Márcio Cintra Goulart

A Matemática no Ensino Médio – volume 1

Das 317 páginas deste livro, apenas 100 (em corpo graúdo) são de texto matemático. As restantes 217 (em corpo pequeno) contêm exercícios propostos, exercícios resolvidos e notas para leitura complementar. O texto matemático é escrito numa linguagem objetiva e comunicativa, embora contenha impropriedades e cometa omissões que serão apontadas a seguir. Os exercícios, tanto os resolvidos como os propostos, são por vezes interessantes. Em grande parte dos capítulos, entretanto, faltam problemas que se refiram a situações reais, que ilustrem a integração da Matemática estudada na escola com a vida atual. As leituras complementares são escritas em estilo agradável mas a conexão das mesmas com o texto é muitas vezes tênue ou inexistente.

Passemos a uma análise pontual do livro.

Capítulo 1. Conjuntos numéricos

Este capítulo é, na realidade, uma revisão, apresentada no mesmo nível e estilo que os alunos já viram da 5ª à 8ª série. Não são oferecidas explicações adicionais nem é feito um estudo mais detido dos conceitos. Seu melhor ponto são os exercícios, que constituem uma interessante coleção daquilo que antigamente se chamava "problemas sobre as quatro operações".

Os livros da primeira série do Ensino Médio costumam, em geral, trazer no início um capítulo contendo noções elementares sobre conjuntos. Isto não é feito aqui e essa ausência repercutirá no restante da coleção. Os conjuntos constituem o modelo matemático para as noções básicas da Lógica, como implicação, negação, disjunção, conjunção, condições necessárias e/ou suficientes, etc. Neste capítulo inicial caberiam ainda explicações sobre o significado de noções indispensáveis para o discurso matemático, tais como definição, teorema, corolário, postulado, etc.

Estudantes de 15 anos ou mais, para quem este livro é escrito, têm maturidade suficiente para entender explicações convincentes e aplicações contextualizadas dos temas matemáticos que estudam. Isto é necessário para que entendam a importância do conhecimento matemático na vida atual e também para que não fiquem com a idéia de que a Matemática consiste numa série de afirmações peremptórias e símbolos abstratos que se devem manipular de acordo com regras ditadas pela autoridade dos mestres e dos compêndios.

Neste capítulo, sente-se a falta de várias explicações que, se tivessem sido dadas, ajudariam o leitor a melhorar seu conhecimento matemático e amadurecer intelectualmente.

A primeira frase do livro é: "Os números naturais surgem da contagem dos elementos de uma coleção finita ..." Isto estaria bem no curso primário. Neste nível, a verdade inteira deveria ser dita. Os números naturais são o modelo matemático necessário para efetuar uma contagem. Contar os elementos de um conjunto X é estabelecer uma bijeção entre X e um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se tal bijeção existe, diz-se que X é finito e tem n elementos. Em suma, para contar e para saber o que é uma coleção finita, é preciso antes conhecer os números naturais. Se quisermos adotar uma atitude de antropólogo, poderemos alterar ligeiramente a frase acima, dizendo: "Os números naturais são um instrumento (modelo) matemático criado a fim de permitir a operação de contagem dos elementos de uma coleção."

A propósito: não é verdade que 0 tenha surgido como o número de elementos de um conjunto vazio. Nenhum dos nossos ancestrais cometeu a insensatez de contar os elementos de $\emptyset$. O zero surgiu da necessidade de preencher as casas vazias na expressão de um número num sistema de numeração posicional.

Ao contrário do que está escrito na página 9, o símbolo $\Rightarrow$ não significa "então". Por exemplo, é errado escrever "se n é múltiplo de $6 \Rightarrow n$ é par". Existe um símbolo (pouco usado) que significa "então". Ele é $\therefore$.

Insistimos que, ao rever tópicos já estudados de forma incipiente no Ensino Fundamental, o autor de um livro do Ensino Médio deve aproveitar a ocasião para esclarecer certos pontos que, de fato, necessitam de uma conceituação precisa a fim de serem utilizados satisfatoriamente no que se segue. Este princípio é violado na brevíssima revisão sobre números naturais onde, por exemplo, nunca se diz o que significa um número maior do que o outro nem por que $n + 1$ se chama o sucessor de n. (Então $\frac{p}{q} + 1$ seria o sucessor de $\frac{p}{q}$?) E, da maneira como está dito na página 9, fica a impressão de que conjunto infinito é aquele que não tem maior elemento. Isto é um teorema, válido apenas para números naturais. Por exemplo, o conjunto dos inteiros negativos é infinito mas -1 é o seu maior elemento.

Na página 12, a implicação $a > b \Rightarrow a - b > 0$ (junto com outras análogas) causa confusão. Em primeiro lugar, o símbolo correto aqui seria o de equivalência: $\Leftrightarrow$. Em segundo lugar, como não foi dito antes o que significa o sinal $>$, fica a dúvida: isto é uma definição? Ou é um teorema?

A noção matemática mais importante relativa a números inteiros é a divisibilidade, que deve fazer parte de qualquer formação básica. Ela não é mencionada sequer nos exercícios, embora vá ser usada no Volume 3.

Ao tratar dos números racionais, não é dito que m/n é o número que multiplicado por n dá m. Ou seja, que o número racional m/n foi inventado para que a equação $nx = m$, com $n \neq 0$, tenha sempre solução. Essa omissão é inexplicável, uma vez que o livro de Caraça é destacado no texto e citado na lista de obras consultadas. (O livro inteiro de Caraça é centrado em torno do princípio dialético da negação da negação, com o qual ele explica as sucessivas extensões do conceito de número.)

Quando aborda a ordenação dos números racionais, o livro traz a frase: "Para comparar dois números racionais a, b com $a \neq b$, temos: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0\ldots$" Que significa "temos" neste contexto? Trata-se de uma definição? Se é assim, que significa $a - b > 0$? É uma recordação? Então, em vez do ambíguo "temos", dever-se-ia dizer: "lembremos que" ou algo semelhante.

O fato mais importante a respeito da relação de ordem entre os números (sejam eles naturais, inteiros, racionais ou reais) é que tal relação é compatível com as operações. Noutras palavras, valem a monotonicidade da adição e da multiplicação por números positivos. Por exemplo, a monotonicidade é que permite a resolução de inequações. A monotonicidade não é destacada (nem sequer mencionada) aqui. Por isso é usada quase toda a página 22 (em corpo miúdo) para mostrar que $x < y \Rightarrow x < \dfrac{x+y}{2} < y$, quando bastava observar que $x < y \Rightarrow 2x < x + y$ e $x < y \Rightarrow x + y < 2y$ logo $x < y \Rightarrow 2x < x + y < 2y$ e daí $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. (Menos de duas linhas.)

Ao motivar a introdução dos números irracionais, está dito na página 24: "$\sqrt{2} \cong 1{,}414$ mas não é dízima periódica. Equivale a dizer que não é possível colocar $\sqrt{2}$ como razão a/b entre dois inteiros. Isso pode ser demonstrado." Parece até que a demonstração deste fato seria complicada e/ou desinteressante. A verdade é precisamente o contrário: é um dos argumentos mais simples e belos da Matemática. Com efeito $\sqrt{2} = a/b$ equivale a dizer $a^2 = 2b^2$, o que é absurdo pois o quadrado de um inteiro possui um número par de fatores iguais a 2. Esse número (de fatores 2) é par no primeiro membro da suposta igualdade e ímpar no segundo. Que motivo leva um autor a privar seus leitores (aos quais deve estar educando) de conhecer este primor de elegância, onde o método de redução ao absurdo é tão claramente exibido?

O conjunto dos números reais é definido como "a reunião do conjunto Q dos racionais com o conjunto de todos os números irracionais". Mas o que é um número irracional? Isto nunca é dito explicitamente. Dá-se a entender vagamente que é algo representado por uma expressão decimal infinita e não-periódica. Mas as expressões decimais infinitas não têm seu significado esclarecido. Tampouco se mostra (e seria tão fácil fazê-lo!) que a expressão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica. (Na divisão continuada de m por n ocorrem no máximo $n - 1$ restos não-nulos diferentes. No momento em que ocorra uma repetição começa a periodicidade.) Curioso é que nenhum livro didático brasileiro explica isso.

"A cada número real fica associado um único ponto da reta e a cada ponto da reta fica associado um único número real. Assim, dizemos que a reta numérica está completa."

Este parágrafo, na página 25, é um modelo de imprecisão. O que se está querendo dizer é que existe uma bijeção entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma reta. Mas a qual bijeção se está referindo? (Há uma infinidade delas.) Como se define essa bijeção? E a frase "Assim a reta numérica está completa", que quer dizer? O que é reta numérica? Completa em que sentido? Tudo vago e misterioso. Os alunos e (principalmente!) seus professores precisam saber sobre que coisas estão falando; precisam aprender a não usar palavras ou expressões cujo significado não lhes é claro e preciso.

Na página 26, um exercício manda racionalizar o denominador de uma fração. Por que existe esse hábito? Algumas palavras para justificá-lo seriam benvindas.

O capítulo chega ao fim sem que o leitor fique com uma idéia do que significa somar, subtrair, multiplicar ou dividir dois números reais, quer considerando-os como decimais infinitas quer como pontos de uma reta. Tampouco é dito como saber se $a < b$ quando a e b são dados por suas expressões.

Capítulo 2. Progressões

Como quase todos os seus congêneres, o livro define seqüência como um conjunto ordenado, o que é incorreto. Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos. Assim, $\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,2\}$ mas as seqüências $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,2,2)$ são diferentes umas das outras. Uma seqüência é uma função cujo domínio é um conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ (seqüência finita, com n elementos) ou o conjunto $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ (seqüência infinita). Ao escrever fórmulas que exprimem o n-ésimo termo de uma seqüência, os autores poderiam dar-se conta de que estão lidando com uma função de n.

Lei de formação (dos termos de uma seqüência) não é sinônimo de lei de recorrência. Além disso, como ocorre na seqüência de Fibonacci, na definição de uma seqüência por recorrência cada termo é dado em função de alguns anteriores (ou mesmo todos), não apenas um.

A noção de seqüência monótona não é definida mas o primeiro exercício fala em seqüência crescente.

Tendo sido representados os números reais como pontos de uma reta, uma progressão aritmética deveria também ser exibida como uma seqüência de pontos igualmente espaçados sobre a reta. Outras imagens geométricas úteis seriam os gráficos de algumas seqüências. Em particular, os pontos do gráfico de uma progressão aritmética seriam colineares. Daí resultaria imediatamente que uma progressão aritmética fica determinada quando se conhecem dois de seus termos. E a interpolação de meios aritméticos (pedida num exercício mas nunca definida no texto) ganharia um significado claro. De um modo geral, a interação entre os pontos de vista algébrico e geométrico é didaticamente valiosa mas não é explorada aqui como deveria.

O fato de que, numa progressão aritmética, cada termo (menos o primeiro e o último) é a média aritmética entre seus dois vizinhos deveria ser visto (e ficaria óbvio) geometricamente. Aliás, esta propriedade caracteriza as progressões aritméticas, entre todas as seqüências.

A fórmula do termo geral deveria vir logo após a definição de progressão aritmética. É curioso que os autores de livros didáticos brasileiros, que são unânimes em incluir o zero entre os números naturais, excluem-no quando ele seria mais conveniente. Se as progressões começassem com x_0 em vez de x_1, as fórmulas como a do termo geral ficariam mais simples.

Na página 62, a fórmula $a_n = a_p + (n-p)r$ é apresentada como "um resultado mais abrangente" do que a fórmula do termo geral. Na verdade, não é. Com efeito, se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma progressão aritmética então $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n, \ldots$ também é uma progressão aritmética onde a_p é o primeiro termo e a_n é o termo de ordem $n-p+1$. De resto, esta "propriedade mais abrangente" é irrelevante. Uma importante tarefa do livro didático é o de orientar o aluno (e seu professor) destacando os fatos importantes e não dar relevo a peculiaridades inconseqüentes.

Há 95 exercícios propostos. Em 78 deles, a expressão "progressão aritmética" ocorre no enunciado.

No final da página 74, um exibicionismo poético desnecessário.

Progressões geométricas são bem mais interessantes do que aritméticas, não apenas porque são mais ricas matematicamente como também pela multiplicidade de suas aplicações na vida real, em problemas de natureza financeira, econômica, física, química, biológica, farmacológica, etc. Infelizmente essa variedade de usos contextualizados da noção de progressão geométrica é inteiramente omitida, tanto no texto como nos exercícios deste capítulo. Salvo alguns poucos problemas artificiais, praticamente todos os exercícios, propostos ou resolvidos, falam em progressão geométrica no enunciado. O leitor fica com a impressão (errônea) de que o estudo das progressões geométricas serve apenas para resolver problemas sobre progressão geométrica.

O estudo de progressão geométrica segue paralelamente ao de progressão aritmética até a soma dos termos e, em especial, a "soma" de uma infinidade de termos. Aí tem-se um ponto delicado, no qual se pode avaliar a habilidade do autor para equilibrar a correção matemática de um lado e a inexperiência de um leitor de 15 anos do outro. Um momento crucial ocorre na explicação do comportamento de q^n para grandes valores de $n \in \mathbb{N}$. Diferentemente da maioria dos seus congêneres, a conclusão do livro, de que "se $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$ então, à medida que n cresce, os valores de q^n aproximam-se de zero e podem tornar-se tão próximos de zero quanto quisermos" traduz fielmente o significado da expressão $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Infelizmente esta última notação não é usada e a afirmação feita corretamente é peremptória, não acompanhada de justificativa nem ao menos ilustrada com exemplos concretos, logo é difícil de ser entendida. Sequer é feita uma comparação entre o comportamento de q^n para $0 < q < 1$ e para $q > 1$.

No final das contas, o que começou bem acaba mal. Com a desculpa de que a abordagem adequada só poderá ser feita na universidade, o livro se conforma com uma apresentação mal-cozinhada onde não fica claro o significado da "soma" com uma infinidade de parcelas. A idéia de valores aproximados (salvo na frase acima citada) não é explorada, nem ao menos ao falar nas dízimas periódicas (página 88). Ali , a igualdade $0{,}111\ldots = \dfrac{1}{9}$ não tem seu verdadeiro significado esclarecido. Seja como for, o livro contém uma (tentativa de) explicação para as dízimas e isto é um ponto positivo.

Na página 91, um exercício atribuído ao vestibular da Unicamp menciona um computador que constrói uma figura com uma infinidade de triângulos. Fenômeno . . .

Capítulo 3. Funções

Este longo e abrangente capítulo (94 páginas) tem suas quatro primeiras seções dedicadas à noção geral de função, exposta de maneira bastante desordenada. Para começar, o conceito de função nunca é explicitamente definido. Há uma tentativa tardia de formular uma definição ampla, a partir de relações binárias, que fica prejudicada pois o produto cartesiano só é definido entre subconjuntos de $\mathbb{R}$. Logo todas as funções são de variável real e têm valores reais, embora alguns diagramas de flechas sugiram algo mais geral. As coisas nunca ficam cristalinas. Mais ainda: em todos os exemplos as funções são definidas por fórmulas.

Logo no começo, a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é identificada como uma função de n. É o caso de se perguntar: e a própria seqüência, por que não foi considerada como função de n ?

Ainda na página 97 (bem como na página 123, adiante) menciona-se uma progressão aritmética como um “assunto geralmente trabalhado na 1ª ou na 2ª série do ensino médio”. Engraçado é que o assunto acaba de ser exposto aqui mesmo, no capítulo anterior.

Na página 162: “À noção de função, já introduzida, vamos acrescentar o que vem a ser o domínio da função, o contradomínio e o conjunto imagem”. Em primeiro lugar, a noção de função não foi definida antes. E se tivesse sido, como se poderia fazê-lo sem falar no seu domínio e seu contradomínio? Uma função consta de três ingredientes: domínio, contradomínio e correspondência. Não se pode falar de função sem mencionar os três.

O conceito de relação binária é definido na página 115 mas não é apresentado nenhum exemplo de relação que não seja o gráfico de uma função (numérica, definida por uma fórmula). Em seguida, uma função é identificada como um tipo particular de relação, o que é confuso pois até aqui função era correspondência e agora passa a ser um subconjunto de $A \times B$.

A seção 6 intitula-se “função do 1º grau”. Esta terminologia é imprópria porque função não tem grau.

Na página 121 afirma-se que “o gráfico de qualquer função do 1º grau é uma reta”. Afirmação peremptória, não provada, nem sequer tornada plausível com alguns exemplos.

A definição de função linear ($y = ax$) impõe desnecessariamente a restrição $a \neq 0$.

A importante noção de grandezas proporcionais necessita de uma conceituação independente de fórmulas a fim de ser bem aplicada, tanto em problemas contextuais como nas diversas áreas da Matemática. O modelo matemático da proporcionalidade é a função linear $y = ax$ mas o número a freqüentemente não é fornecido nas questões de aplicação, ou é irrelevante (como no Teorema de Tales). Por isso é necessária uma formulação adequada dessa noção milenar, o que não é feito neste livro nem em nenhum outro usado no Brasil atualmente, embora o fosse até algumas décadas atrás.

A propriedade característica das funções afins (do tipo $f(x) = ax + b$) é: acréscimos iguais dados a x provocam acréscimos iguais em $f(x)$. Noutras palavras: $f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h mas não de x. No gráfico, este fato é evidente e bastante elucidativo. Esta propriedade (juntamente com a monotonicidade) é que diz se a função matemática que vai modelar um dado problema é afim ou não. Isto não é mencionado, nem de passagem, no livro. Igualmente é omitida qualquer explicação sobre os significados dos coeficientes a (taxa de variação) e b (valor inicial) na função afim $f(x) = ax + b$.

Um aspecto importante do ensino da Matemática, ao qual devem estar atentos os professores e autores de livros didáticos, é o estabelecimento de conexões entre os vários temas estudados. Aqui temos um exemplo interessante: uma progressão aritmética é a restrição de uma função afim ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Esta conexão é timidamente aludida, num caso particular (página 122), de uma forma curiosa. O autor escreve como se o assunto progressão aritmética, que foi estudado no capítulo anterior, fosse estranho e se refere ao "leitor que já esteja familiarizado com tais termos". Esta conexão deveria ser explorada com mais vigor.

As funções quadráticas são chamadas "funções do segundo grau", como se função tivesse grau. Aqui cabe perfeitamente a restrição $a \neq 0$ porque uma reta não é caso particular de uma parábola; ao contrário, para funções afins tal restrição é injustificável pois uma reta horizontal é ainda uma reta.

O tratamento das funções quadráticas é peremptório (sem explicações) e bastante incompleto. Na longa lista de problemas, apenas dois ($\text{n}^{\underline{\text{os}}}$ 208 e 209) são contextuais. Todos os demais são exercícios sobre funções quadráticas. Isto é lamentável pois o assunto se presta a uma grande variedade de aplicações realísticas bastante interessantes.

Uma tentativa de problema contextual (exerc. resolvido $\text{n}^{\underline{\text{o}}}$ 22) trata de um capital aplicado a juros fixos. A restrição a dois períodos mensais é artificial e esconde a verdadeira natureza do problema (progressão geométrica). O exercício em si é banal e desinteressante. O exercício seguinte (R. 23) também não faz as perguntas certas nem aborda a questão como devia. A verdade sobre o assunto, que o leitor tem o direito de saber, é essa: se $S_n = \dfrac{a}{2}\, n^2 + bn + c \quad (n = 1, 2, \dots)$ então $S_n - c$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética cuja razão é a e cujo primeiro termo é $x_1 = b + \dfrac{a}{2} \cdot$

O gráfico de uma função quadrática é chamado de parábola mas a definição de parábola não é fornecida.

O consagrado método de completar o quadrado, tão útil quanto elementar (mas nem sequer mencionado aqui), nos mostra imediatamente que se $f(x) = ax^2 + bx + c$ então $f(x) = a(x - m)^2 + k$, onde $m = -b/2a$ e $k = f(m)$.

Esta conveniente expressão (conhecida como "a forma canônica do trinômio") permite uma série de conclusões a respeito da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, tais como: se $a > 0$ (respect. $a < 0$), $f(x)$ assume seu valor mínimo (respect. máximo), igual a k, no ponto $x = -b/2a$; $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, m é a média aritmética entre x_1 e x_2; a reta $x = m$ é eixo de simetria do gráfico de $f(x)$; a fórmula que dá as raízes da equação $f(x) = 0$; a menos de uma translação vertical e outra horizontal, o gráfico de $f(x)$ é igual ao gráfico de $y = ax^2$ e daí (após a definição pertinente) se vê sem dificuldade que esse gráfico é uma parábola.

Além das conspícuas ausências mencionadas acima, outras se fazem notar, como a forma fatorada do trinômio, as relações entre os coeficientes e as raízes, isto sem falar no tradicionalíssimo problema de achar dois números conhecendo sua soma e seu produto.

As afirmações feitas sobre funções quadráticas neste livro se baseiam quase todas na simetria da parábola em relação a seu eixo. Mas, como dissemos acima, nunca se disse o que é uma parábola, nem o que é simetria e muito menos se provou que a referida reta é mesmo um eixo de simetria. Uma ressalva deve ser feita para o argumento das páginas 145 e 146, onde se mostra que a função quadrática $ax^2 + bx + c$ assume todos os valores reais a partir de $-\Delta/4a$ (para cima ou para baixo, conforme $a > 0$ ou $a < 0$). Embora a redação possa ser melhorada, deve-se louvar a atitude de raciocinar analiticamente, já que as bases conhecidas são analíticas.

Na página 151 a parábola não intercepta o eixo dos x. Nem poderia, pois tal eixo se estende em ambos os sentidos e nada conseguiria interceptá-lo. No máximo, a parábola poderia intersectá-lo.

A discussão do sinal da função quadrática ficaria bem mais fácil de ser gravada pelos alunos se fosse resumida em palavras: se x está entre as raízes então $f(x)$ tem sinal contrário ao de a; se x está fora do intervalo das raízes então $f(x)$ tem o mesmo sinal de a.

Na página 162 afirma-se que o gráfico da função $y = 1/x$ chama-se uma hipérbole. Mas no Volume 3, onde se estudam hipérboles, as equações dessas curvas são muito diferentes desta e nenhuma explicação é dada sobre a discrepância.

Na página 167 é surpreendentemente afirmado que uma certa função está relacionada com "questões internas da Matemática como em suas aplicações a outras ciências e atividades em certas especializações profissionais". A função é $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ se $x \neq 1$ e $f(1) = 3$. Sem comentários!

Nas páginas 172 e 173 são dadas instruções para traçar gráficos de algumas funções. Em particular, ensina-se que o gráfico de $f(x) + a$ se obtém do de $f(x)$ por translação vertical. Curiosamente não é dita uma só palavra sobre o gráfico de $f(x - a)$ nem tampouco de $f(-x)$. Isto seria útil no estudo das funções trigonométricas, por exemplo.

A definição de função inversa é confusa e não deixa claro por que é preciso supor que f é uma bijeção. Como costuma acontecer, a definição dada não é usada nos exemplos, exercícios ou assuntos posteriormente tratados.

Na página 171 (exerc. 315), a "sugestão nossa" é infeliz. O aluno dificilmente pensaria naquilo por si só. Mais natural seria observar que o enunciado do problema diz que $g(3t - 2) = 9t^2 - 9t + 2$. Pondo $x = 3t - 2$, logo $t = (x + 2)/3$, vem $g(x) = 9[(x + 2)/3]^2 - 9(x + 2)/3 + 2 = x^2 + x$.

A função Sísifo (página 182) é mais um comentário poético do autor. Mas a referência literária melhor não seria Dante e sim Homero, que na Ilíada descreveu com detalhes a lenda de Sísifo de Corinto, condenado por Júpiter ao inferno.

Capítulo 4. Função exponencial

Neste capítulo são introduzidas as potências de expoentes negativos, fracionários e irracionais. As justificativas para as definições dadas não são muito convincentes. O único exemplo de expoente irracional, $5^{\sqrt{2}}$, não é calculado explicitamente, o que seria fácil de fazer com uma maquininha, inclusive para exibir a convergência, ou seja, o significado concreto de aproximações sucessivas. Como está, fica uma falsa impressão de "fora do alcance".

A função exponencial $f(x) = a^x$ é definida e seus gráficos são apresentados, tanto para $a > 1$ como para $0 < a < 1$. Mas não é justificada sua monotonicidade. Nem é sequer escrita a relação fundamental $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ que, juntamente com a monotonicidade, caracteriza a função exponencial. Não é feita a observação essencial de que ao tomar, sobre o eixo dos x, uma seqüência de pontos igualmente espaçados (progressão aritmética), as ordenadas dos pontos correspondentes sobre o gráfico ficam multiplicadas pela mesma constante (progressão geométrica). Esta propriedade também é característica da função exponencial e é responsável pela importância dessa função para modelar matematicamente um grande número de questões físicas, químicas, biológicas, econômicas e mesmo matemáticas. Sua ausência nos livros didáticos tem como conseqüência o fato de que, nos problemas supostamente de aplicação, fórmulas contendo exponenciais são fornecidas no enunciado.

Não é feita a conexão entre a função exponencial e as progressões geométricas. Toda progressão geométrica é a restrição de uma função do tipo exponencial, $f(x) = a_0 \cdot q^x$, ao conjunto dos números naturais: $f(n) = a_0 \cdot q^n$. Isto explica por que os problemas contextuais em que se usam progressões geométricas podem também ser resolvidos com funções do tipo exponencial.

Na página 190 faltou dizer que $a \neq 0$ para se ter $a^0 = 1$.

O exercício 58 (página 202) é incompreensível.

Em suma: neste capítulo o leitor encontra fatos sobre a função exponencial $y = a^x$, mas fica sem saber em que tipo de problema esta função deve ser usada. Notável é a ausência de exercícios sobre matemática financeira.

Capítulo 5. Logaritmos

Neste capítulo é apresentado inicialmente o logaritmo de um número, são estudadas suas propriedades operatórias e só nas últimas 3 páginas é estudada a função logarítmica. Esta atitude não é natural nem se justifica. Afinal de contas, o logaritmo de um número positivo só existe porque a função exponencial é sobrejetiva e só é único porque aquela função é estritamente monótona. Estudar potências antes da função exponencial tem sua razão de ser; é mesmo necessário. Mas no caso de logaritmos a separação não cabe. A função logarítmica é a inversa da exponencial e suas propriedades algébricas são meramente as da exponencial, lidas do modo adequado. Ocorre que no capítulo anterior não lhes foi dado o destaque devido e aqui esta conexão não é esclarecida convenientemente.

A exposição é objetiva, os exercícios são bem escolhidos e, felizmente, as tábuas de logaritmos não são exaltadas. O maior senão do capítulo é o de não deixar claro que o estudo dos logaritmos é essencialmente o mesmo que o da função exponencial. Faltam, evidentemente, várias observações básicas que enriqueceriam o texto, tais como o crescimento exponencial versus o crescimento logarítmico, a lentidão com que $(1+1/n)^n$ tende a e bem como problemas de aplicação nos quais (ao contrário de pH e escala Richter) os logaritmos não ocorram no enunciado.

Capítulo 6. Razões trigonométricas

A idéia de preceder o estudo da Trigonometria, melhor dizendo, das funções trigonométricas, de um capítulo sobre as razões trigonométricas num triângulo é boa, inclusive porque se podem obter aplicações interessantes sem ser preciso encarar as sutilezas envolvidas com os arcos de muitas voltas e o conceito de radiano, por exemplo.

Logo no início do capítulo, o autor afirma — e repete — que não fará distinção entre um segmento de reta e sua medida (que é um número), nem entre um ângulo e sua medida (que também é um número).

Ora, o capítulo lida com *razões* entre segmentos. Quer pensemos em a e b como segmentos de reta quer como suas medidas em relação a uma unidade fixada, a razão a/b é um número, o mesmo número, independente da unidade escolhida. Já o mesmo não se dá com os ângulos. Se α é um ângulo, $\operatorname{tg}\alpha$ é um número bem determinado (a menos que α seja reto). Mas se α é um número, digamos $\alpha = 43$, $\operatorname{tg}\alpha$ não faz sentido, salvo se especificarmos a unidade que estamos usando; por exemplo, graus. Então $\operatorname{tg} 43°$ tem significado. Mas aí já não se trata de um número: $\operatorname{tg} 43°$ significa a tangente do *ângulo* que mede $43°$.

A verdade é que, em todo este capítulo, as funções tangente, seno, cosseno, etc., são funções cujo domínio é o conjunto A dos ângulos do plano (no caso de tangente, excluídos os ângulos retos) e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais. São portanto funções de ângulo, não funções de números. Ocorre que, para identificar esses ângulos, usamos suas medidas. Mas, como dissemos acima, ao escrever $\cos 35°$, o símbolo $35°$ significa o ângulo que mede 35 graus. Neste capítulo, $\cos 35$ não significa nada.

Dadas as definições de seno, cosseno e tangente (inclusive de ângulos obtusos), o livro ensina a calcular seus valores para os ângulos mais comumente encontrados, remete o cálculo dos demais a uma pequena tabela da página 291 mas esquece de dizer que a calculadora é o melhor lugar para achar esses valores.

Seguem-se vários exercícios interessantes. Pena que faltem alguns problemas clássicos resolvidos pelos gregos, como a determinação da altura de uma pirâmide ou o cálculo do raio da terra. Uma aplicação corriqueira, que matemáticos e físicos usam freqüentemente, é o comprimento da projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta. Incrivelmente, isto quase nunca é feito nos livros congêneres. E, lamentavelmente, é feito aqui de forma mais complicada do que devia. Sem necessidade, tem-se um sistema de eixos cuja origem é uma das extremidades do segmento. Isto leva a considerar ângulos obtusos separadamente e a distinguir entre a projeção sobre o eixo dos x e sobre o eixo dos y.

O capítulo conclui com as leis dos senos e dos cossenos, inclusive com a menção ao diâmetro da circunferência circunscrita. Ficou faltando o fecho natural: a resolução dos triângulos e suas aplicações a problemas contextualizados.

As referências bibliográficas, ao final do livro, foram elaboradas descuidadamente. O livro de CARMO tem outros autores, o autor do livro "Construções Geométricas" é E. WAGNER e não J.P. CARNEIRO, o livro "Matemática do Ensino Médio" não é "no Ensino Médio" e tem mais três autores, o livro "Progressões e Matemática Financeira" tem ainda outro autor, o livro "Análise Combinatória e Probabilidade" tem outros autores. e o título do livro "Isometrias" é no plural.

Algumas conclusões

O livro tem qualidades, sobretudo se comparado com a maioria dos congêneres. Entende-se que a proposta do livro é a de apresentar a teoria de forma simples e superficial. Com isso, deixou de lado alguns temas e fatos essenciais. A coleção de exercícios é, em geral, muito boa, embora devesse conter mais exercícios contextualizados. Diversos dos seus exercícios fazem conexões interessantes com outras matérias ou com outros tópicos da própria Matemática.

É equlibrado e tem o mérito de não dar ênfase a assuntos de pouca importância. A leitura é agradável, a linguagem é simples e clara e, várias vezes, assume um tom de conversa com o leitor.

A qualidade gráfica é razoável. Os desenhos e gráficos são bons, mas os exercícios resolvidos usam um tipo pequeno demais e, freqüentemente, expoentes ou índices ficam difíceis de ler (veja, por exemplo, página 211, R17).

Márcio Cintra Goulart

A Matemática no Ensino Médio – volume 2

O segundo volume da coleção, com 342 páginas, trata de funções trigonométricas, matrizes, determinantes, sistemas lineares, análise combinatória e geometria espacial. Como no primeiro volume, a parte conceitual é bastante resumida e há uma ampla coleção de exercícios, vários dos quais resolvidos.

Passemos à análise do livro por capítulo.

Capítulo 1. Trigonometria

O Capítulo 1 inicia com uma rapidíssima revisão do estudo feito no final do Volume 1, sobre razões trigonométricas no triângulo. Em seguida, passa a considerar o cosseno de um ângulo central numa circunferência com centro na origem de um sistema de coordenadas. Entretanto, da maneira como a definição foi dada, o ângulo $M\widehat{O}M_1$ é sempre agudo, embora o livro considere que sua medida possa variar entre $0°$ e $180°$. Urge corrigir o equívoco.

Por falar em equívoco, as fórmulas destacadas no final da página 10 precisam ser corrigidas. Deve ser seno em vez de cosseno, em todas elas.

Na definição da medida (angular) de um arco de circunferência, ficou faltando chamar a atenção para a diferença entre essa medida e o comprimento do arco. (Inclusive, deveria ser dito que esse comprimento é o número cujos valores aproximados são os comprimentos das poligonais nele inscritas.) Alunos, e mesmo professores, costumam confundir esses dois conceitos; por isso é necessária a advertência. Figuras deviam mostrar arcos de comprimentos bem diferentes e mesma medida angular.

A propósito, o ângulo central não é *subentendido* pelo arco. O arco é que é subtendido (duas letras a menos) pelo ângulo.

A definição de radiano como medida de arco é correta. Mas, ao dizer que esta unidade também mede os ângulos centrais, é necessário justificar a opção, mencionando que em duas circunferências de mesmo centro os arcos subtendidos pelo mesmo ângulo central são proporcionais aos raios. Isto resulta da semelhança entre as circunferências e é o que assegura que dois arcos com a mesma medida em radianos são subtendidos por ângulos centrais iguais. Uma grave omissão é a fórmula (comprimento do arco)/(raio) que dá a medida de um arco em radianos. Mas, ao resolver o exercício R5, esta fórmula aparece, sem maiores explicações.

O livro adota o nome de "ciclo" para significar a circunferência unitária no plano cartesiano. Apenas os autores brasileiros de livros para o Ensino Médio usam essa terminologia.

A escolha do sentido anti-horário como positivo é justificada como o modo "natural" de desenhar uma circunferência, o algarismo zero ou a letra O. Lembramos que 30% da população mundial (os canhotos) usam o sentido oposto e também são "naturais".

A fim de poder considerar as funções trigonométricas como definidas em $\mathbb{R}$, um papel fundamental é desempenhado pela função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$, onde C é a circunferência unitária em $\mathbb{R}^2$ ("ciclo trigonométrico", como diz o livro). Esta função é, de certo modo, introduzida na página 22, o que é uma vantagem do livro sobre seus congêneres, que costumam tratar este ponto crucial de modo insatisfatório. Vantagem que só não é completa porque não é feita uma referência explícita a essa função, escrevendo $E(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, em vez da notação adotada, que consiste em escrever $M(a, b)$ para significar $E(x)$.

Por não usar corretamente o conceito de função, a exposição fica confusa, por exemplo, quando diz que um ponto da circunferência está "associado" a vários números. O correto é dizer que $E(x) = E(x')$ quando (e somente quando) a diferença $x - x'$ é um múltiplo inteiro de 2π, ou seja, quando $x \equiv x' \pmod{2\pi}$.

As funções trigonométricas são bem apresentadas e seus gráficos são exibidos. Pequenos reparos: os gráficos do seno e do cosseno são chamados de senóide e cossenóide, mas não é observado que são dois nomes para a mesma curva; uma é obtida da outra por uma translação horizontal de $\pi/2$. Nunca é dito que $\operatorname{cotg} x = 1/\operatorname{tg} x$ nem é mostrado o gráfico de $\operatorname{cotg} x$. Os gráficos de $\sec x$ e $\operatorname{cossec} x$, que são interessantes, também não aparecem. Tampouco se chama a atenção para as assíntotas verticais no gráfico de $\operatorname{tg} x$.

No exercício R10 (página 31) o uso da calculadora é ensinado impropriamente e a solução apresentada é mais complicada do que a anterior, manual.

As fórmulas de adição recebem uma demonstração elegante mas não é feita aplicação alguma das mesmas. Exemplos: coordenadas do ponto Q, obtido de $P = (x, y)$ por uma rotação de ângulo α em torno da origem, ou expressão de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ como funções racionais de $\operatorname{tg}(x/2)$.

Na página 80, há uma referência a "certas questões" onde se precisa transformar $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q$ num produto. (Lembranças, talvez, dos velhos tempos em que se usava "tornar calculável por logaritmos".) Na verdade, o interessante é ler a fórmula obtida da direita para a esquerda, de modo a exprimir o produto $\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen} q$ como uma soma, a fim de integrar facilmente.

As funções trigonométricas inversas são corretamente definidas como inversas de restrições. Mas é injustificável a omissão dos gráficos dessas funções. Em especial, $\operatorname{arctg} x$ dá uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e o intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

A natureza do conteúdo deste capítulo torna natural que em seus exercícios predominem a conceituação e a manipulação. Mas não há exercícios conceituais e são quase inexistentes as aplicações contextuais.

Não se deve dizer "satisfaz a uma condição" e sim "satisfaz uma condição".

A palavra correta é "invertível " e não "inversível".

Como observamos no Volume 1, o livro deveria deixar claro (com maior razão agora) que a calculadora é o método mais eficiente de obter valores das funções trigonométricas. Além disso, deveria propor questões interessantes para serem respondidas sem calculadora. Exemplos: qual é o sinal de $\cos 1{,}62$? Qual é o maior: $\operatorname{sen} 1$ ou $\operatorname{sen} 2$? $\operatorname{sen} 7$ ou $\operatorname{sen} 1$?

Muitos alunos acabam ficando com a impressão de que toda medida em radianos deve envolver o número π. Os exercícios 76 a 110 certamente vão contribuir para fortalecer essa idéia errônea.

Capítulos 2 e 3. Matrizes, sistemas lineares e determinantes

Esses dois capítulos, que analisaremos conjuntamente, cobrem a parte do programa da 2ª série que poderia ser chamada de Álgebra Linear para principiantes.

A justificativa elementar para o estudo de matrizes são as transformações geométricas e os sistemas lineares. Mas no Ensino Médio brasileiro as noções fundamentais de rotação, homotetia (mais geralmente isometria e semelhança), bem como outras transformações geométricas de grande relevância (translações, por exemplo), são praticamente ignoradas.

Restam os sistemas lineares. Para que seu estudo tenha razão de ser e possua significado, deveriam ser propostos diversos problemas contextuais cujas soluções recaíssem em sistemas. Tais problemas simplesmente não existem neste livro. Com o agravante de que há muitos deles, extremamente relevantes para a vida moderna e bastante atraentes. Mas, nos numerosos exercícios do livro, o aluno usa seus conhecimentos de sistemas lineares apenas para resolver sistemas lineares. (Uma só exceção: o exercício 13 da página 128, embora artificial, não menciona sistemas no enunciado.)

As matrizes são essenciais para o estudo dos sistemas lineares. Há duas matrizes associadas a um sistema: a matriz dos coeficientes e a matriz completa (ou aumentada). Para que o sistema possua solução é necessário e suficiente que a coluna do 2º membro seja combinação linear das colunas da matriz dos coeficientes. E, num sistema $n \times n$, para que exista uma única solução é necessário e suficiente que nenhuma linha (ou coluna) da matriz dos coeficientes seja combinação linear das demais. Estes dois fatos cruciais já mostram que, no estudo dos sistemas lineares, o conceito central é o de combinação linear (das linhas ou colunas de uma matriz). Além de indispensável, esta noção é muito simples e elementar. Mas *nunca* é mencionada nos livros didáticos brasileiros. Em vez disso, a ênfase maior é posta nos determinantes, uma noção muito mais complexa, mais elaborada, além de extremamente ineficaz sob o ponto de vista computacional.

Em favor do presente livro, devemos esclarecer que é um dos poucos a não enfatizar exageradamente os determinantes. Acertadamente, o autor faz opção pelo método de escalonamento para resolver sistemas lineares, mencionando a Regra de Cramer mais por desencargo de consciência (e por dever de ofício, já que se trata de assunto de vestibular).

Olhemos os Capítulos 2 e 3 mais de perto.

Abrir o estudo elementar de noções de Álgebra Linear com uma discussão sobre matrizes não é aconselhável, embora isto seja feito em todos os compêndios brasileiros. As definições caem do céu; as tentativas de motivação em geral são mal sucedidas e as propriedades são enunciadas peremptoriamente, sem maiores explicações.

O Capítulo 2 começa com a afirmação historicamente inverídica de que a teoria das matrizes "só foi desenvolvida, bem mais recentemente, para atender às aplicações, principalmente com a informatização".

A definição de matriz é apresentada *ex-abrupto*, sem nenhuma motivação e sem exemplos. O mesmo ocorre com as operações. O caso mais grave é o da multiplicação, cuja definição se baseia no produto de uma linha por uma coluna. Só que esse produto não foi definido! As propriedades da multiplicação de matrizes são apresentadas sem provas, sem justificativas, sem ao menos um exemplo para ilustrá-las. (O que o livro chama distributividade à esquerda deveria ser chamada à direita.) Sequer são apresentados exemplos em que $AB \neq BA$, $AB = BA$, $A^2 = 0$ com $A \neq 0$, etc. A multiplicação de matrizes é resumida em duas páginas.

Na apresentação da matriz identidade, tem-se a frase: "Dada a matriz A, se existir o produto $A \cdot I_n$ ou $I_n \cdot A$, a matriz produto é igual à própria matriz A …'. Esse "se existir" é misterioso. Por que não dizer simplesmente assim: Se A é uma matriz $m \times n$ então $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$?

A definição de matriz invertível (não é inversível!) está incompleta. Seja A uma matriz $n \times n$. Diz-se que A é invertível quando existe uma matriz B, também $n \times n$, chamada a inversa de A, tal que $AB = BA = I_n$. Um teorema não-trivial assegura que, para matrizes quadradas, a igualdade $A \cdot B = I_n$ implica $B \cdot A = I_n$. Mas não é correto dar apenas uma dessas igualdades como definição. Logo abaixo, o livro afirma, despreocupadamente, que uma matriz e sua inversa comutam. Isto é óbvio se a definição dada for com duas igualdades, como dissemos acima. Mas se for a definição do livro, este fato só pode ser provado depois de demonstrar que $A \cdot B = I_n \Rightarrow B \cdot A = I_n$.

Na definição de sistema linear, está dito que os a_{ij} chamam-se de coeficientes, os b_i chamam-se os termos conhecidos mas não se diz que os x_j chamam-se incógnitas.

Também está afirmado, ainda despreocupadamente, que um sistema indeterminado tem uma infinidade de soluções (página 125). Por que não pode ter 5 ou 13 soluções apenas? Embora não seja difícil de provar, esta afirmação não é óbvia.

Logo após as definições gerais concernentes a sistemas lineares, são apresentados três exemplos, sob a forma de exercícios resolvidos. Em todos eles, os sistemas têm uma única solução. Diante das definições dadas, seria indispensável exibir um sistema incompatível, soluções gerais de sistemas indeterminados, isto sem falar em problemas realísticos que conduzissem a sistemas lineares.

O método de escalonamento está mal explicado e nos dois exemplos apresentados o coeficiente de x é 1. Nunca são explicitadas as operações elementares usadas no processo. Afirma-se que em cada etapa se obtém um sistema equivalente ao original mas essa afirmativa não é comprovada.

“Por enquanto”, na página 134, significa “sempre” ...

Na discussão (R.6, página 136), ao declarar que o sistema é indeterminado, dever-se-ia explicitar a solução geral.

Faltam exemplos de problemas reais que conduzam a sistemas indeterminados, dos quais se quer uma solução que possua certas propriedades. Isto ilustraria a importância desse tipo de sistema.

A resolução de um sistema literal 2×2 nas páginas 139 e 140 é muito mais complicada do que deveria (apesar de ter vários detalhes omitidos). Bastava multiplicar a primeira equação por a_2, a segunda por a_1 e subtrair.

De um modo geral, ao começarem a usar o método do escalonamento, os alunos sentem dificuldades com o número de frações que aparecem. Um modo de evitá-las é multiplicar cada uma das duas equações pelo primeiro coeficiente não-nulo da outra.

A regra de Sarrus está mal explicada. (Página 143.)

Ao apresentar explicitamente a expressão de um determinante 3×3, na página 143, dever-se-ia explicar o critério pelo qual os sinais $+$ e $-$ são colocados antes de cada termo.

Na página 147 está escrito que a teoria dos determinantes tem interesse diminuído por causa de sua desvantagem computacional em relação ao escalonamento. Não é bem assim. A teoria dos determinantes continua a ter grande interesse em

Análise, em Geometria e na Álgebra. O que se deve observar enfaticamente é a enorme ineficácia dos determinantes como instrumento de cálculo para obter, via Regra de Cramer, soluções de sistemas lineares.

A definição de determinante é feita, como em quase todos os livros congêneres, de modo indutivo, via desenvolvimento de Laplace.

Este procedimento tem a vantagem (para os autores) de dispensar explicações sobre os sinais que precedem os termos numa definição explícita, além de fornecer imediatamente um processo de cálculo que, embora extremamente custoso para matrizes grandes, funciona razoavelmente nos casos 2×2, 3×3 e até mesmo 4×4.

O problema com esta definição é que ela requer um teorema não-trivial, segundo o qual a expansão de Laplace conduz ao mesmo resultado, seja qual for a coluna escolhida, ou mesmo se fizermos o desenvolvimento segundo uma linha qualquer. Esta dificuldade é completamente ignorada pelos autores brasileiros, que despreocupadamente enunciam o resultado, como se fosse uma banalidade. Do ponto de vista didático, este é um grave equívoco pois é dever do professor (e conseqüentemente dos autores) ensinar aos alunos a diferença entre um detalhe trivial e uma questão difícil.

Nos exercícios do livro em que se devem calcular determinantes 3×3, 4×4 ou maiores, as matrizes são cheias de zeros. Isto é uma admissão tácita do elevado custo de calcular um determinante a partir da definição. Em nenhum lugar do livro se conta a verdade: o método mais rápido de fazer esse cálculo em matrizes grandes é escaloná-las e depois tomar o produto dos termos da diagonal principal (vezes -1 se houve um número ímpar de troca de linhas). Este processo é facilmente justificado usando a fórmula do determinante do produto de matrizes.

A Regra de Cramer é apresentada peremptoriamente, sem explicações nem desculpas, como um passe de mágica.

Na página 154, o fato de um sistema homogêneo $n \times n$ com determinante zero admitir soluções não-nulas é justificado com "temos, de acordo com a regra de Cramer". Este resultado nada tem a ver com a Regra de Cramer. Sua demonstração não é imediata como se depreenderia do lacônico "temos".

Sob o título de "complementos" são apresentadas, no final do capítulo, propriedades fundamentais do determinante. Nada que se possa dizer sobre o determinante de uma matriz $n \times n$ é mais importante do que o fato de que ele depende linearmente de cada uma de suas colunas e muda de sinal quando se permutam duas delas. Com efeito, o determinante é a única função que tem essas propriedades e assume o valor 1 na matriz identidade.

Portanto todas as propriedades do determinante são conseqüências destas. Não é correto considerá-las como "complementos". Pôr as ênfases nos pontos certos é uma tarefa essencial do livro didático. A indicação de como se pode demonstrar estas propriedades por indução é feita corretamente no livro.

A prova de que uma matriz quadrada e sua transposta têm o mesmo determinante é uma brincadeira, já que se admitiu de saída que no cálculo do determinante pode-se desenvolvê-lo segundo linhas ou segundo colunas.

A fórmula $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ poderia ser provada facilmente a partir das propriedades fundamentais do determinante, às quais aludimos acima. (Vide "A Matemática do Ensino Médio", vol. 3, página 146.) O fato de que A invertível $\Rightarrow \det A \neq 0$ resulta imediatamente daí. A prova da recíproca é bem mais difícil, ao contrário do que a simples frase "pode-se verificar que" dá a entender. A igualdade $\det A = 0$ significa que alguma das linhas da matriz A é combinação linear das outras. Isto é muito mais fácil de constatar por escalonamento do que calculando o determinante. Mas a noção de combinação linear não é tocada neste livro.

Capítulo 4. Análise Combinatória

O Capítulo 4 é escrito com simplicidade, segundo o modelo tradicional: depois de estabelecido o princípio fundamental da contagem, são estudados os arranjos, as permutações e as combinações. Apenas as permutações são apresentadas também com repetições. Os outros tipos clássicos ocorrem apenas sob a forma simples. Fazem falta as permutações circulares, que são necessárias em diversos problemas interessantes.

O defeito maior do capítulo é o de limitar os problemas de contagem a esses três tipos clássicos. Acontece que é muito grande a variedade de problemas de contagem, elementares e relevantes, que não se enquadram na classificação de arranjos, permutações ou combinações. Para ilustrar este ponto, vejamos apenas dois exemplos:

Exemplo 1 – Quantos são os números de três algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?

Exemplo 2 – De quantas maneiras se podem distribuir 10 balas iguais entre 3 crianças de modo que cada uma delas receba pelo menos uma bala?

Os principais objetivos do ensino da Análise Combinatória neste nível não são a dedução e a memorização de algumas fórmulas clássicas e sim familiarizar os alunos com estratégias, métodos gerais para abordar os problemas de contagem de modo adequado, ensinando-os a evitar muitos erros comuns. As fórmulas, mesmo se esquecidas, podem ser facilmente deduzidas a partir dos princípios gerais, ou então se tornam desnecessárias para aqueles que aprenderam os raciocínios corretos.

Na apresentação do livro, alguns pontos merecem reparo.

A expressão "seqüência de n elementos" ora significa que os elementos são distintos, ora que há repetições.

Na página 187 em vez de dizer "Dados n elementos, sendo n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, n_3 iguais a a_3 e assim por diante", o correto seria: "Dados r elementos $a_1, \ldots, a_r$, onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, o elemento a_i é tomado n_i vezes, sendo $n_1 + \cdots + n_r = n$, ..."

Nas combinações complementares e na relação de Stifel, a preferência do livro é usar as fórmulas para provar as igualdades visadas. Em ambos os casos, pensar em $C_{n,p}$ como o número de subconjuntos de p elementos num conjunto com n elementos daria um argumento mais simples, o qual ao menos deveria ser acrescentado à manipulação algébrica feita.

O binômio de Newton é estabelecido corretamente. Só não dá para entender por que todos os autores brasileiros guardam a notação $\binom{n}{p}$ para ser introduzida neste ponto. Por que não continuar com $C_{n,p}$? Ou então começar com $\binom{n}{p}$ e ir até o fim?

Capítulo 5. Probabilidades

Este capítulo é simples e correto. Não há maiores críticas a fazer sobre a exposição que, embora superficial, não contém erros ou impropriedades. A única falta a mencionar é a ausência de exercícios atraentes, problemas que envolvam decisões a tomar com base na maior probabilidade de êxito. Afinal, no mundo atual esse tipo de raciocínio probabilístico se aplica freqüentemente.

Só para mencionar um exemplo simples: o que seria mais vantajoso: comprar um bilhete de loteria durante 3 semanas consecutivas ou comprar 3 bilhetes daquela loteria no mesmo dia?

Em suma, faltam problemas que usem probabilidades na sua resolução mas que não se refiram diretamente a esse assunto no enunciado.

Capítulo 6. Geometria Espacial

A Geometria pode ser ensinada, em nível bem elementar, de forma intuitiva ou, em nível mais elevado, sob a forma dedutiva. Por sua vez, a Geometria Dedutiva pode ser apresentada de maneira formalmente rigorosa, axiomática, ao estilo de Hilbert, ou Birkhoff ou Pogorelov, que cabe melhor nos estudos universitários. Mas, para alunos do Ensino Médio, o modo mais adequado de expor a Geometria vem a ser aquele consagrado pelos nossos respeitáveis antepassados, cujo êxito pode ser medido pelo grande número de edições (e traduções) que seus compêndios tiveram. Os nomes a destacar são os de Legendre e Hadamard, que foram os modelos copiados e adaptados por centenas de autores de livros didáticos espalhados por vários países.

Na Geometria Dedutiva axiomática, à la Hilbert, é apresentada uma lista de termos primitivos (não definidos) e uma lista de axiomas (proposições não demonstradas). A partir daí, todos os conceitos devem ser definidos e todas as afirmações devem ser provadas. Os termos primitivos são desprovidos de significado e a eles não podem ser atribuídas quaisquer propriedades que nossa experiência lhes confira a partir dos nomes que têm. Suas únicas propriedades são aquelas determinadas pelos axiomas e pelas conseqüências lógicas dos mesmos, os teoremas. O estudo da Geometria segundo esse processo austero é um exercício intelectual gratificante para aqueles que entendem e se comprazem com os raciocínios abstratos. Mas é claro que tal prática não tem o mínimo lugar na escola, cujos objetivos são de outra natureza e cuja clientela é bem mais ampla e variada.

Na Geometria Dedutiva que se estuda na escola, os elementos primitivos (ponto, reta e plano) e as noções geométricas em geral, possuem um forte significado intuitivo e os postulados ou axiomas servem para disciplinar o uso desses elementos ("por dois pontos distintos dados passa uma, e somente uma, reta", etc.). Esses postulados são de natureza geométrica e não técnica, como os axiomas de ordem na apresentação de Hilbert. Em língua portuguesa, um exemplo antigo porém confiável de exposição nessa linha é a Geometria de F.T.D. Na literatura brasileira contemporânea, podemos citar o livro de J. Lucas Barbosa sobre Geometria Plana e o excelente tratamento dado à Geometria Espacial no livro de Paulo Cezar P. Carvalho, ambos na "Coleção do Professor de Matemática" da S.B.M. .

Dentro do panorama acima esboçado, vejamos como se enquadra o capítulo que estamos analisando.

Logo de início, para estabelecer a diferença entre postulados e teoremas, diz-se que estes são proposições demonstráveis. Isto dá uma falsa idéia de característica absoluta. Os postulados também são demonstráveis, desde que se tomem outros postulados como base.

Em seguida, são apresentados dois postulados, segundo os quais "em toda reta, e fora dela, existem infinitos pontos" e "em todo plano e fora dele existem infinitos planos".

Ora, mandam o bom senso e a experiência que, ao ensinar Geometria Espacial neste nível, seja pressuposto o conhecimento básico da Geometria Plana, onde a reta — sabe-se bem — contém infinitos pontos. Além disso, no Volume 1 foi estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto (infinito) dos números reais. Mais ainda: ao admitir (como será feito muitas vezes no que se segue) que existe o ponto médio de um segmento, com isso já se está admitindo que a reta tem infinitos pontos.

Bastava postular que fora de cada reta existe ao menos um ponto (o que garante que o espaço tem dimensão maior do que 1) e que fora de todo plano também há pontos (logo a dimensão do espaço não é 2).

Na mesma página é apresentado o conhecido e interessante exemplo de um tamborete de 3 pernas, que se firma bem em qualquer superfície, em contraste com outros que tenham 4 pernas ou mais. Como em vários livros, nacionais e estrangeiros, está dito que este fato decorre da propriedade de 3 pontos determinarem um plano. É curioso notar quantas vezes este exemplo aparece mas nunca é seguido de uma explicação mais completa. A verdade é que isto nada tem a ver com a determinação de um plano por 3 pontos não-colineares. A justificativa correta é que, fixadas duas pernas e fazendo girar o banco, a terceira perna descreve uma circunferência que corta a superfície num único ponto. (O autor fica absolvido porque todo o mundo comete este erro.)

O livro segue o péssimo hábito de considerar uma reta como sendo “duas retas paralelas coincidentes”, o que não faz sentido mas é o costume dos autores nacionais. Mais um mau hábito que o estudante terá que perder quando chegar à universidade.

Na verdade, retas paralelas (no espaço) não são explicitamente definidas. Há uma afirmação (que soa como um teorema) de que duas paralelas são sempre coplanares mas isto não ocorre como definição. Outra opção inadequada, feita no livro, é a de chamar ortogonais apenas a retas reversas que formam ângulos retos uma com a outra. Perpendicular deveria ser um caso particular de ortogonal, não um caso à parte.

A existência e a unicidade da reta perpendicular a um plano dado a partir de um ponto dado são fatos admitidos tacitamente, sem um comentário sequer. Eles podem e devem ser provados. Inclusive porque a unicidade da perpendicular a um plano a partir de um ponto do mesmo caracteriza a tridimensionalidade do espaço.

De um modo geral, os tópicos de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos são muito mal apresentados no livro. Apesar de constar da lista de referências, a “Introdução à Geometria Espacial”, de P. C. Carvalho, não parece ter sido consultada.

O livro não deixa claros os significados e as diferenças mútuas entre teorema, corolário, postulado, etc. Por exemplo, na página 240 é enunciado o postulado segundo o qual dois planos que têm um ponto em comum têm também uma reta em comum. Na página seguinte, são feitas afirmações referentes aos semi-espaços determinados por um plano. Não fica claro se tais afirmações constituem um postulado ou um teorema não demonstrado. Ocorre que a proposição enunciada como postulado na página 240 e essas propriedades dos semi-espaços são equivalentes. Cada um desses fato pode ser provado a partir do outro. Ambos são maneiras alternativas de se dizer que o espaço tem 3 dimensões.

O volume de um sólido nunca é definido, nem precisamente nem intuitivamente. Apesar disso, é calculado o volume de um bloco retangular com arestas de 2, 3 e 4 centímetros. A partir daí, afirma-se que a fórmula Volume = área da base × altura vale para qualquer bloco (mesmo com arestas de medidas fracionárias ou irracionais) e até mesmo para qualquer prisma, ainda que seja oblíquo! Nenhuma justificativa ou explicação é oferecida. Firma-se cada vez mais a crença de que a Matemática é uma ciência baseada na autoridade dos autores de livros e dos professores que os repetem.

Nas páginas 263 e 264 são oferecidas duas definições diferentes de pirâmide, sem que seja feita uma conexão entre elas.

Ao estudar pirâmides, impõe-se observar (e isto é fundamental) a homotetia (tipo especial de semelhança) entre duas seções planas paralelas da mesma. As áreas dessas seções estão entre si como o quadrado da razão de semelhança. Este fato é usado algumas vezes, a partir do exercício R.9 (página 265) mas, talvez para não ter que explicar estas coisas, o resultado é usado sem que nenhum comentário seja feito. Ao leitor cabe achar a razão por si mesmo ou aceitá-lo resignado.

Na página 267 admite-se sem maiores explicações que duas pirâmides de bases congruentes e alturas iguais têm o mesmo volume. Ora, este fato, bem como o seu análogo para prismas (já admitido antes), resulta do Princípio de Cavalieri, que vai ser enunciado na página 288. Então por que usar aquele princípio lá mas não aqui? Mais adiante, nas páginas 271 e 275, também são admitidas sem explicação as fórmulas que dão os volumes de um cilindro e de um cone.

Nota-se nesse capítulo a ausência de uma atitude coerente. Fatos essenciais, de grande importância, são relegados ou tratados peremptoriamente, enquanto detalhes banais são às vezes examinados com minúcia. O leitor não adquire a idéia de que a Matemática é uma ciência dedutiva.

O volume da esfera é calculado corretamente e a área de sua superfície recebe um tratamento intuitivo porém satisfatório. Mas, salvo pelo cálculo evidente da área de um fuso e do volume de uma cunha, o estudo da esfera fica nisso. Calotas esféricas não são mencionadas; muito menos seus volumes são calculados. Nem sequer é provada a afirmação (feita) de que a interseção da esfera com um plano é um círculo.

O Teorema de Euler para poliedros é demonstrado (ao contrário da maioria dos livros congêneres, que apenas o enunciam). A versão apresentada refere-se ao caso de poliedros convexos. O curioso é que, em nenhuma etapa da demonstração se usa a hipótese de convexidade. Isto levanta, naturalmente, uma suspeita. E, de fato, a demonstração está errada. Vamos mostrar a seguir, como o argumento usado é falho.

O livro deseja mostrar que numa superfície poliédrica convexa aberta vale a relação $V + F = A + 1$. Para isso, começa com uma face e vai colando as outras. Afirma que em cada passo a relação apresentada não muda. Mas isto não é verdade.

Consideremos, por exemplo, a construção de uma pirâmide regular de base quadrada.

Temos um quadrado e quatro triângulos isósceles para montar. Colocamos a base em cima da mesa. Temos $V + F = A + 1$ $(4 + 1 = 4 + 1)$. Colocamos então o primeiro triângulo. Continua $V + F = A + 1$ $(5 + 2 = 6 + 1)$. Colemos agora a face triangular oposta. Neste momento, teremos $V + F \neq A + 1$ $(5 + 3 \neq 8 + 1)$. Falhou o argumento.

Esta pseudodemonstração está presente em inúmeros livros, cujos autores não se detiveram para examiná-la com atenção. Uma análise detalhada desse argumento e de sua história pode ser encontrada a partir da página 68 do livro "Meu Professor de Matemática e Outras Histórias", publicado pela S.B.M.. Naquele livro encontram-se ainda, além da versão corrigida desse raciocínio, mais 3 demonstrações corretas do Teorema de Euler. Outra demonstração (também certa) acha-se no Volume 2 do livro "A Matemática do Ensino Médio", citado na bibliografia do livro que estamos analisando.

Considerações finais

O ponto alto do livro são os exercícios. A parte conceitual apresenta deficiências e a contextualização necessita urgentes reforços. O fato de ser tão conciso facilita seu uso em classe e induz o professor que o adota a fazer e propor exercícios, o que é bom. A Geometria é a parte mais fraca do livro, de resto em consonância com seus congêneres brasileiros.

Márcio Cintra Goulart

A Matemática no Ensino Médio – volume 3

O programa de Matemática geralmente coberto na terceira série do Ensino Médio é mais curto do que o dos outros anos, pois as escolas ocupam boa parte do tempo adestrando seus alunos para o exame vestibular. Isto se reflete na extensão do Volume 3 desta coleção, que tem apenas um pouco mais de 200 páginas. Os temas abordados são Geometria Analítica Plana, Números Complexos, Polinômios, Equações Polinomiais e Noções de Estatística. O primeiro capítulo tem cerca de 100 páginas e cada um dos demais, em torno de 25. A maior parte dessas páginas contém exercícios, propostos e resolvidos, ou leituras complementares. O texto matemático propriamente dito não excede 50 páginas, em corpo graúdo. Isto dá uma idéia da concisão e da superficialidade com que os assuntos são tratados.

Dada a organização do livro, no qual a parte conceitual é reduzida e os tópicos apresentados não são adequadamente desenvolvidos, o professor que o utilize terá que dedicar a maior parte do tempo à resolução dos exercícios. Isto, em si, é muito bom. Esses exercícios, que o livro contém em grande número, são por vezes interessantes. É pena que, como nos volumes anteriores da coleção, praticamente não haja problemas de natureza contextual, que se refiram a situações reais da vida de hoje. Como já dissemos antes, isso contribui para fortalecer no aluno (e, por extensão, na sociedade) a crença de que a Matemática que se estuda na escola serve apenas para passar no exame vestibular. Na verdade, do modo como as coisas estão, essa crença é bastante justificada. Mas não deveria ser assim.

Passemos à análise do conteúdo do livro.

Capítulo 1. Geometria Analítica

Este capítulo ocupa a metade do livro.

De início devemos cumprimentar o autor por ter caracterizado o alinhamento de três pontos — e conseqüentemente obtido a equação da reta — sem utilizar o abominável determinante que os demais livros insistem em adotar. E também por ter relegado a chamada "equação segmentária" da reta a um exercício resolvido.

Ao introduzir o sistema cartesiano de coordenadas, a noção de eixo (reta orientada, munida de uma origem) é usada mas não é definida. Também é dito que a cada ponto do plano cartesiano corresponde um par de coordenadas mas não se diz de que modo é definida essa correspondência.

Várias vezes são mencionados pontos simétricos em relação a uma reta mas a importante noção de simetria não é definida, e muito menos a transformação geométrica correspondente. De resto, as simetrias que ocorrem aqui são apenas em relação aos eixos coordenados. Em nenhum lugar nas 100 páginas surge a questão de obter as coordenadas do simétrico de um ponto dado em relação a uma reta dada qualquer.

Um exercício (página 10) fala em função que não passa por um ponto.

Na obtenção da fórmula da distância entre dois pontos, o caso em que os pontos dados estão sobre uma paralela a um dos eixos é tirado como conseqüência do caso geral mas já foi usado (sem menção explícita) na dedução da fórmula.

Um segmento orientado é definido como aquele que está contido num eixo. (Definição incorreta.) Ele é representado pela notação $\overrightarrow{AB}$, mas este é o símbolo universalmente usado para vetores. Aliás, a importantíssima noção matemática de vetor é ignorada pelos autores brasileiros de livros didáticos. Talvez seja porque só é exigida no vestibular de Física.

Várias vezes o livro, a fim de tirar conclusões sobre um segmento, supõe que ele não é vertical nem horizontal, para ter um triângulo. Em seguida, obtém estas duas situações especiais como casos particulares, o que não é correto. Isto acontece, por exemplo, na página 15. Na mesma página, o Teorema de Tales é usado (sem menção explícita, nem aqui nem na página 14) para determinar as coordenadas do ponto que divide um segmento numa razão dada. Para que valha o argumento, precisa-se de um triângulo. E se o segmento for paralelo a um dos eixos? Faz falta, neste e em outros lugares, uma seção preliminar sobre Geometria Analítica na reta, onde esses fatos básicos fossem estabelecidos.

O exercício 37 (página 13) é uma tentativa de contextualização. Mas quem já ouviu falar em duas estações ferroviárias que distam $40\sqrt{2}$ km uma da outra?

A determinação do baricentro de um triângulo é feita corretamente mas é admitido sem discussão o fato de que as três medianas se encontram num único ponto. Acontece que o argumento usado no final do exercício R.4 serve para mostrar isso.

A leitura nas páginas 19 a 22 é sobre centro de gravidade. Mas nunca esta noção é definida, de modo que o texto não é compreensível. A noção de centro de gravidade está ligada aos conceitos de equilíbrio e de energia potencial, mas isto não é mencionado. Não acreditamos que o leitor inexperiente consiga ler e entender esse trecho do livro. Teria sido mais útil propor ao leitor recortar um triângulo em cartolina, achar o ponto de encontro das três medianas e verificar que o objeto fica equilibrado quando o apoiamos nesse ponto.

Entre as várias aplicações da noção de centro de gravidade de uma figura está o cálculo do volume dos sólidos de revolução pelo Teorema de Papus. Um tratamento elementar desse assunto está no livro "A Matemática do Ensino Médio", Volume 2, mencionado na bibliografia.

A conversa sobre Bateau Mouche, Torre de Pisa, etc. fica prejudicada por não mencionar o essencial: um corpo está em equilíbrio se, e somente se, a vertical que passa pelo seu centro de gravidade corta o interior de sua base de sustentação.

O preâmbulo da seção 5 (página 25) é muito confuso.

A chamada "equação geral da reta", que os livros didáticos brasileiros insistem em escrever sob a forma $ax+by+c=0$ (salvo no caso da "equação segmentária") deveria sempre ser escrita como $ax+by=c$. É claro que as duas formas são equivalentes mas não é apenas uma questão de preferência pessoal. É que esta segunda maneira exibe a reta como a linha do nível c da função $\varphi(x,y)=ax+by$, chamando a atenção para o fato de que, variando c (e mantendo fixos a e b), as diferentes linhas de nível de φ são retas paralelas, todas elas perpendiculares ao segmento OA, onde $A=(a,b)$. Esta última propriedade é muito útil em várias ocasiões, como, por exemplo, na dedução da fórmula da distância de um ponto a uma reta. Quase não se nota, mas a verdade é que não foi provado que a equação $ax+by+c=0$ representa uma reta.

A propósito, este livro é um dos poucos (entre seus congêneres) a deduzir a fórmula acima citada. Pena que, por não ter estabelecido o significado geométrico dos coeficientes a e b na equação $ax+by=c$, o argumento tenha ficado muito mais longo do que devia.

A posição relativa de duas retas no plano é discutida mas falta a identificação de cada caso a partir dos coeficientes que ocorrem nas suas equações. Por exemplo, se as retas são dadas por $ax+by=c$ e $a'x+b'y=c'$ então elas coincidem se, e somente se, $ab'=ba'$ e $ac'=ca'$. Elas são paralelas se, e somente se, $ab'=ba'$ mas $ac'\neq ca'$. E são perpendiculares se, e somente se, $aa'+bb'=0$. Estas relações, principalmente a última, nunca são mencionadas em nossos livros didáticos, nem ao menos como exercícios, embora sejam úteis, além de comumente empregadas nos estudos mais avançados.

O perpendicularismo de duas retas é chamado de "perpendicularidade." Então por que não dizer também "paralelidade"?

Para obter a condição de perpendicularismo, o livro usa Trigonometria. Tudo bem; por que não? Acontece que, neste caso, ela é completamente dispensável. Tudo resulta do fato de que, num triângulo retângulo, a altura baixada do vértice do ângulo reto é a média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. Ou melhor ainda: $m_1\cdot m_2=-1$ resulta imediatamente da condição mais geral $aa'+bb'=0$ a qual, por sua vez, é uma conseqüência direta do Teorema de Pitágoras. (Ver "A Matemática do Ensino Médio", Volume 3, páginas 15 e 30.)

Na página 37, depois de mostrar que o perpendicularismo das retas $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ implica $m_1 \cdot m_2 = -1$, o livro afirma que "podemos verificar" a recíproca. O que parece não ter sido notado é que a recíproca não requer nova demonstração. Ela resulta da proposição direta, juntamente com a unicidade da perpendicular a uma reta por um ponto dado.

Na página 40, o ângulo entre duas retas nunca é obtuso. Em realidade, ângulo é a figura formada por duas *semi -retas* que têm a mesma origem. Duas retas que se cortam formam 4 ângulos, sendo dois a dois opostos pelo vértice, logo congruentes. Descartando o caso em que as retas são perpendiculares, há dois ângulos distintos formados por elas, os quais são suplementares, portanto um é agudo e o outro obtuso. Não há motivo para preferir um em vez do outro.

Os cossenos desses ângulos diferem apenas pelo sinal, logo se α é qualquer um deles, o valor absoluto $|\cos\alpha|$ está definido sem ambigüidade. Se as equações dessas retas são $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = 1$ e então tem-se $|\cos\alpha| = |aa' + bb'|$. Esta é a forma correta de olhar para o assunto. (Se quisermos nos livrar do valor absoluto, basta considerar as duas retas como orientadas pois isto determina qual dos dois ângulos se deve tomar.)

Deveria haver muito mais exercícios como o nº 67 (página 43), em que o aluno é instado a tirar suas próprias conclusões e justificá-las.

O tratamento de inequações lineares não leva a nada. A aplicação natural seriam os problemas de Programação Linear, tão atraentes quanto importantes no atual contexto. Mas não são abordados.

Na página 57, o que é chamado de "equação geral da circunferência" é algo inútil. A questão que realmente interessa é a seguinte: dada a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, em que condições ela representa uma circunferência? A resposta é simples: se, e somente se, $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 > 4AF$. (Cfr. "A Matemática do Ensino Médio", vol. 3, pág. 44.)

As posições relativas de um ponto ou uma reta em relação a uma circunferência são corretamente discutidas, bem como as questões de tangência. Mas temas essenciais foram omitidos, como achar a equação da circunferência que passa por 3 pontos dados não-colineares, a interseção de uma reta com uma circunferência ou a interseção de duas circunferências.

Como seus congêneres, o livro diz que um subconjunto do plano chama-se um lugar geométrico se todos os seus pontos satisfazem uma dada propriedade e somente seus pontos satisfazem a tal propriedade. Ora, isto é o mesmo que dizer: lugar geométrico é simplesmente um subconjunto do plano. (A propósito: não se satisfaz *a* uma condição; satisfaz-se uma condição. Nem tampouco se *satisfaz* uma propriedade: goza-se dessa propriedade, ou se tem essa propriedade.)

Na dedução da equação da elipse houve duas elevações ao quadrado para concluir que se $P = (x, y)$ pertence à elipse então $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Para afirmar que esta é a equação da curva seria necessário ainda provar a recíproca: se as coordenadas (x, y) do ponto P satisfazem a equação então P pertence à elipse. Levando em conta as duas vezes em que equações foram elevadas ao quadrado, isto requer um pequeno argumento adicional. Uma observação análoga vale para as equações da hipérbole e da parábola.

Os tratamentos dados a essas três curvas neste livro poderiam ser menos lacônicos e, pelo menos nas leituras, deveriam ser ilustradas as propriedades de reflexão das mesmas; em particular, no caso da parábola, suas aplicações tão difundidas como os holofotes, as antenas parabólicas e os rádiotelescópios.

Não foi comentado o significado da excentricidade da elipse.

No caso da hipérbole, as assíntotas são mencionadas num exercício e não é feito nenhum comentário sobre seu significado geométrico. No exercício seguinte (pág. 87) pede-se para mostrar que uma certa hipérbole não intercepta (sic) suas assíntotas. Fica a impressão de que outras poderiam intersectar...

Ficou faltando provar que a equação $xy = 1$ define uma hipérbole, pois isto foi afirmado no Volume 1.

Ao contrário dos outros livros didáticos brasileiros, este justifica a terminologia usada no Volume 1 e prova que o gráfico de uma função quadrática é, de fato, uma parábola. A demonstração (páginas 93 e 94) não é a mais lúcida mas, de qualquer modo, é um ponto positivo. Conforme mencionamos em nossa análise do Volume 1, bastaria verificar que o gráfico de $y = ax^2$ é a parábola cujo foco é o ponto $(0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta $y = -1/4a$, o que é imediato.

As figuras, na página 96, que representam a elipse, a hipérbole e a parábola como seções cônicas, estão mal feitas, além de não serem acompanhadas de explicação. Elas dão a impressão de que para obter uma hipérbole, o plano que corta o cone duplo tem que ser paralelo ao eixo.

Mesmo que um estudo completo não possa ser feito neste nível, o leitor tem o direito de saber, pelo menos por meio de alguns exemplos, que, se os eixos coordenados não forem escolhidos convenientemente, as elipses, hipérboles e parábolas serão representadas por equações do segundo grau do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, nas quais os coeficientes C, D e E podem ser diferentes de zero. Por exemplo, seria interessante mostrar que a equação $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ representa uma elipse enquanto $x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 0$ representa uma hipérbole.

O capítulo termina sem que o leitor (por falta de comentários, exemplos trabalhados e exercícios) adquira a consciência de que a Geometria Analítica é um poderoso instrumento para resolver problemas e obter resultados de Geometria Plana, os quais não façam referências diretas a coordenadas. Neste sentido, a omissão de vetores é uma séria deficiência.

Capítulo 2. Números Complexos

O capítulo começa com uma "Leitura", seguida de uma "Introdução". Ambas são igualmente mal sucedidas. A primeira é uma conversa vazia, de gosto duvidoso, com referências vagas a Engenharia, Física e Eletrônica. Não explica nem motiva nada. Como freqüentemente fazem alguns professores, diz apenas: "vocês verão o significado dessas coisas mais tarde". Esse discurso estéril continua na Introdução, onde o estilo que pretende ser informal fica um pouco intimista demais, com o agravante de confundir o leitor com um comentário ambíguo sobre $\sqrt{-1}$.

A definição formal de números complexos como pares ordenados de números reais é apresentada abruptamente, sem que haja justificativa para a forma arbitrária com que as operações são definidas. A passagem de (a, b) para $a + bi$ é feita de repente, sem mencionar que na nova notação o par $(a, 0)$ é identificado com o número a e o par $(0, b)$ com bi, onde $i = (0, 1)$.

A "Leitura" inicial não contém referência alguma ao processo histórico bem conhecido que levou à introdução dos números complexos, nem tampouco suas aplicações à Geometria Plana, um assunto elementar, ao alcance dos alunos, que pode servir perfeitamente para justificar, neste nível de estudos, a consideração desses números.

O leitor deste livro deveria ser advertido para não levar em conta as páginas 108, 109, 110 e os dois terços iniciais da página 111. Começar a leitura do Capítulo 2 pelo item "igualdade, adição, multiplicação", no terço final da página 111. O que vem antes é desnecessário e só atrapalha.

Uma vez apresentada a interpretação geométrica de um número complexo como um ponto no plano cartesiano e, inclusive, tendo feito a conexão entre complexos conjugados e pontos simétricos em relação ao eixo horizontal, caberia dar a interpretação geométrica da soma de complexos. Aqui entraria naturalmente a soma de vetores no plano (regra do paralelogramo). Isto não é Física! É Matemática da melhor estirpe. Mas o livro silencia e o leitor perde com isso.

Não são estabelecidas, nem ao menos mencionadas, as propriedades operatórias do conjugado, como $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $z + \overline{z} = 2\,\mathcal{R}e\, z$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$, $z^{-1} = \overline{z} \Leftrightarrow |z| = 1$, etc. Elas são essenciais para o manuseio dos números complexos e serão necessárias no capítulo seguinte.

Também não são estabelecidas as relações entre o módulo de um complexo e as operações, como $|z + w| \leq |z| + |w|$, $|\overline{z}| = |z|$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|z/w| = |z|/|w|$, nem o significado de $|z - w|$ como distância entre os pontos z e w no plano. Estas ausências significam e implicam que não será feito uso apreciável das noções introduzidas.

Não é feita interpretação geométrica do produto de dois complexos. Em particular, não se diz que multiplicar por um número complexo de módulo 1 corresponde a efetuar uma rotação no plano em torno da origem. Mais particularmente, o complexo iz se obtém de z por uma rotação positiva de 90°. Nada disso é mencionado. Em conseqüência, não podem ser abordados problemas simples e interessantes, como achar os 2 vértices restantes de um quadrado quando se conhecem 2 vértices consecutivos do mesmo. Ou então, conhecendo dois vértices de um triângulo equilátero, determinar o terceiro. Problemas desse tipo, e inúmeros outros, são uma razão suficiente para ilustrar a utilidade dos números complexos já em nível elementar.

Nos exercícios (páginas 126, 129 e outras) os argumentos dos números complexos são todos múltiplos racionais de π. Isto é artificial e didaticamente impróprio.

Ao tratar das raízes de um número complexo, o livro apresenta inicialmente duas raízes cúbicas de 1, mas diz que existem três. Por que não explicitou a terceira? Por que não desenhar uma figura ilustrando que as raízes n-ésimas da unidade dividem a circunferência unitária em n partes iguais? (Num exercício resolvido [página 133] o desenho é feito para as raízes cúbicas de $8i$ apenas.)

As inúmeras e graves omissões de fatos elementares básicos sobre os números complexos restringem consideravelmente a qualidade da exposição do capítulo e fazem com que ele se reduza à apresentação de um elenco cujos personagens chegam ao fim da peça sem desempenhar papel algum.

Capítulos 3 e 4. Polinômios/Equações Polinomiais

Na Matemática do Ensino Médio, os polinômios podem ser estudados sob dois aspectos.

Do ponto de vista analítico, eles constituem uma classe importante de funções (reais ou complexas) cujas propriedades gerais são facilmente estabelecidas (no caso real) quando o programa abrange noções de Cálculo Diferencial, como ocorre em muitas escolas e em vários livros didáticos. Mesmo sem usar o Cálculo (caso deste livro), seria bastante instrutivo estudar os gráficos de alguns polinômios de graus baixos (3 ou 4) e estabelecer certos fatos gerais como, por exemplo, que todo polinômio real de grau ímpar possui ao menos uma raiz real. Apesar de ter sido este o aspecto dominante no Volume 1, onde se estudaram polinômios de grau ≥ 2, nenhum gráfico de polinômio de grau ≥ 3 é desenhado neste livro.

Do ponto de vista algébrico, os polinômios admitem uma teoria da divisibilidade, muito semelhante à dos números inteiros, além da teoria das equações algébricas. No caso de polinômios reais, esta última tem uma boa parte comum com a análise real, a saber, o cálculo aproximado das raízes de um polinômio.

No presente livro, a divisibilidade de polinômios sequer é definida em geral; considera-se apenas o caso do divisor $x - a$. O cálculo aproximado de raízes, assunto de fundamental importância em qualquer nível de estudos, não é abordado nem de leve. Nem ao menos o Teorema Fundamental da Álgebra (segundo o qual toda equação polinomial com coeficientes reais ou complexos possui ao menos uma raiz complexa) é enunciado, embora seja tacitamente admitido, como mostraremos a seguir.

Um polinômio é definido como "uma expressão" onde os coeficientes são "números" (não se diz se são reais ou complexos); no 5º exemplo se vê que podem ser complexos mas, logo em seguida, uma nota afirma que se os coeficientes forem reais e a variável x estiver restrita ao conjunto $\mathbb{R}$, obtém-se uma função polinomial. Mais um capítulo se inicia com os conceitos formulados de modo bastante confuso e ambíguo.

Dois polinômios são definidos como idênticos quando têm os mesmos coeficientes. Logo depois uma nota afirma tranqüilamente que "se dois polinômios têm valores numéricos iguais para todo valor atribuído à sua variável, então eles são idênticos". Aparentemente esta afirmação é considerada como um fato óbvio ou um resultado cuja demonstração é muito difícil, acima da compreensão do leitor, ou ainda algo banal, o qual não vale a pena perder tempo discutindo. Não é nem uma coisa nem outra, nem a terceira. Trata-se de um resultado que não é óbvio, que pode ser demonstrado sem grande dificuldade e que é essencial para todo o desenvolvimento do Capítulo 3. (Vide, por exemplo o método dos coeficientes a determinar.)

Em seguida, um polinômio identicamente nulo é definido como aquele que tem todos os seus coeficientes iguais a zero e uma nota, outra vez sem maiores comentários ou justificativas, diz que $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{C}$. O livro nem ao menos se dá ao trabalho de observar que este resultado é equivalente ao da nota acima mencionada.

O fato evidente de que o produto do polinômio identicamente nulo por qualquer outro dá um resultado nulo é destacado mas a recíproca — muito mais relevante — segundo a qual o produto de dois polinômios só é nulo se ao menos um dos fatores o for, não é mencionada.

A divisão por $x - a$ e o dispositivo de Briot–Ruffini são o grande destaque do Capítulo 3. No exercício 96, é bem oportunamente observada a relevância do dispositivo para calcular o valor numérico de um polinômio. Lá está dito que "ao calcular o valor numérico de polinômios em geral no computador é preferível usar o algoritmo de Briot–Ruffini". Não é bem assim. Em computadores, e mesmo em calculadoras, há programas já prontos para calcular esses valores numéricos. O usuário não exerce preferência. No cálculo manual mesmo é que o dispositivo em questão facilita o trabalho de quem está fazendo as contas.

Ao apresentar, na página 161, a forma fatorada de um polinômio, é tacitamente admitido que todo polinômio, real ou complexo, admite ao menos uma raiz complexa. O Teorema Fundamental da Álgebra não é citado. Na observação (página 161) é feita a afirmação ambígua: "diremos que um polinômio de grau n tem sempre n raízes em $\mathbb{C}$ ..." Isto vem após a forma fatorada, onde o T.F.A. já foi tacitamente usado. Não se sabe se é uma conseqüência daquela forma ou se é uma justificativa para ela. Não é esta a primeira vez (ao contrário, já são muitas) em que notas e observações contêm assertivas ambivalentes em situações cruciais, tornando a apresentação nebulosa, sem a transparência e a característica inequívoca da Matemática.

Não é dado exemplo de equação algébrica com coeficientes reais mas nenhuma raiz real.

Na pesquisa das raízes racionais de uma equação com coeficientes inteiros são usados, sem comentário algum ou referência qualquer, resultados sobre divisibilidade numérica que poderiam (e deveriam) ter sido estudados no Volume 1 mas não foram. (Tipo: se um inteiro divide um produto de dois fatores e é primo com um deles então divide o outro.)

Para mostrar que as raízes complexas de uma equação com coeficientes reais ocorrem aos pares conjugados, são utilizadas propriedades da conjugação que deviam ter sido estudadas no Capítulo 2 mas não foram (nem o são aqui).

Não há menção ou exemplo de cálculo aproximado de raízes reais de uma equação. Nem ao menos o método de Heron para a equação $x^2-a=0$. Tampouco se menciona que toda equação real de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

Capítulo 5. Noções de Estatística

Capítulo muito fraco. Dá a impressão de ansiedade para terminar o livro. Não diz ao leitor para que serve a Estatística. A definição de variância, por exemplo, é extremamente obscura. Por que calcular a média dos quadrados dos desvios? Por que o desvio padrão é definido com a raiz quadrada da variância? É uma série de definições arbitrárias que não dão ao leitor a menor oportunidade de ficar com uma idéia do que seja Estatística lendo o capítulo.