot f(x + a) + b$. A compreensão dessas transformações, estabelecida neste momento, facilitará o aprendizado de funções trigonométricas".

Em primeiro lugar, o livro estuda a função $y = ax^2$ com a real. O fato de que o gráfico é simétrico é inferido a partir do traçado da curva, a partir de uma pequena tabela de valores dos pares (x, ax^2). Custaria muito pouco (e seria muito mais educativo) oferecer uma justificativa geral. Os exemplos que se seguem procuram mostrar o papel do coeficiente a.

Em seguida, de maneira análoga, são estudadas as funções da forma $ax^2 + c$.

Os exemplos levam o aluno à conclusão dos papéis desempenhados pelos coeficientes a e c. Nenhuma demonstração é apresentada. Após isso, são apresentadas as funções da forma $a(x+p)^2$ e $a(x+p)^2+q$. Por fim, é estudada a função de forma ax^2+bx+c. É explicado como transformar esta equações em $a(x-x_v^2)^2+y_v$, onde (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice da parábola, mesmo no caso em que ela não corta o eixo dos x.

Na página 191, encontra-se a demonstração de como achar as coordenadas do vértice da parábola. Como os números complexos ainda não foram estudados, a demonstração apresentada só faz sentido se a parábola corta o eixo dos x. O interessante é que, nos exemplos das páginas 187–188, este problema já fora reconhecido e tratado corretamente. Teria sido preferível apresentar um tratamento unificado baseado em completar os quadrados do trinômio do 2º grau a fim de escrevê-lo na forma $a(x-m)^2+p$. A seção 7 (página 195) estuda problemas de máximo e mínimo de funções do 2º grau. O assunto merecia um número maior de exemplos e exercícios do que os apresentados no livro. As inequações do 2º grau são abordadas na seção 8, com o estudo da variação do sinal do trinômio ax^2+bx+c, seguida do estudo de funções modulares obtidas a partir de funções do 2º grau.

Falha séria deste capítulo é não relacionar o gráfico da função ax^2+bx+c com a parábola definida geometricamente. Não é difícil demonstrar, a partir da definição geométrica da parábola, que sua equação cartesiana é exatamente do tipo ax^2+bx+c. É também fácil de demonstrar que se uma curva é o gráfico de uma função do tipo ax^2+bx+c, então ela é uma parábola. Além disso, não são mencionadas propriedades da parábola. A compartimentalização dos diferentes campos da Matemática deve ser evitada. Este tópico se presta admiravelmente para mostrar que a álgebra e a geometria se relacionam, mas isso não é feito no livro.

O Capítulo 5, a partir da página 223, estuda a função exponencial. Principia com uma revisão das propriedades das potências. Os exemplos R3 e R4, páginas 226 e 227, abordam a notação científica. É louvável esta referência, que poderia ser ainda mais valorizada através de exemplos de seu uso.

A função exponencial é abordada comentando-se como potências crescem rapidamente. Ela é então definida como sendo uma função da forma a^x, com $a>0$ e $a \neq 1$. A seguir, são estudados os comportamentos de tais funções para $a>0$ e $0<a<1$. Nenhum comentário é feito a respeito da dificuldade em definir a^x quando x é irracional ou sobre como obter tais valores. Os exemplos e exercícios que se seguem ilustram o comportamento da função exponencial e a utilizam para modelar situações diversas. Mas nenhum dos exemplos ilustra, devidamente, o processo de modelagem já que, neles, a função exponencial que representa a situação já é dada. Não se menciona, neste capítulo, que a função exponencial é importante para modelar fenômenos cuja taxa de variação em um instante é proporcional à quantidade existente naquele instante. Veja-se o exemplo 17, da página 239, que envolve juros compostos. Nele se afirma que "De acordo com os princípios da matemática financeira, para saber quanto custará alguma coisa daqui a um certo tempo t, em meses, basta multiplicar o preço atual por $1{,}1^t$. Seria simples e instrutivo mostrar que, como a cada mês, o preço é multiplicado por 1,1, o preço após t meses será multiplicado por $1{,}1^t$.

O capítulo se encerra com o estudo de equações e inequações exponenciais. Os exemplos e exercícios tratam do assunto sem exageros. No entanto, o livro não relaciona adequadamente o método de resolução com as propriedades das funções exponenciais. Por exemplo, se menciona que, na passagem aos expoentes em inequações exponenciais de mesma base, "o sinal da desigualdade pode se inverter em alguns casos". São dados alguns exemplos, seguidos da recomendação de "voltar um pouco à leitura e prestar atenção às funções exponenciais decrescentes". Teria sido preferível fazer uma discussão mais completa, relacionando explicitamente a inversão ou não dos expoentes às propriedades de decrescimento ou crescimento da função exponencial.

A introdução do capítulo sobre logaritmos é bastante boa, mostrando para o que eles serviam originalmente. Define-se então o que é logaritmo. As propriedades dos logaritmos são enunciadas corretamente, mas sem nenhuma demonstração. O livro continua a encarar a Matemática como uma série de fatos verificados indutivamente, a partir de poucos exemplos particulares. O exercício 43, da página 287, aplica os logaritmos à química, com a definição de pH. Outras aplicações interessantes, como a escala de intensidade de terremotos, não são abordadas.

A *função* logaritmo é estudada a partir da seção 4, na página 287, com os casos crescente e decrescente. O encaminhamento da discussão não é bom, pois não fica claro que o fato de a função ser crescente ou decrescente depende da base a. A seção se encerra com a observação de que logaritmo e exponencial são funções inversas.

Em seguida estudam-se as equações e inequações logarítmicas. Mais uma vez, não se estabelece a relação entre o método de resolução e as propriedades de injetividade e monotonicidade das funções logarítmicas.

As duas últimas seções são dedicadas às tabelas de logaritmos. Na seção 7 se estudam os logaritmos decimais, enquanto a seção 8, bastante interessante, explica como é construída uma tabela de logaritmos, contribuindo para a compreensão de seu uso. O tratamento dado ao uso de tábuas é adequado, sem o exagero encontrado em outros livros, e com uma breve menção ao uso de calculadora. São vistos alguns exemplos de uso de logaritmos na resolução de equações exponenciais simples resultantes de situações em matemática financeira e crescimento populacional. As aplicações poderiam ser, entretanto, em número muito maior, explorando, por exemplo, a lei do resfriamento de Newton, a Lei de Binet para a relação entre a excitação e a resposta e as leis de decaimento radioativo.

O capítulo se encerra com uma breve menção ao número e. Informa-se ao aluno que o valor de e^x pode ser obtido pela série $1 + x + x^2/2! + \cdots$ e que os logaritmos na base e "aparecem nos cálculos quando se estuda, por exemplo, a desintegração do átomo em física, os juros compostos em economia, etc.". Esta frase tende a mascarar o fato de que a base e pode ser utilizada em todo problema envolvendo uma função exponencial, já que $a^x = e^{kx}$, onde $k = \ell n\, a$. A verdadeira vantagem de se empregar a base reside na relação entre o coeficiente k e as taxas instantâneas de variação da função.

O Capítulo 7, o último do livro, trata das progressões. Para motivá-las, apresenta-se a evolução do pagamento de parcelas mensais, com juros. Num dos casos, utilizam-se juros simples, o que dá origem a uma progressão aritmética. No outro caso, juros compostos, o que dá origem a uma progressão geométrica. Infelizmente, no texto, é omitido o fato de estarmos lidando com juros simples e compostos, respectivamente. Uma outra omissão é que o livro também deixa de apresentar seqüências como casos particulares de funções, o que seria inteiramente apropriado face aos capítulos precedentes. Na verdade, os exemplos para o uso de funções para representar situações reais, dados no Capítulo 2, foram quase todos de seqüências.

As progressões constituem um tópico que, por sua simplicidade, se presta à realização de pequenas demonstrações, a fim de habituar o aluno com o raciocínio dedutivo, transformando a Matemática do ensino fundamental, majoritariamente indutiva, em ciência dedutiva. O livro em geral não aproveita tal oportunidade. Mais uma vez, as situações gerais são induzidas a partir de alguns casos particulares. Por exemplo, na página 336, chega-se à expressão para o termo geral de uma progressão aritmética simplesmente apresentando alguns casos. Seria igualmente simples argumentar que, ao passar de a_1 a a_n, a razão é somada $n-1$ vezes a a_1, resultando daí a expressão do termo geral.

Na página 346, quando se deseja mostrar que qualquer termo de uma progressão aritmética é a média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor, o resultado destacado é bem mais geral, mas isso não é mencionado. Em verdade, é mostrado que o termo de ordem n é a média aritmética entre os termos de ordem $(n-k)$ e de ordem $(n+k)$. Não é feita menção da idéia importante de interpolação aritmética, que poderia ser tratada aqui.

A demonstração da expressão que fornece a soma de n termos de uma progressão aritmética é feita corretamente na página 353. Os exercícios que finalizam o capítulo são um pouco pobres, deixando de explorar o uso de progressões aritméticas na modelagem. Em particular, não é feita nenhuma correlação entre progressões aritméticas e funções afins.

As progressões geométricas são tratadas a partir da seção 5, página 361, com desenvolvimento análogo ao que foi feito para as progressões aritméticas: cálculo do termo geral, a propriedade de que cada termo é a média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor, soma dos termos de uma progressão geométrica finita. A seção 7 estuda o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica. A explicação é clara e detalhada, seguida de vários exemplos. Nos exercícios das páginas 386–388 encontram-se algumas aplicações interessantes de p;rogressões geométricas a situações envolvendo matemática financeira. Novamente, não é feita qualquer menção à relação entre progressões geométricas e funções exponenciais.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 1

Na apresentação da coleção, comum aos seus três volumes, os autores afirmam que

> "Os métodos de ensino-aprendizagem, atualmente desenvolvidos em sala de aula, colocam o aluno como construtor do seu próprio conhecimento. Cabe fundamentalmente ao professor o papel de orientador e parceiro do educando nesse processo. ... O livro didático, concebido como um facilitador do trabalho escolar, requer do educando dedicação ao estudo em casa, para rever os conceitos abordados na teoria, repassar os exercícios feitos em classe e, ainda, resolver uma boa quantidade de exercícios complementares. Esta, em essência, é a filosofia que norteou a elaboração desta nossa coleção de MATEMÁTICA."

Assim, os autores lembram ao aluno que sua participação ativa, com trabalho sistemático e individual é essencial para que ele construa um conhecimento matemático autônomo e significativo. A idéia do livro é utilizar estes exercícios para levar o aluno a descobrir propriedades por si mesmo, ao invés de ser simplesmente apresentadas a elas. Em princípio a idéia é boa e, em algumas ocasiões, é bem realizada. No entanto, alguns dos quadros-resumo são sintéticos em demasia, não chamando a atenção devida para algumas questões cruciais. Um outro problema deste método é que alguns dos quadros-resumo apresentam conclusões baseadas apenas em um certo número de exemplos, o que pode passar a idéia equivocada de que exemplos bastam para mostrar a veracidade de uma afirmativa (isto se torna especialmente grave nos dois volumes seguintes).

Embora os autores se coloquem em uma postura nitidamente "construtivista", o fato de que delegam ao professor a resolução de exercícios de compreensão, em sala de aula e não apresentem propostas de atividades que ajudem o aluno a desenvolver sua autonomia e propiciem que ele participe de maneira ativa na construção de seu conhecimento contradiz, na prática, a postura dos autores. Ou seja, embora o livro se declare construtivista, muitos professores vão utilizá-la como uma obra tradicional, por falta de orientação adequada.

De todo o modo, o livro apresenta um bom potencial como texto para o ensino médio. Algumas de suas virtudes estão no texto adequado, em exemplos quase sempre bem escolhidos e em exercícios que destacam os pontos principais de cada assunto. No entanto, para que o livro seja um instrumento efetivo de ensino e aprendizagem é necessário que o professor faça cuidadosamente a passagem entre os exercícios de compreensão e os quadros-resumo, de modo a evitar que o aluno adquira a impressão que a mera observação de exemplos constitui o método de argumentação da matemática.

Maria Helena e Spinelli

Matemática – volume 2

Descrição sucinta do Volume 2

O segundo volume desta coleção tem 9 capítulos e um apêndice com uma tabela trigonométrica, fórmulas de áreas de figuras planas e as respostas dos exercícios. Os 9 capítulos são: Triângulos, Trigonometria, Transformações Trigonométricas, Matrizes e Determinantes, Sistemas, Análise Combinatória e Binômio de Newton, Probabilidades, Geometria de Posição, Geometria Espacial Métrica. O conteúdo (excluindo o apêndice), está exposto em 434 páginas. Além disso, este livro, como os outros da coleção, vem acompanhado de um encarte com jogos matemáticos. Neste volume, a cartela contém um bingo sobre senos e cossenos na circunferência trigonométrica; resolução de equações trigonométricas simples; cálculo de áreas de figuras planas; cálculo de elementos dos sólidos geométricos e cálculo de áreas e de volumes dos sólidos geométricos.

Cada capítulo contém, além de seções expositivas, seções de exercícios propostos (de compreensão, fixação, suplementares e de recuperação) e quadros-resumo. Tais resumos sempre se seguem a uma seção de exercícios de compreensão.

Como nos demais volumes da coleção, a composição tipográfica e as ilustrações são de ótima qualidade.

Análise detalhada do Volume 2

O primeiro capítulo é intitulado Triângulos. Uma denominação mais apropriada seria trigonometria dos triângulos. O assunto é muito bem motivado com duas situações concretas em que os conceitos de trigonometria do triângulo retângulo permitem chegar à solução dos problemas. São apresentados o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e calculam-se seus valores para “ângulos notáveis”. Há também uma preocupação louvável em orientar os professores para o fato de que “não é possível imaginar problemas de resolução de triângulos apenas utilizando números bem comportados”, sugerindo o uso de calculadora ou aproximações para resolver os problemas.

O texto informa que existe uma tabela trigonométrica “completa” no livro, para ser utilizada nos exercícios resolvidos. No entanto, não menciona que também se pode utilizar uma máquina de calcular substituindo uma tabela. O exercício proposto 1, da página 10, mostra como obter, de maneira rudimentar, as linhas trigonométricas de alguns ângulos, utilizando um triângulo retângulo que se encontra no texto. Este exercício poderia ser complementado por outros que incluíssem atividades de desenhar triângulos com ângulos dados, em vez de já dar o triângulo pronto ao aluno.

A seção 4 intitula-se Resolução de triângulos não-retângulos, embora não se diga ao leitor o que é resolver um triângulo. A decisão de incluir aqui esta seção é, porém, correta. A maior parte dos textos a adiam para depois de terem introduzido as razões trigonométricas no círculo, devido à necessidade de se utilizarem as razões trigonométricas de ângulos obtusos. Mas é inteiramente apropriado o tratamento dado aqui, definindo-se estas razões e aplicando-as na dedução das leis dos senos e dos cossenos. Estas relações são, então, aplicada na resolução de problemas, vários deles em situações contextualizadas.

De um modo geral, o Capítulo 1 é bastante satisfatório, dando ao aluno uma boa idéia do papel das razões trigonométricas na resolução de problemas geométricos. As coleções de exercícios, notadamente nas páginas 18–21 e 28–32 são bem escolhidas para lograr atingir este fim.

O Capítulo 2 intitula-se Trigonometria. Principia tratando de graus e radianos. O livro adota o ponto de vista de que ângulos são medidos em graus, enquanto arcos são medidos em radianos. A discussão é pobre, e diz essencialmente, sem comentários esclarecedores, que o radiano "corresponde a um arco com a mesma medida do raio da circunferência". Assim, este texto contribui pouco para esclarecer um tópico difícil do ensino: o que é um radiano e por que um conceito "métrico", relativo a comprimentos de arcos sobre uma circunferência, pode medir ângulos. A discussão seria mais rica se utilizasse o conceito de semelhança para justificar que a razão entre o comprimento de um arco, com um dado ângulo central, e o raio de um círculo não depende do raio.

Em seguida, apropriadamente, o livro revê a reta numérica, em que existe uma correspondência bijetora entre pontos da reta e os números reais. A partir daí, de maneira gradual e intuitiva, chega-se à circunferência trigonométrica e aos arcos côngruos.

O seno e o cosseno na circunferência trigonométrica são estudados a partir da página 58. Tais noções são apropriadamente motivadas como fundamentais para descrever fenômenos oscilatórios. Infelizmente, esta idéia não é explorada posteriormente em exemplos e exercícios.

A seção 5, páginas 65–75, trata de equações e inequações trigonométricas simples, envolvendo senos e cossenos. O assunto é tratado no nível adequado, com ênfase nas propriedades dos senos e cossenos e não em manipulações algébricas. Sente-se falta, porém, de problemas de aplicação, seja à resolução de triângulos ou a fenômenos oscilatórios.

Seguindo a mesma estrutura, o texto apresenta, em seguida, tangentes e cotangentes no círculo trigonométrico, equações envolvendo estas linhas trigonométricas e, na seção 8, secantes e cossecantes.

A partir da página 94, trata dos gráficos das funções trigonométricas. Depois de mostrar os gráficos das funções trigonométricas básicas, o livro se dedica a estudar gráficos de funções da forma $y = a \operatorname{sen} bx + c$ e $y = a \cos bx + c$. O método sugerido é fazer com que o argumento bx assuma os valores 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π. Isto está correto, mas o livro poderia também estimular o aluno a utilizar métodos geométricos na obtenção dos gráficos. O exercício R30, da página 102, procura apresentar uma contextualização para funções trigonométricas, identificando-as como "ondas", para as quais o aluno deve calcular amplitude e freqüência.

O Capítulo 3 trata das transformações trigonométricas. Depois de relembrar a relação fundamental ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) e outras, decorrentes imediatamente das definições das linhas trigonométricas, o livro apresenta algumas outras identidades. Em seguida, trata dos senos e cossenos da adição e diferença e da duplicação e divisão de arcos. O tratamento dado às fórmulas de soma de dois arcos é muito bom. Começa-se pelo estudo de um caso concreto ($\cos 15°$) e, a partir daí se deduz a expressão de $\cos(a - b)$ (pelo menos no 1º quadrante) e as demais fórmulas relativas ao seno e ao cosseno da soma e da diferença de dois arcos. Por fim, como último tópico estudado no capítulo, apresenta as fórmulas que transformam somas e diferenças de senos e cossenos em produtos, explicando que elas são úteis para demonstrar identidades mais complexas e resolver equações trigonométricas mais complicadas.

No Capítulo 4, página 145, há mudança de tópicos: começa o estudo de matrizes e os determinantes. Mais uma vez, o assunto é motivado de maneira bem contextualizada. O quadro resumo da página 153 não é propriamente um resumo, pois apresenta um conceito ainda não apresentado: o de matriz transposta. O mesmo ocorre com o quadro resumo da página 155, que introduz o conceito de matriz simétrica. Em verdade, podemos dizer o mesmo em relação a todos os quadro-resumos deste capítulo: eles estabelecem nomes para novos conceitos e idéias, explorados nos exercícios precedentes.

De um modo geral, o livro faz um bom trabalho na introdução do conceito de matriz, apresentado de modo tão árido em muitos dos congêneres. Em particular, devem ser destacados alguns exercícios das páginas 152 e 154, que utilizam matrizes em situações variadas (por exemplo, para representar as relações de incidência em grafos).

As operações com matrizes são introduzidas a partir da página 156. O exemplo utilizado para ilustrar a adição de matrizes é infeliz. Ele parte de uma matriz dada anteriormente, que representa as vendas de três produtos de uma farmácia, nos meses de janeiro a julho, a decompõe em duas matrizes de venda trimestral e depois soma estas duas matrizes para obter o resultado acumulado nos meses "correspondentes". A situação é completamente artificial. Seria muito melhor ter explorado o mesmo exemplo em uma situação em que a farmácia tem duas lojas (matriz e filial) e se deseja obter o movimento total.

Já o exemplo utilizado para motivar a multiplicação de matrizes é adequado. No quadro resumo da página 167, é introduzida a denominação pouco usual "matrizes comutáveis". Normalmente, de maneira informal, diz-se que as matrizes comutam. A definição de matriz invertível é apresentada corretamente na página 171 e define-se, o que é raro em livros para o ensino médio, matriz singular.

Os determinantes são estudados a partir da página 173. A discussão principia com a seguinte definição, que não faz sentido: "Determinante é o número associado a uma matriz quadrada". Em seguida, definem-se determinantes de primeira e segunda ordens. Na seção 13 (página 176), define-se o que é o menor complementar de uma matriz quadrada e o complemento algébrico ou cofator. Em seguida, indutivamente, define-se o que é o determinante de ordem qualquer utilizando-se seu desenvolvimento pela primeira linha e a noção de cofator.

Após apresentar esta definição, o texto afirma, sem demonstrações e baseado apenas em alguns exemplos, no quadro resumo da página 180, que o determinante pode ser calculado tomando o desenvolvimento em relação a qualquer fila (linha ou coluna), que se o determinante tem uma fila nula ele é igual a zero e que ele é igualmente nulo se tem duas filas iguais ou proporcionais.

Ora, se o tratamento apresentado pelos autores dispensa demonstrações, consideramos mais recomendável dar a definição original de determinante de qualquer ordem e, em seguida, enunciar, como um teorema não demonstrado no livro, o teorema de Laplace, que em verdade aqui é tomado como definição. Julgamos que essa utilização do teorema de Laplace como definição de determinante faria sentido se ela facilitasse a compreensão das propriedades dos determinantes, o que não acontece. Assim, por que fugir das definições já consagradas e que serão encontradas pelo aluno em estudos posteriores de Matemática?

Na seção 17, página 184, em que o livro vai organizar a apresentação as propriedades dos determinantes, vemos a seguinte afirmação: "Veremos, agora, organizadamente, as propriedades dos determinantes. Algumas delas você mesmo deduziu por meio dos exercícios ...".

Esta afirmativa é extremamente perigosa. Em verdade, nos exercícios, o aluno nada demonstrou. Eles são numéricos e seus enunciados pedem que o aluno verifique, para as matrizes dadas, algumas das propriedades que serão tratadas de maneira geral na seção 17. A afirmativa induz o aluno ao erro de considerar que uma demonstração matemática é a simples verificação em casos particulares. Essa crença errada encontra-se freqüentemente em alunos que ingressam em cursos superiores. O ensino de Matemática, nas três séries do ensino médio, além de transmitir informações matemáticas ao estudante, deveria ter a tarefa de habituá-lo, aos poucos, com o método específico de argumentação em Matemática — a dedução matemática. Deixar de fazer isso é uma falha séria, que compromete a formação do aluno.

Em seguida, os determinantes são imediatamente aplicados para calcular a inversa de uma matriz, por meio da matriz adjunta. O texto não menciona, neste ponto, que esta maneira de calcular a inversa de uma matriz, embora teoricamente importante, é inútil para o cálculo da inversa de matrizes de ordens grandes.

As transformações elementares sobre as linhas de um determinante, visando a simplificar seu cálculo, são introduzidas na seção 22, página 194.

Os sistemas lineares são estudados no Capítulo 5, a partir da página 209. Mais uma vez, o estudo é motivado por uma situação bem contextualizada. Neste capítulo, como no anterior, os quadros-resumo não são realmente resumos, mas sim apresentam resultados não discutidos no texto, mas que foram explorados nos exercícios anteriores.

Em seguida, o livro define as matrizes associadas a um sistema linear (páginas 212–214) e apresenta a regra de Cramer, como um método de resolver sistemas, exemplificada com a solução de um sistema 2×2. O quadro-resumo da página 216 afirma que se "$D = 0$, o sistema pode ser impossível ($S = \emptyset$), ou ter um número infinito de soluções".

A classificação de sistemas, no Capítulo 5, página 217, principia com interpretação geométrica de sistemas lineares. A iniciativa, rara em livros para o ensino médio, é excelente. No entanto, o tratamento não é claro, não ficando bem explicada a relação entre a interpretação geométrica do sistema e o fato de ele ter ou não solução. A situação se agrava com a apresentação abrupta, no quadro-resumo da página 218, da divisão de sistemas em compatíveis, compatíveis e indeterminados e incompatíveis (ou impossíveis). Pior ainda, o quadro-resumo contém um erro grave, classificando como sistemas possíveis e indeterminados aqueles nos quais o determinante dos coeficientes e todos os determinantes das incógnitas são nulos. Um contra-exemplo para esta afirmativa é o sistema formado pelas equações $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 0$ e $3x + 3y + 3z = 1$. O sistema é claramente impossível, mas todos os determinantes são nulos.

A seção 6 deste capítulo é dedicada à "discussão de sistemas", isto é, analisar se um sistema é tem nenhuma, exatamente uma ou infinitas soluções dependendo do valor atribuído a um parâmetro do sistema. Ela é prejudicada porque se apoia justamente no "teorema" erroneamente enunciado no quadro-resumo anterior.

A seção 7 é dedicada ao método de eliminação de Gauss, para escalonar e resolver sistemas. No fim da seção, os autores mencionam corretamente que o processo "é fácil e bom para resolver sistemas ..." mas dizem que isso é verdade para sistemas de ordem 4! Ora, as vantagens do escalonamento se tornam tanto mais evidentes quanto maior for a ordem do sistema! Isso certamente deveria ser mencionado.

A discussão dos sistemas homogêneos, na seção 8 não corresponde à importância e beleza do tema. Não se menciona, por exemplo, que qualquer sistema homogêneo tem sempre a solução trivial, independentemente do número de incógnitas e equações. Não se interpretam geometricamente as soluções de um sistema homogêneo. Tem-se a impressão de que o tópico foi incluído por obrigação, mas que nenhum esforço foi feito para torná-lo atraente.

A seção 9 trata dos sistemas lineares não-normais. No corpo da Matemática escolar, a denominação de sistema normal, totalmente desconhecida da prática da Matemática, designa sistemas $n \times n$, ou seja, sistemas em que o número de incógnitas é igual ao número de equações. Sistemas não-normais são portanto sistemas $m \times n$, com $m \neq n$. Eles são tratados por eliminação. A seção, à semelhança da seção anterior, é pobre, não explora as possibilidades de interpretação geométrica das situações e não propõe situações que possam ser modeladas por tais sistemas.

No Capítulo 6, a partir da página 233, começam a ser tratados a análise combinatória e o binômio de Newton. A "definição" proposta para análise combinatória é pobre, e pouco esclarece. É particularmente questionável a afirmativa peremptória de que "os problemas tratados ... envolvem sempre perguntas do tipo: 'quantos são ...?' ou 'de quantas maneiras ...?'"

Ao contrário dos capítulos anteriores, não há uma situação ou problema contextualizado que introduza o tópico. Isso é um retrocesso grave, principalmente levando em conta as dificuldades encontradas pelos alunos em análise combinatória. O capítulo principia com uma apresentação da notação fatorial. Entre tantos problemas e situações elegantes, desafiadoras e complexas da análise combinatória, capazes de serem tratadas mesmo no nível do Ensino Médio, é de estranhar que os autores tenham escolhido começar sua apresentação do tópico exatamente pela notação fatorial! Seria muito mais produtivo e interessante, por exemplo, começar o estudo pelo princípio multiplicativo, um princípio fundamental da contagem, discutido na seção 2, a partir da página 235.

A apresentação do princípio multiplicativo é deficiente e enganosa. O princípio multiplicativo é uma técnica fundamental de contagem. É possível estruturar todo um curso elementar de análise combinatória explorando este princípio, e libertando o aluno da mecanização de tentar enquadrar qualquer problema de análise combinatória como um arranjo, uma permutação ou uma combinação. Neste texto, ele é reduzido à aplicação em problemas elementares, diretamente associados ao senso comum. Pior ainda, os autores nunca enunciam, no texto, o princípio da multiplicação, limitando-se a empregá-lo em exemplos específicos! Seu enunciado, errado, fica relegado ao quadro-resumo da página 244. O erro consiste em que para que o princípio da multiplicação seja válido é suficiente exigir que o número de ocorrências de cada evento seja independente das ocorrências dos outros eventos considerados. Na maior parte das situações interessantes, as escolhas em cada etapa dependem, sim, das escolhas anteriores. Para que o princípio multiplicativo possa ser usado, basta que o número de escolhas em cada etapa não dependa das escolhas anteriores.

O restante do capítulo consta de uma apresentação de análise combinatória que enfatiza a compartimentalização e o encaixe de cada problema em um dos tipos permutações, arranjos e combinações. Por exemplo, na página 246, ao se introduzirem as permutações, é afirmado simplesmente, sem nenhuma explicação ou motivação, que, "como decorrência do princípio multiplicativo, surge [!] a fórmula $P_n = n!$" Embora os exemplos que se seguem a esta afirmação sejam, por vezes, feitos de dois modos — pelo princípio da multiplicação e aplicando a fórmula — a introdução da fórmula da maneira acima pode levar o aluno a focar atenção nela. Assim, o texto arrisca a se enquadrar em uma linhagem de livros que formaram inúmeras gerações de estudantes que não compreendem a análise combinatória, não percebem os princípios básicos por trás da solução dos problemas, e que detestam esta parte da Matemática.

No caso da apresentação dos arranjos, o livro tenta ser mais claro, mostrando como a fórmula dos arranjos é conseqüência do princípio multiplicativo, mas sua explicação é concisa, seca, não conversa com o aluno. A partir de dois exemplos, os autores induzem a fórmula geral, que poderia muito bem ser devidamente deduzida a partir do princípio da multiplicação. Em lugar disso, a partir dos exemplos numéricos (cujos resultados são $5 \times 4 \times 3$ e 12×11), o livro afirma que se pode "estabelecer a seguinte expressão para a resolução dos problemas de arranjos simples: $A_{n,p} = n!/(n-p)!$".

A exposição das combinações segue o mesmo modelo das anteriores, aplicando-se a ela os mesmos comentários.

O binômio de Newton, tratado na seção 4, é reconhecidamente um tópico problemático para alunos que não têm uma forte tendência matemática. Como contextualizá-lo? Como apresentar situações relevantes para o aluno envolvendo o binômio de Newton? Que apresentar como aplicação? Estranhamente, os livros-texto nunca utilizam uma abordagem histórica para a apresentação do binômio de Newton. Ela mostra uma história de milhares de anos que culminaram na formulação de Newton para potências reais arbitrárias de uma soma $(a+b)$, mas que só foi definitivamente provada muito depois, quando as técnicas matemáticas envolvendo séries e sua convergência já tinham sido formuladas e refinadas.

A abordagem empregada no livro é, outra vez, puramente indutiva. Simplesmente se observa a expansão de $(x+a)^3$ e se observa que os coeficientes são da forma $C_{3,p}$. A partir deste único exemplo, se induz a fórmula geral. Assim, o aluno fica com a impressão que o aparecimento de coeficientes desta forma é ou algo puramente acidental ou cuja justificativa esteja além de sua capacidade de entendimento, o que não é verdade.

Após o binômio de Newton, o texto aborda o triângulo de Pascal, na seção 5. O triângulo de Pascal pode ser um ótimo tópico para exercitar o aluno na percepção de regularidades, na formulação de conjecturas e na prática de uma ferramenta matemática fundamental: a indução matemática. Ao contrário do que pensam muitos autores de livros-texto para o ensino fundamental ou médio, a geometria não é o campo exclusivo da demonstração matemática, o tipo de argumentação característico da Matemática. Pode-se demonstrar em qualquer campo da Matemática elementar.

O texto ignora completamente as possibilidades do triângulo de Pascal como material para que se exercite a habilidade de demonstrar em Matemática. Os resultados gerais são obtidos por indução a partir de um ou dois exemplos. Como entender portanto o que se pede no exercício 109, da página 271, em que se pede que o aluno demonstre um fato geral? Deseja-se que ele o exemplifique, como tem sido induzido pelo livro texto?

Outra possibilidade que não é explorada neste capítulo é a interpretação combinatória das identidades apresentadas.

O Capítulo 7 trata das probabilidades. Principia definindo espaço amostral, evento e probabilidade. Na página 282, como na maior parte dos livros para o ensino médio, o livro utiliza linguagem inapropriada ao se referir a "espaços amostrais equiprováveis". Ora, equiprobabilidade é atributo da função de probabilidade e não do espaço amostral. Outra deficiência é encontrada na conversa com o professor da página 287. O texto menciona o "valor" de um espaço amostral. Ora, o espaço amostral, um conjunto finito, não tem valor, tem cardinalidade, o número de seus elementos.

Na página 300 define-se probabilidade condicional. A linguagem utilizada não é, mais uma vez, a ideal, quando se faz referência a probabilidade condicional como sendo o "cálculo de probabilidade de um evento sabendo que algum outro já ocorreu". Esta visão passa uma idéia de que o evento condicionante é sempre temporalmente anterior ao condicionado, o que não é correto.

Na página 305 introduz-se a distribuição binomial, que normalmente não é abordada nos livros para o ensino médio. Sua inclusão é bem-vinda, dando ao aluno melhores instrumentos para compreender o uso de probabilidades que é feito em outras disciplinas (principalmente em Biologia, no estudo de Genética).

Apesar dos problemas apontados acima, o capítulo sobre probabilidades é, no todo, satisfatório, incluindo uma coleção de exercícios, muitos deles contextualizados, que contribuem para o aprendizado. Sente-se a falta, porém, de situações em que os alunos sejam levados a tomar decisões, apoiados em probabilidades.

A geometria, neste livro, é abordada a partir do Capítulo 8, intitulado Geometria de Posição. A seção 3, denominada intuição e fatos geométricos, na qual o autor comenta o que é postulado e teorema é muito sucinta em seus comentários do que é o método dedutivo. Além disso, contém uma afirmativa perigosa: "Não há necessidade, também, de demonstrar todos os teoremas na criação dessa teoria". Ora, no método dedutivo uma afirmativa só recebe o nome de teorema se for deduzida dos postulados (ou axiomas) e de teoremas precedentes. Assim, esta afirmativa pode induzir o aluno a erro.

A seção 4 ("Alguns postulados e teoremas iniciais") está mal redigida. Principia afirmando "Vamos, agora, ver alguns postulados que indicamos genericamente com a letra P". Para que servem estes postulados? Como foram escolhidos? Tem-se a impressão de que são arbitrários, servem somente de brinquedo para o aluno, quando no entanto os autores os escolheram para neles basear sua construção de geometria.

O primeiro teorema que os autores tentam demonstrar está patentemente errado. O fato de o postulado 1 garantir a existência de infinitos pontos não garante que existam infinitas retas, pois estes pontos podem muito bem ser colineares.

No quadro-resumo da página 337 encontra-se uma afirmativa que pode confundir o aluno. A afirmativa 2 informa que é possível dividir o plano com três retas distintas em seis regiões, e acrescenta que isso é possível de duas maneiras distintas. Isso pode induzir no aluno a crença de que três retas distintas sempre dividem o plano em 6 regiões, o que não é verdade, pois três retas concorrentes duas a duas, mas não simultaneamente concorrentes em um ponto (ou seja, em "posição geral"), dividem o plano em 7 regiões.

A seção 12, relativa a perpendicularismo de retas e planos, começa bem, ilustrando a noção através de objetos concretos. Na página 345, entretanto, o livro omite a demonstração do "teorema do pé de galinha", chamado de teorema fundamental do perpendicularismo, por considerá-la mais elaborada. Ao fazer isso ele pode estar subestimando a capacidade de muitos alunos. Além disso, os alunos deveriam ser expostos, pelo menos uma vez, a um teorema mais substancioso, que exija esforço e persistência para sua compreensão.

A seção 15, relativa a projeções ortogonais, é bastante interessante, dando ao aluno a oportunidade de trabalhar com vistas de sólidos, o que é bastante útil nas aplicações. A seção 16, sobre distâncias, também é interesante, permitindo ao aluno começar a trabalhar com problemas métricos no espaço, principalmente com o emprego do Teorema de Pitágoras. Uma omissão a ser registrada é que o texto não menciona a distância entre duas retas reversas no espaço.

O Capítulo 9 trata da geometria métrica espacial. Seu primeiro tópico é o prisma. Na página 369, encontram-se "dicas" para resolver problemas de geometria. Em verdade, estas "dicas" mereciam ser desenvolvidas e exemplificadas para serem transformadas realmente em auxílio e guia para a resolução de problemas. A maneira sucinta e seu pequeno número sugerem mais uma mecanização de passos a serem seguidos do que realmente um guia para a organização do pensamento.

Na página 377, o livro aceita o princípio de Cavalieri como um postulado. A redação é pobre, não destacando a importância do princípio como uma ferramenta para calcular volumes. Como em todo o capítulo, se segue uma boa coleção de exercícios relativos a prismas, muitos deles contextualizados.

O mesmo padrão se repete nas seções relativas ao estudo do cilindros, coroadas por uma coleção de exercícios interessantes e contextualizados.

Na página 392, principia o estudo das pirâmides, com a frase "Os objetos desenhados são pirâmides ou troncos de pirâmide". No entanto, entre os exemplos figuram um obelisco e uma barraca de acampar, que não pirâmides ou troncos de pirâmides (embora possam ser decompostos em tais sólidos).

A seção 10 estuda a seção de uma pirâmide por um plano paralelo à base. Se aposta, corretamente, que a pirâmide determinada por tal plano é semelhante à original (embora não se explique, exatamente, o que isso quer dizer). De todo o modo, se aponta para o fato fundamental de que a razão entre áreas correspondentes em pirâmides semelhantes entre si na razão k é igual a k^2. Depois, no quadro-resumo da página 405, esta propriedade é estendida para a razão entre os volumes.

Na seção 11, páginas 401 e 402, a demonstração da expressão para o volume de uma pirâmide usando o princípio de Cavalieri e o fato de que um prisma pode ser decomposto em pirâmides é confusa e não deixa claro o que está acontecendo. Em particular, não é apresentada qualquer justificativa para as três pirâmides em que o prisma triangular é decomposto terem volumes iguais.

Os cones são estudados a partir da página 412. Mais uma vez, o livro tem dificuldades em utilizar de modo claro o princípio de Cavalieri para calcular o volume do cone, na página 417. Outra vez, porém, os exercícios são bem escolhidos.

As esferas são abordadas a partir da página 421. Após serem estabelecidas as definições e serem estudadas as seções determinadas por um plano, passa-se ao estudo da área e do volume, cujas fórmulas são apresentadas como postulados (!). Seria mais conveniente afirmar que seus cálculos estão além do nível de profundidade deste livro e que portanto serão aceitos sem demonstração (isto não é bem verdade, porém: é possível utilizar o princípio de Cavalieri para se obter o volume da esfera). A afirmação feita, sem nenhuma explicação, pode induzir o aluno, mais uma vez, ao erro de acreditar que as expressões apresentadas para a área da superfície e para o volume da esfera realmente são postulados, ou seja, não são demonstradas. Pior ainda, pode levá-los a pensar que sempre que temos dificuldades para deduzir uma expressão, podemos introduzí-las como postulados.

É interessante observar que o livro não aborda a estrutura de poliedros, tema em geral incluído na geometria do ensino médio.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 2

Este volume tem características semelhantes às já analisadas no Volume 1. A proposta do livro é construtivista, cabendo ao aluno construir seu conhecimento, através de exemplos e exercícios. As conclusões são sistematizadas através de quadros-resumo, que enunciam os "teoremas" resultantes de tais atividades.

Principiar o estudo através de exemplos e exercícios é uma excelente idéia. Em alguns casos, a passagem dos exemplos para o caso geral é devidamente conduzida pelo livro. Mas na maior parte dos casos isto não é feito. Assim, o aluno observa um certo número de exemplos e, a seguir, tem, no quadro-resumo, um resultado que é consistente com o que ele observou. Este procedimento é apropriado para as ciências experimentais, mas não para a Matemática, cujo método de argumentação é o método dedutivo. Neste livro, o aluno tem grande chance de ficar confuso a respeito disso. No desenvolvimento da teoria, a maior parte das demonstrações consiste verificar um certo número de exemplos. O que se espera do aluno, então, quando se pede, em um exercício, para que demonstre algo?

O livro, no entanto, possui também boas qualidades. O texto é claro e agradável, os diversos assuntos são tratados com um enfoque correto e os exemplos e exercícios são muito bem escolhidos. Se o professor que o utilizar souber fazer as passagens entre os exemplos e os fatos presentes nos quadros-resumo, ele poderá ser de bom proveito para o aluno. Se mal utilizado, no entanto, poderá marcar o aluno com uma visão equivocada de como se conduz uma argumentação matemática.

Maria Helena e Spinelli

Matemática – volume 3

Descrição sucinta do Volume 3

Este terceiro volume da coleção tem as mesmas características que os outros, e por isso aplicam-se a ele as mesmas observações feitas à coleção, como um todo.

Neste volume, os conteúdos estão distribuídos em 7 capítulos, sendo que o último é uma revisão, intitulada Vestibulares-Revisão, que cobre todo o conteúdo usual de matemática do Ensino Médio. Incluindo esta revisão, o livro tem 335 páginas de texto, excluindo as respostas dos exercícios. Os capítulos são Geometria Analítica Plana I – Pontos, Segmentos e Retas; Geometria Analítica Plana II; Números complexos; Polinômios; Equações Algébricas; Introdução à Estatística; Vestibulares-Revisão.

Como os demais volumes, o livro tem uma proposta construtivista, onde o aluno "descobre", através da resolução de exercícios, os resultados, que são formalizados nos quadros-resumo.

Também como nos demais volumes, a apresentação gráfica é de ótima qualidade.

Análise detalhada do Volume 3

O primeiro capítulo, sobre geometria analítica plana, principia lembrando a história da geometria analítica e a inter-relação da álgebra com a geometria. O capítulo aborda, sucessivamente, os tópicos iniciais de geometria analítica. Entre outros: o plano cartesiano, distância entre pontos, divisão de segmentos, equação da reta, distância de um ponto a uma reta. O tratamento é simples, sem erros, com muitos exemplos. As ilustrações ajudam o aluno a compreender o que é explicado.

Uma seção interessante, normalmente ausente de livros-texto para o Ensino Médio, é a de número 7, intitulada Demonstrações de Geometria Plana com o Uso de Geometria Analítica. Os autores destacam a importância de uma escolha conveniente dos eixos coordenados e, no exemplo que dão, explicitam claramente o que é hipótese e o que é tese do teorema. Entre os exercícios propostos nesta seção, todos de demonstração fácil, o mais interessante é o de número 54, página 35, que pede para demonstrar que se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é retângulo.

Na seção 8, A Equação da Reta: Descrição Algébrica, encontramos deficiências. Em primeiro lugar, afirma-se (página 38) que o aluno já aprendeu que a reta inclinada pode ser escrita na forma $y = ax + b$. Ora, o tratamento do assunto feito anteriormente, nada deduz, simplesmente apresenta. Agora, após a seção em que são feitas e propostas demonstrações, seria conveniente ver esse tipo de argumentação incorporado na exposição dos conteúdos. A apresentação do livro induz no aluno a idéia de que demonstrações podem aparecer em exemplos e exercícios, mas que os conteúdos propriamente ditos as dispensam. São fatos que devem ser aceitos, usados, mas não discutidos. A postura do livro é reforçada na mesma seção, quando afirma (página 34) que "Através de um exemplo numérico podemos verificar que m é a declividade ou coeficiente angular da reta t".

Neste volume, os quadros-resumo continuam não sendo usados como resumos da matéria exposta. Funcionam mais como destaques para fórmulas ou fatos não cobertos no texto. Freqüentemente, eles têm a finalidade de apresentar as conclusões tiradas a partir dos exercícios imediatamente anteriores. Assim, reforçam a atitude nociva de que fatos matemáticos podem ser demonstrados verificando uma lista de exemplos.

O livro não se afasta da tradição curiosa dos textos para o Ensino Médio de apresentar a condição de alinhamento de três pontos sob a forma de um determinante. Certamente ela pode ser escrita como um determinante, mas nesse contexto tal associação é artificial, não preenche nenhuma função útil e é além disso totalmente dispensável. Se o texto quiser insistir, a todo custo, em fazer esta associação, poderia dizer que se os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) estão alinhados, satisfazem todos eles uma certa equação $ax + by + c = 0$, ou seja, que o sistema

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \\ ax_3 + by_3 + c &= 0 \end{aligned}$$

tem solução não trivial a, b, c. Escrevendo a condição de existência de solução deste sistema homogêneo (nas incógnitas a, b e c) na forma de determinante, obtém-se o resultado desejado.

De toto o modo, a condição de alinhamento através de determinante é deduzida de forma correta, embora artificial. No entanto, para a expressão por determinantes da área do triângulo, se recorre, mais uma vez à verificação através de exemplo, seguida da fórmula apresentada em um quadro resumo.

Entre as várias "formas" da equação da linha reta o livro inclui a forma paramétrica. Infelizmente, não há motivação ou contextualização e nem mesmo demonstrações. Afirma-se simplesmente (página 52) que "A equação de uma reta também pode ser escrita numa forma em que x e y são dados em função de uma outra variável ou parâmetro (t, por exemplo)." Apenas posteriormente se esclarece que estas funções devem ser do 1º grau.

A determinação da distância de um ponto a uma reta, na seção 12, páginas 59–61, é bem feita, principiando por um exemplo numérico e chegando à fórmula geral, que é motivada pelo exemplo.

Os lugares geométricos, discutidos nas páginas 62 e 63, com exemplos simples, merecem mais destaque (não são nem mesmo uma seção independente) e que fossem dados exemplos mais interessantes e substanciosos de problemas sobre lugares geométricos. O livro acaba se concentrando na determinação das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas, quando muitos outros exemplos poderiam ser explorados.

O capítulo se encerra com o estudo adequado de gráficos de inequações do 1º grau a duas variáveis.

O Capítulo 2 é dedicado às cônicas. Nele, os autores seguem o tratamento usual dos livros-texto do Ensino Médio. Definem as cônicas como seções planas de um cone circular reto e em seguida esquecem isso completamente. Enunciam as definições métricas das cônicas e a partir delas deduzem suas equações cartesianas, sem nenhuma menção de que tais propriedades são conseqüência da definição geométrica enunciada originalmente. Obviamente, não pretendemos que os autores demonstrem os teoremas de Dandelin que mostram como deduzir as propriedades métricas das cônicas a partir de sua definição geométrica mas deveria ser mencionado, no texto, o relacionamento entre as duas definições. Aliás, neste capítulo, os autores incorrem em erro muito comum nos livros para o Ensino Médio: afirmam que uma hipérbole é obtida intersectando o cone com um plano paralelo ao eixo da superfície cônica. Isso não é verdade. A intersecção de qualquer plano com uma superfície cônica gerará uma hipérbole desde que o plano intersecte as duas folhas da superfície. Uma virtude deve ser destacada no estudo das cônicas: o texto relaciona o estudo das parábolas aos gráficos de funções quadráticas, estudadas no Volume 1. É comum, nos livros do ensino médio, não se fazer esta conexão.

No quadro-resumo da página 81 encontramos sério erro. Encontra-se no texto a afirmação de que equações do tipo $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ "podem estar descrevendo um ponto ou outra figura geométrica qualquer". Ora, a equação geral do 2º grau $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sempre representa ou uma circunferência, ou um ponto (caso de raio igual a 0), ou o conjunto vazio.

Aliás, este livro também repete a omissão de todos os livros do Ensino Médio: eles mostram, por exemplo, que as coordenadas dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo (a circunferência) satisfazem uma equação do tipo $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, mas nunca mostram, reciprocamente, que se as coordenadas de um ponto satisfazem uma equação deste tipo então ele pertence a uma circunferência. A demonstração de que se as coordenadas de um ponto satisfazem uma relação do tipo $f(x, y) = 0$ então ele pertence a uma certa figura, não é feita nem mesmo no caso simplíssimo da linha reta.

Os exercícios apresentados ao longo do capítulo são adequados para a fixação dos conceitos. No entanto, são poucos os exercícios contextualizados.

O Capítulo 3 trata dos números complexos. A introdução, interessante em si, está mal conduzida. Os autores apresentam a necessidade de ampliações sucessivas do conceito de número, o que é bem apropriado para motivar a introdução dos números complexos, mas de repente prejudicam este trabalho inicial de motivação com a pergunta abrupta "e $\sqrt{-1}$ é número real?" Um encaminhamento melhor, que coroaria o desenvolvimento que vinham seguindo seria apresentar a equação $x^2 + 1 = 0$ e discutir a necessidade de ampliar o conjunto dos números reais a fim de que ela tenha solução. O texto também não menciona que os números complexos são importantes em muitas aplicações. Pelo que está escrito, parece que os números complexos são simples elaboração de matemáticos para deleite intelectual.

A seção 7, nas páginas 157 e 158 trata, de maneira clara e didática, as potências de i e de $(1 + i)$. A partir da página 159, os números complexos começam a ser considerados vetores e representados no plano de Argand-Gauss. Este fato não é, porém, completamente explorado. Por exemplo, o exercício R8 da página 173, pede para representar graficamente os complexos z tais que $|z + 1 + i| = 2$. O exercício é resolvido corretamente, exprimindo-se algebricamente a condição dada e obtendo-se uma equação, que é reconhecida como sendo de uma circunferência. Mas tal conclusão poderia ser obtida de modo imediato, apenas observando-se que $|z+1+i| = |z-(-1-i)|$ e, portanto, representa a distância do complexo z ao ponto $-1-i$.

Na página 164 é apresentada a forma trigonométrica dos números complexos. Na página 168, o primeiro resultado do Quadro-Resumo, que mostra como multiplicar complexos dados em forma trigonométrica, é demonstrado logo em seguida. A forma trigonométrica é utilizada logo depois, na página 173, para calcular raízes de números complexos, o que conduz naturalmente à representação gráfica das raízes de um número complexo.

O Capítulo 4 trata dos polinômios. O capítulo enfatiza o algoritmo de Briot–Ruffini para, entre outras coisas, calcular o valor numérico de um polinômio.

Não se explica, porém, para o aluno que vantagens ele apresenta em relação à simples aplicação da definição. Nas páginas 193 e 194 (Seção 4), é feita a confusão, quase universal entre livros para o Ensino Médio, entre polinômios iguais como funções (polinômios cujos valores numéricos sejam iguais para todo x) e polinômios idênticos (polinômios com coeficientes respectivamente iguais). As duas noções são equivalentes, mas isto precisa ser demonstrado. Da forma como apresentado no livro, isto não fica claro.

Na seção 5, sobre divisão de polinômios, o autor apresenta dois métodos para dividir polinômios: a divisão pelo algoritmo da divisão e pelo método dos coeficientes a determinar, o qual repousa de maneira essencial entre a coincidência entre polinômios iguais e identicamente iguais. Em seguida, os autores utilizam o algoritmo de Briot–Ruffini para dividir um polinômio por $(x-a)$. em seguida, trata-se da divisão sucessiva de um polinômio por $(x-a)$, $(x-b)$, ... , $(x-k)$ e aplica-se mais uma vez o algoritmo de Briot–Ruffini para efetuar a divisão.

Ao se apresentar o algoritmo de Briot–Ruffini para a divisão por $(x-a)$ citam-se de passagem dois resultados fundamentais: o teorema do resto (o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$ é igual a $P(a)$) e o teorema de D'Alembert ($P(x)$ admite o fator $(x-a)$ se e somente se $P(a)=0$). A importância destes fatos mereciam um maior destaque na exposição, que é um pouco confusa.

A partir do conhecimento adquirido neste capítulo sobre os polinômios, os autores estudam, no Capítulo 5, as equações algébricas. Na seção 1, lemos a afirmação de que os coeficientes de uma equação algébrica serão números complexos e na seção 2 é enunciado o seguinte resultado: "Uma equação algébrica de grau n, com n raízes, pode ser decomposta em um produto de n binômios do tipo $(x-x_i)$". Ora, se antes é afirmado que os coeficientes de uma equação algébrica são números complexos, toda equação algébrica terá n raízes. O encaminhamento dado pelos autores mostra o pouco entendimento do teorema fundamental da álgebra, que é enunciado sumariamente neste livro (página 224), sem nenhuma ênfase. A seção limita-se a mostrar como utilizar o algoritmo de Briot–Ruffini como ferramenta para a decomposição de um polinômio em fatores lineares.

O restante do capítulo ocupa-se com as relações de Girard entre os coeficientes de uma equação algébrica e suas raízes e com a pesquisa das raízes racionais de uma equação com coeficientes inteiros e das raízes não reais de uma equação com coeficientes reais. Estes últimos itens são estudados sem nenhuma demonstração, embora fosse fácil demonstrar os resultados obtidos. No caso das raízes complexas, seria inclusive uma oportunidade de utilizar o conceito de complexo conjugado e mostrar que, sendo $P(x)$ um polinômio de coeficientes reais, tem-se $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$.

O Capítulo 6 estuda a estatística. Após uma breve introdução sobre a importância da estatística, o livro estuda, na seção 2, a organização e apresentação de dados. Em seguida, apresenta, na seção 3, as medidas de posição, terminologia com que designa a média, mediana e moda. Em seguida, na seção 4, apresenta as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio-padrão. A apresentação de todos estes conceitos é acompanhada de um bom número de exercícios bem contextualizados.

Na seção 5, encontra-se a atividade da coleção que envolve de modo mais eficiente os alunos, que são convidados a executar, em grupo, trabalhos envolvendo a realização de experimentos e a tabulação e análise dos resultados.

O Capítulo 7 consiste em uma ampla revisão da matemática do Ensino Médio, além de porcentagens, cálculos numéricos e geometria plana, como preparação do vestibular. Inclui 373 questões de múltipla escolha, retiradas de vestibulares de todo o país.

Resumo dos comentários relativos ao Volume 3

Este volume apresenta a mesma mistura de qualidades e defeitos dos demais. No lado positivo, devem ser destacados o texto claro, a boa escolha de exemplos e exercícios e o tratamento adequado dado à maior parte dos assuntos. Também do lado positivo está a preocupação em que o aluno tenha uma participação ativa em seu aprendizado, explícita na proposta do livro.

Os problemas também são os mesmos descritos nos outros volumes. A proposta construtivista é implementada através da "descoberta" de resultados nos exercícios de compreensão, seguidas de quadros-resumo que procuram sistematizar estes resultados. O que ocorre é que, na maior parte dos casos, o trabalho desenvolvido nos exercícios não é suficiente para demonstrar os resultados, servindo como simples confirmação de sua plausibilidade. Para que o aluno não adquira a impressão de que demonstrar um fato matemático consiste em verificá-lo através de exemplos, é necessária a intervenção do professor, complementando os exercícios de compreensão com uma etapa de generalização dos resultados, através do estudo do caso geral.