Antônio Machado

Matemática na Escola do Segundo Grau – volume 1

Capítulo 1. Conjuntos e Noções de Lógica

A noção de conjunto é bem colocada no início do programa de Matemática do Ensino Médio, pois fornece a linguagem e a notação adequadas para apresentar com precisão e generalidade a matéria que será tratada durante o ano e nos anos subseqüentes. O principal uso desta noção é dar uma interpretação concreta para algumas idéias, fundamentais porém abstratas, de natureza lógica, traduzindo-as como relações entre conjuntos. Assim, por exemplo, ao lidar com uma propriedade ou uma condição, o matemático refere-se sempre ao conjunto dos objetos que gozam daquela propriedade ou satisfazem aquela condição. E, todas as vezes que precisa entender ou demonstrar uma implicação lógica $p \Rightarrow q$, interpreta-a como uma inclusão entre conjuntos. Com efeito, chamando de P o conjunto dos objetos que possuem a propriedade p, ou cumprem a condição p, e Q o conjunto dos objetos que gozam da propriedade q ou satisfazem a condição q, a implicação lógica $p \Rightarrow q$ significa $P \subset Q$.

Mais geralmente, todas as noções lógicas elementares podem ser expressas na linguagem de conjuntos: a negação corresponde ao conjunto complementar, os conectivos "e" e "ou" correspondem à interseção e à reunião, etc. Esta tradução é muito conveniente e, na verdade, constitui a principal razão pela qual a linguagem e a notação de conjuntos se tornaram universalmente empregadas na Matemática.

Infelizmente, na maioria dos compêndios de Matemática usados em nossas escolas não fica claro para o leitor o motivo pelo qual os conjuntos são colocados no começo do livro.

Este é o caso presente. No capítulo inicial, sobre conjuntos e lógica, está dito que $a \Rightarrow b$ "quando da afirmação a podemos tirar uma conclusão b". Evidentemente, esta explicação não esclarece nada.

A falta de conexão entre conjuntos e lógica é patente em todo o Capítulo 1, apesar do título. A negação não está relacionada com o complemento e a importante noção de contrapositiva (que sequer é mencionada) não é vista como equivalente ao fato de que $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Num capítulo básico como este, seria de grande valia explicar o que significa uma definição matemática, mesmo porque várias vezes o autor menciona que certos conceitos são primitivos (não se definem). Na verdade, não apenas alunos mas professores (e até mesmo autores) fazem confusão a respeito do que sejam definições. Outra importantíssima idéia é a de recíproca, que também não é mencionada neste capítulo, como deveria.

As leis de De Morgan são demonstradas de maneira formal, usando símbolos em vez de palavras, o que torna o argumento ininteligível neste estágio da aprendizagem. Além do mais, a "demonstração" utiliza, num ponto crucial, uma igualdade que equivale ao que se quer demonstrar. Na verdade, essas leis não podem ser demonstradas sem utilizar axiomas que regulem o uso de "e" e "ou". Melhor seria apresentá-las como um exemplo importante da tradução da lógica via conjuntos.

Lamentavelmente ausentes neste capítulo estão uma explicação sobre os termos "necessário" e "suficiente", tão usados em Matemática, uma observação sobre o fato de que o conectivo "ou" não é disjuntivo, uma palavra sobre a fórmula $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, que é necessária em alguns exercícios, bem como algumas palavras esclarecedoras sobre termos como "teorema", "proposição", "corolário", "axioma", etc.

Finalmente, tem início neste capítulo uma prática que será adotada em todo o livro e que deveria ser evitada, a saber: os exercícios resolvidos sob forma de exemplos e os propostos no texto normal são meramente manipulativos e sem graça; os mais interessantes são apenas "para quem gosta de desafios" e nenhum deles é resolvido.

Capítulo 2. Os Conjuntos Numéricos

Os alunos que ingressam no Ensino Médio certamente já tiveram um longo contato anterior com números naturais, inteiros, racionais e até mesmo certos números irracionais, como o número π e algumas raízes quadradas não-exatas. Reapresentar-lhes esses números só tem sentido se o objetivo for o de ganhar mais consistência teórica, explicando-lhes de forma mais convincente fatos que foram impostos peremptoriamente antes e, ao mesmo tempo, mostrar, mediante exemplos, problemas e outras aplicações, que essas sucessivas ampliações do conceito de número têm alguma utilidade, na Matemática ou fora dela.

Isto não é feito aqui. Os números naturais não merecem uma única palavra de apresentação e a relação $m < n$ é destacada mas não é definida. Uma equivalência como $m < n \Leftrightarrow n - m \in \mathbb{N}^*$ é mencionada, assim simbolicamente, sem que se saiba se isto é uma definição ou um teorema. O importante fato de que todo número natural tem um sucessor não é mencionado.

Em seguida, é abruptamente escrita a igualdade

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

sem nada ser dito. Logo depois são mencionados alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$, com notações complicadas e de gosto duvidoso mas, infelizmente, consagradas pelos livros didáticos. Que tal $\mathbb{Z}_+^*$ para indicar o que os matemáticos simplesmente denotam por $\mathbb{N}$? É dito que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mas os inteiros não-negativos são indicados por $\mathbb{Z}_+$. Novamente, não se sabe se a equivalência $m < n \Leftrightarrow n - m \in \mathbb{Z}_+^*$ é uma definição ou um teorema. O livro inteiro é repleto de “temos”, “observamos”, “verificamos”, etc., o que não é educativo pois dá impressão ao leitor que as proposições gerais da Matemática são estabelecidas mediante a observação de alguns exemplos. Em muitos locais, uma observação é precedida da expressão “temos que”, o que é semanticamente incorreto pois “temos que” significa “devemos”.

É dito que um número racional pode ser representado por uma expressão decimal finita ou periódica, mas nenhum esforço é feito para justificar tal afirmação. Seria tão simples dar um exemplo (como $1/7$) de divisão continuada do numerador m pelo denominador n e lembrar que só podem ocorrer n restos diferentes; daí a periodicidade. Tampouco é feito esforço para dizer que significado tem uma igualdade como $1{,}333\ldots = 4/3$, que aparece no texto.

Talvez seja oportuno recordar que os livros brasileiros antigos explicavam essas coisas. Isto nos faz pensar: estamos realmente progredindo como nação civilizada?

Chegamos aos números reais. Trata-se, sem dúvida, de um ponto delicado. Como explicar o conceito de número real de forma matematicamente correta e ao mesmo tempo acessível aos alunos do Ensino Médio? Embora não diga isto explicitamente, o livro sugere que um número real é uma expressão decimal (finita ou infinita). Quando tal expressão é finita ou periódica, tem-se um número racional. Caso contrário, tem-se um número irracional. Por definição.

Há várias dificuldades em relação a essa abordagem. Uma delas está na questão prática de assegurar que um dado número é irracional. Por exemplo, o primeiro exemplo de número irracional dado pelo autor é $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$. Mas quem pode garantir, simplesmente olhando para alguns dos primeiros algarismos decimais, que não há periodicidade? (Um estudante impaciente poderia pensar que a expansão decimal de $1/23$ não é periódica.)

Outra séria dificuldade é a de definir as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (!) com expressões decimais infinitas. O autor simplesmente se refere a essas operações com números reais sem nunca as ter definido e enuncia várias de suas propriedades sem dar nenhuma indicação de como prová-las, ou pelo menos indicar por que elas seriam verdadeiras. Por exemplo, como se pode garantir que o número 0,1234567... tem um inverso multiplicativo? Qual a expressão decimal desse inverso?

Finalmente (mas de modo algum menos importante), o mínimo que se pode esperar de quem usa uma expressão decimal para representar um número real é que seja dito o que significa cada dígito dessa expressão. Isto não é feito no livro.

Os números reais, afirma o livro, podem ser representados por meio de pontos sobre uma reta. Mas não diz como. De que modo encontraríamos o ponto da reta que corresponde ao número real 0,1234567... ?

A desigualdade $a < b$ entre números reais nunca é definida. Se esses números forem dados por suas representações decimais, é bem simples dar o critério para saber se $a < b$, $a > b$ ou $a = b$. (Atenção: $a = b$ tem uma sutileza!) Mas o livro não diz. O único critério mencionado é o geométrico: $a < b$ quando o ponto da reta que corresponde ao número a está à esquerda daquele que corresponde a b. Mas, como o autor precisou da representação decimal para definir número irracional, não está claro como esse critério geométrico se relaciona com sua idéia inicial de número.

No estudo das desigualdades, o livro pisa na mesma casca de banana tão antiga ao dizer que uma desigualdade não se altera quando se soma o mesmo número a ambos os membros. É claro que se altera: $3 < 7$ não é mesma desigualdade que $4 < 8$.

Todas as dificuldades acima apontadas (e outras mais como a impossibilidade de resolver alguns exercícios, como por exemplo, verificar se $\sqrt{27}$ é irracional de acordo com a definição do livro) podem ser resolvidas, mas para isso é preciso mudar completamente de atitude.

Uma maneira conveniente de introduzir números reais sem cometer erros nem exageros de sofisticação matemática, de modo a ser entendido pelos alunos, é aquela que nossos antepassados já usavam. Um número real é o resultado da medida de uma grandeza, que podemos sempre imaginar como um segmento de reta. Número irracional é a medida de um segmento incomensurável com a unidade adotada. Mais detalhes desta abordagem acham-se no livro "A Matemática do Ensino Médio", vol. 1, por E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado.

Para finalizar a análise deste capítulo, devemos esclarecer que nenhum autor brasileiro de textos para o Ensino Médio trata os números reais adequadamente. Há outros muito piores, como os que definem número racional como o quociente de dois inteiros e número irracional como o número que não é racional, sem nunca ter dito antes o que é número.

Capítulo 3. Função polinomial do primeiro grau

Este capítulo trata das funções afins, isto é, do tipo $f(x) = ax + b$. Elas podem fornecer uma interessante gama de aplicações, que bem motivariam o estudante e dariam exemplos de como uma noção matemática tão simples pode ser usada para resolver problemas tão variados. Inclusive porque, entre as funções afins estão as lineares ($y = ax$) que constituem o modelo matemático para as questões referentes à proporcionalidade. E, como se sabe há séculos, a proporcionalidade (linearidade) é um dos instrumentos matemáticos mais empregados nas aplicações e na teoria.

Infelizmente, como em todo o livro, os exemplos e problemas interessantes cedem lugar a um formalismo monótono e muitas vezes mal orientado. A importantíssima noção de proporcionalidade é mencionada apenas de passagem, num único exercício e, assim mesmo, já sob a forma de uma função linear $y = kx$. Ora, o que é relevante nas aplicações (e na teoria também) é saber caracterizar as situações em que o modelo linear se aplica. Isto nunca se faz neste capítulo. Apenas um problema ("para quem gosta de desafios") trata da proporcionalidade sem mencioná-la explicitamente.

O fato mais notável relativo às funções afins é que a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais de $f(x)$. Isto se revela no gráfico da função, aparece na definição de movimento uniforme e acha-se presente em todos os problemas de regra de três. Mas está inteiramente ausente do livro. Novamente deve ser dito (e poderia ser repetido em todas as análises dos capítulos seguintes) que os demais livros brasileiros também fazem isso. Têm razão os alunos que acham Matemática sem interesse, sem atrativos e sem relação com a vida. A Matemática que lhes mostram é assim. O que eles não sabem é que a verdadeira Matemática pode ser muito atraente, desafiadora, útil e acessível. É que os autores brasileiros, e conseqüentemente os professores, raramente mostram o melhor.

Mas, em que pese a gravidade das omissões, deixemos de lado o que o livro deveria ter e olhemos para o que ele tem.

A noção de função é apresentada em toda a sua generalidade, a partir de pares ordenados, produto cartesiano e relação binária. Tudo isto é absolutamente desnecessário e inútil. O próprio livro, depois de dada a definição geral, todas as vezes que introduz uma função, trata-a como uma correspondência sem nunca mais falar em pares ordenados.

A propósito, um par ordenado *não* deve ser pensado como "um conjunto de *dois* elementos considerados numa certa ordem" já que (x, x) é um par ordenado.

Com toda a preparação, a definição de função, é dada incorretamente como "uma relação que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B". Ora, se uma relação é um subconjunto de $A \times B$, como é que um subconjunto faz alguma coisa corresponder a outra?

A verdade é que, apesar de toda a complicação e do aparato formal, em todo o livro ocorrem apenas dois tipos de funções: aquelas com bolinhas e setinhas (que ilustram bem os conceitos gerais mas que não são usadas para nada mais) e aquelas definidas por meio de fórmulas.

Em vez de tratar das funções afins em geral ($f(x) = ax + b$), o livro separa as funções constantes ($a = 0$) das funções polinomiais do primeiro grau ($a \neq 0$), o que não traz vantagem alguma e só atrapalha o aluno. Esta distinção de $a \neq 0$ para $a = 0$ faz sentido para funções quadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$) mas aqui não. Afinal de contas, uma parábola é bem diferente de uma reta mas uma reta horizontal é uma reta como as outras.

O gráfico de uma função afim é uma reta. Isto é um fato verdadeiro, não porque alguém localizou alguns pontos nos gráficos de algumas funções afins e achou que eles estavam alinhados. Ao contrário de Anatomia, Matemática é uma ciência dedutiva. É fácil, é bonito e é interessante provar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Alguns alunos e certos professores poderão, por um motivo ou outro, saltar essa demonstração mas pelo menos ficarão sabendo que ela existe. E os professores e alunos interessados a aprenderão. O que não é aconselhável (mas é feito repetidamente no livro) é dar a impressão de que uma verificação superficial de dois ou três exemplos é razão suficiente para se tirar uma conclusão geral.

Não são destacados os significados dos coeficientes a e b da função $ax + b$, nem graficamente nem numericamente. Em conseqüência, não se fala na taxa de crescimento nem na velocidade constante. Tudo isso aponta para um estudo inteiramente dissociado das aplicações, da realidade e dos outros temas da própria Matemática.

Capítulo 4. Função Polinomial do Segundo Grau

O Capítulo 4 começa com equações do segundo grau. Este é mais um assunto que o aluno já estudou antes, portanto esperava-se um tratamento mais amadurecido do mesmo, completando certas discussões, abordando novos aspectos e, principalmente, salientando os pontos relevantes. Mas nada disso acontece, como veremos.

Em nenhum exemplo substitui-se na equação $ax^2+bx+c = 0$ o símbolo x pelas raízes encontradas, para verificar que o resultado é mesmo zero. A verificação, além de contribuir para que o aluno descubra eventuais erros cometidos, deixaria claro em sua mente o significado da raiz de uma equação, coisa que o livro não define explicitamente.

Completar o quadrado, essa técnica elementar tão útil, é assunto nunca mencionado. O aluno, que já resolveu dezenas de exercícios de fatoração envolvendo o quadrado de uma soma, terá aqui que aplicar a famigerada fórmula de Báscara para obter a raiz da equação $9x^2+12x+4 = 0$. O fato de que $9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$, super-estudado no ano passado, está esquecido, enterrado e ultrapassado. Aliás, não é preciso nem recuar no tempo. Neste livro, coisas estudadas nos capítulos iniciais não são usadas nos seguintes. (Vide Capítulo 1.)

É muito grande a variedade de problemas interessantes, antigos e atuais, que se resolvem usando equações do segundo grau. Os babilônios, há 4 mil anos, já tratavam do problema de determinar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Este problema não é mencionado aqui, o que é imperdoável, pois resolver uma equação do segundo grau (qualquer uma) corresponde a procurar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Por exemplo, os babilônios já sabiam que se a soma é (positiva e) muito pequena e o produto é (positivo e) grande (exemplo: soma 2 e produto 200) os números procurados não existem, e aqui se tem uma ilustração do caso em que a equação não tem raízes reais.

Infelizmente constatamos que este capítulo não fala na soma e no produto das raízes, e muito menos na forma fatorada $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ da equação. Um resultado disso é que muitos alunos, e mesmo alguns professores, diante da equação $(x - 7)(x + 8) = 0$, efetuam a multiplicação, aplicam a fórmula e se admiram (se não erraram nos cálculos) de ver que as raízes são 7 e -8. Novamente aqui vemos a falta que faz a verificação de que falamos antes e, conseqüentemente, a consciência do significado da raiz de uma equação.

Voltemos aos problemas chamados "do segundo grau". Eles são muitos, variados e atraentes. Neste capítulo há três (apenas!). Nenhum deles é resolvido e todos aparecem como trabalho extra, "para quem gosta de desafios". Ao tratar deste assunto, seria importante ilustrar, com exemplos resolvidos e exercícios propostos, problemas que admitem duas soluções perfeitamente cabíveis, duas soluções das quais apenas uma serve, uma única solução ou nenhuma.

O estudo da função quadrática é feito com base no seu gráfico, que é uma parábola, cuja definição e propriedades são adiadas para o terceiro volume. Acontece, porém, que naquele volume prova-se que a equação de uma parábola é do tipo $y = ax^2 + bx + c$ enquanto que aqui o que importa é a recíproca, ou seja, que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Esta recíproca é apenas mencionada no volume 3 mas não é provada.

A partir daí, uma série de afirmações são feitas sem justificativa, salvo a promessa, muitas vezes implícita, de que os esclarecimentos estarão no volume 3, o que nem sempre acontece. Assim, por exemplo, ocorre com o eixo de simetria. Nem aqui nem no volume 3 está provado que se m é abscissa do vértice da parábola $y = f(x)$, então $f(m+p) = f(m-p)$, seja qual for p. O autor usa este fato como se estivesse estabelecido, mas não está.

Há uma expressão extremamente útil para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a qual equivale à chamada "forma canônica do trinômio do segundo grau". Trata-se da identidade

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k$$

onde $m = -b/2a$ e $k = f(m)$. Isto se prova de maneira trivial, completando o quadrado no primeiro membro. A expressão $f(x) = a(x - m)^2 + k$ se emprega em todos os problemas que se refiram ao vértice da parábola. Dela também resulta imediatamente que se tem $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se, $x_1 = m - p$ e $x_2 = m + p$.

As ilustrações deste capítulo, como em geral de todo o volume, são boas e ajudam bastante a entender a discussão sobre o sinal da função quadrática. O mesmo não se pode dizer sobre o texto, que é repleto de símbolos. Um professor experiente diria sobre o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que quando x está fora do intervalo das raízes $f(x)$ tem o mesmo sinal de a e quando x está entre as raízes $f(x)$ tem sinal contrário ao sinal de a. Se não há raiz real, $f(x)$ tem sempre o sinal de a e se há uma só raiz, o intervalo delas se reduz a um ponto, logo x não pode estar entre as raízes.

Dito assim, com palavras, fica mais fácil de gravar e de entender. Mas o livro prefere o uso do simbolismo e com isso a Matemática fica mais hermética. Por outro lado, a verificação de que esta discussão é correta, feita com as figuras como no texto, é bastante elucidativa e bem que dispensava simbologia.

Como sempre, ficam faltando problemas em que esses conhecimentos sejam aplicados. Vale a pena mencionar um problema (pág. 96) em que é dada a fórmula $8x + 9x^2 - x^3$ para o número de unidades fabricadas por um operário após x horas de trabalho. Pede-se então sua produção após 4 horas de trabalho e sua produção durante a quarta hora. Em primeiro lugar, não é um problema sobre a função quadrática. Em segundo lugar, é uma questão muito tola. E por último (mas principalmente) trata-se de uma pseudo-aplicação, na qual é dada uma fórmula que ninguém sabe de onde veio nem que confiança se pode ter nela. Nas verdadeiras aplicações da Matemática os problemas, quer provenientes da vida real, quer das outras ciências, quer da própria Matemática, não vêm acompanhados de fórmulas. A parte mais difícil é geralmente achar o instrumento matemático a ser empregado.

Capítulo 5. Operações sobre funções

Este capítulo se ressente da falta de um objetivo bem definido.

Logo de início, é estudada a função $f(x) = 1/x$, cujo gráfico é identificado com uma hipérbole equilátera. É feita a promessa de estudarem-se as hipérboles no volume 3, mas não é bem o caso. Lá o leitor é apenas convidado a mostrar, como exercício, que o gráfico de $f(x) = 1/x$ é uma hipérbole.

Em seguida, ao apresentar a função $f(x) = a/(x+b)$, o livro afirma que seu gráfico também é uma hipérbole mas não justifica. Com isso, perde-se uma excelente oportunidade de ver que o gráfico da função $g(x) = f(x+b)$ se obtém daquele de $f(x)$ por uma translação horizontal. E logo depois, ao examinar o gráfico de $f(x) = (x+a)/(x+b)$, ou seja, de $f(x) = 1 + \dfrac{a-b}{x+b}$, deveria ser dito também que o gráfico de $h(x) = f(x) + k$ se obtém daquele de $f(x)$ por uma translação vertical.

A noção de grandezas inversamente proporcionais aparece neste capítulo, num exercício, sob a forma da função $f(x) = k/x$. Novamente aqui salientamos que esse conceito deveria ter maior destaque e que, nas aplicações reais, nunca se tem uma fórmula. Ao contrário, é preciso ter um critério que permita identificar os casos de proporcionalidade inversa a partir das condições do problema. Por isso, a definição deve ser modificada. Antonio Trajano, em sua Aritmética, cuja primeira edição foi publicada no século 19, já trazia a definição correta.

Neste capítulo, são ainda tratados os conceitos de função composta, função injetora, sobrejetora e inversa. Os exemplos de funções injetoras e sobrejetoras são todos com bolinhas e setinhas. Isto deixa a impressão de que esses conceitos são irrelevantes e, de fato, o livro não os utiliza em muitas ocasiões em que devia, nos capítulos seguintes.

Na verdade, a noção intuitiva de função inversa é tão mal formulada que, segundo ela, duas funções quaisquer $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ são sempre inversas uma da outra. A própria definição formal de f^{-1} está muito mal redigida.

A função identidade não é mencionada, o que prejudica a definição adequada da inversa.

É feita uma lista das propriedades da raiz quadrada, entre as quais está $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2$. Não admira que haja leitores tentando provar isto, sem perceber que se trata da definição.

Enquanto proporcionalidade direta e inversa são relegadas a exercícios banais, este capítulo dá destaque a seções como "funções definidas por radicais" ou "funções definidas por mais de uma sentença". Isto não é um defeito tão insignificante como parece. De fato, uma das principais tarefas do professor (e do livro didático) é destacar os pontos importantes, distinguindo-os bem nitidamente dos exemplos irrelevantes.

Em todo o capítulo não há um só problema interessante.

Capítulos 6 e 7. A função exponencial/A função logarítmica

Estes capítulos são apresentados separadamente no livro, como é de costume. Em verdade, sendo uma dessas funções a inversa da outra, é claro que todas as propriedades de uma delas estão embutidas nas da outra. Mesmo tratando-as em capítulos diferentes, este fato deveria ser enfaticamente destacado. No livro, há uma simples frase a esse respeito. ("A função logarítmica $y = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $y = a^x$.") Nunca mais se fala nisso, e muito menos se usa.

Assim como em todo o livro, não há preocupação em motivar o estudo dessas funções com problemas reais, em cujos enunciados não ocorrem as palavras "exponencial" nem "logaritmo". Os pouquíssimos problemas de aplicação já vêm acompanhados de fórmulas e se reduzem, portanto, a meros exercícios manipulativos.

Novamente aqui, cabe um lamento. A função exponencial (e portanto a logarítmica) ocupa um lugar de grande destaque no ensino por causa de sua enorme relevância nas aplicações, tanto na vida diária, como nas outras ciências e na própria Matemática. Exemplos: 1) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose? 2) Quantos algarismos decimais tem o número 2^{50}? No caso 1) temos um problema da vida real e, no caso 2), um problema matemático. Em nenhum dos enunciados se fala em função exponencial ou logaritmo. Questões assim existem às centenas e o livro deveria fazer delas uso constante e destacado. Mas não faz. A expressão "meia-vida" nunca aparece.

Em compensação grandes destaques são dados a equações exponenciais (que se resumem basicamente à injetividade da função exponencial) e a inequações do mesmo tipo (que se traduzem na monotonicidade da mesma função).

No Capítulo 3 nunca foi feita a observação de que se $f(x) = ax + b$ é uma função afim então os números $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$ são tais que $f(2) - f(1) = f(3) - f(2) = \cdots = a$. Além de servir para motivar mais tarde o estudo das progressões aritméticas, esta propriedade encerra o que há de essencial sobre funções afins. Analogamente, no Capítulo 6, embora o gráfico da pág. 129 deixe claro que, dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$ formam uma progressão geométrica, nada é dito sobre isso. Na verdade, para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x. Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, $\ldots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, $\ldots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante. Isto é fácil de ilustrar com gráficos e com exemplos (juros, bactérias, desintegração, etc.). E é a razão pela qual as funções de tipo exponencial (e os logaritmos) têm tanta importância. Livros estrangeiros do nível deste dão grande destaque a isto mas, aqui no Brasil, está arraigada a concepção de que Matemática não passa de uma série de manipulações formais, sem justificativa lógica nem aplicações. Quando muito, as poucas e esparsas aplicações vêm nos exercícios "para quem gosta de desafios", não são tratadas no corpo do texto e são claramente consideradas como assuntos marginais.

O tratamento dado aos assuntos dos Capítulos 6 e 7 sofre ainda de defeitos intrínsecos, que apontaremos a seguir.

As propriedades formais da exponenciação, como $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e outras, são enunciadas sem uma só palavra de justificativa, nem ao menos para x e y racionais. Isto reforça a impressão de que em Matemática basta a declaração do livro para que os enunciados sejam verdadeiros.

Embora a injetividade da função exponencial seja freqüentemente usada no livro e a noção de função injetora ["injetiva" seria preferível, já que "injetora" não se presta a uma substantivação tipo "injetoridade"] tenha sido estabelecida no início, isto nunca é mencionado explicitamente. O livro destaca que $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ mas não diz por que. (Aliás, ele escreve $a^{f(x)} = a^{f(y)} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, como se $f(x)$ e $f(y)$ fossem números de uma categoria diferente de x e y.) Seria oportuno observar (o que não é feito) que toda função crescente (ou decrescente) é injetora.

Acontece que a bijetividade da função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, é essencial para a definição de $\log_a$. Este termo, embora tenha sido introduzido antes, não é usado. A injetividade resulta da monotonicidade. Quanto à sobrejetividade, o livro tenta justificá-la na página 138 mas sua explicação é altamente não-convincente. Em primeiro lugar, ele admite que f é crescente sem supor $a > 1$. Tudo bem, foi esquecimento. Mas, mesmo assim, quem garante que, dado b, existe um inteiro k tal que $a^k \leq b < a^{k+1}$, e muito menos, como concluir daí que $b = a^x$ para algum x com $k \leq x < k + 1$? Claro que este é um ponto delicado, para o qual se requer muito tato a fim de obter um ponto de equilíbrio entre a precisão matemática e a inteligibilidade. Seja qual for, entretanto, a saída para o problema, ela não deve basear-se num argumento incompleto ao qual se concede o status de razão suficiente.

Na página 141, encontramos a seguinte frase: "Muitos fenômenos naturais são governados por leis exponenciais de base e ...". Ora, os fenômenos não são governados e sim descritos por leis matemáticas, as quais fornecem modelos para representá-los. Mas deixemos de lado este detalhe de natureza epistemológica. O ponto é que uma função exponencial de base e, como $f(x) = e^{ax}$, pode, para qualquer $b \neq 1$, ser escrita como uma exponencial de base b; basta notar que $e^{ax} = b^{cx}$, onde $c = a/\ell n\, b$. O que dá primazia à base e não é nenhuma exclusividade para descrever os fenômenos naturais. É que, em última análise, é a única base a para a qual se tem $\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1)/x = 1$, portanto é a única base a para a qual a taxa de crescimento de a^x é igual a a^x mesmo.

Ao dizer que os logaritmos perderam sua importância como instrumento de cálculo, o livro afirma (pág. 153) que "o estudo das propriedades dos logaritmos, porém, se faz até pela importância que elas têm na própria teoria." Esta é uma frase vazia, que não explica nada. O que ele deveria dizer era que o logaritmo é o expoente que aparece na função exponencial, logo onde esta aparecer ele também surge. A importância dos logaritmos é, por conseguinte, a mesma da função exponencial, que serve para modelar todas as situações em que a taxa de crescimento de uma grandeza é proporcional ao valor dessa grandeza.

O Capítulo 7 finda com uma Leitura Complementar. Infelizmente, entre os diversos temas cabíveis para essa leitura, o escolhido foi a Tábua de Logaritmos. Que desperdício! Vale a pena perguntar aos professores quantas vezes, no último ano eles precisaram recorrer a uma tábua de logaritmos para resolver algum problema. O melhor mesmo teria sido falar no uso da calculadora em problemas numéricos.

Capítulos 8, 9, 10, 11 e 12. Trigonometria

O livro dedica 110 páginas, repartidas em cinco capítulos, para expor a Trigonometria. Esse número excessivo (não só neste, mas em todos os livros didáticos brasileiros) é devido ao destaque dado a temas irrelevantes.

As 27 páginas que formam o Capítulo 8, são dedicadas ao senos, cossenos e tangentes dos ângulos de um triângulo. As leis dos senos e dos cossenos são estabelecidas aqui no começo, o que é adequado. Os seguintes pontos podem ser observados:

O ângulo reto é definido como aquele que mede 90 graus. Mas o que é um grau? Ao que se sabe, o grau é a medida de um ângulo igual a 1/90 do ângulo reto. A definição dada, portanto, envolve um círculo vicioso. Ângulo reto é aquele cujos lados são perpendiculares. Ele pode medir 90 graus, 100 grados ou $\pi/2$ radianos, mas isto não é essencial para caracterizá-lo geometricamente.

Na seção 4 do Capítulo 8 é introduzida uma noção que contribui para confundir e complicar, sem ajudar em nada, a saber, o cosseno, o seno e a tangente da medida de um ângulo. Quando se trata de um ângulo entre 0 e 2 ângulos retos, ou seja, um ângulo que pode estar num triângulo, as funções trigonométricas daquele ângulo podem ser, (e foram no texto) definidas diretamente, sem precisar medi-lo. Aí é que está a razão de ser deste capítulo inicial, separado. São funções reais cujo domínio é o conjunto dos ângulos entre 0 e 2 retos. Se quisermos falar de sen 30° ou cos 45°, tudo bem, não há problema. O cosseno de 45° é o cosseno de um ângulo que mede 45 graus. Mesmo que o ângulo seja obtuso, vale a definição. Todo o estudo dos triângulos pode ser feito, com grande simplicidade, usando o seno e o cosseno de um ângulo, seja esse ângulo identificado por sua medida ou não. Não há dificuldade.

Assim, por exemplo, o cosseno é uma função $\cos\colon A \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto A dos ângulos do plano. (Lembrando que ângulo é um par de semi-retas que têm a mesma origem.) Note-se que se tem aqui um exemplo concreto, um caso particular da noção de função, que foi definida com tanta generalidade nos capítulos anteriores.

Somente quando ocorre a necessidade (ou a intenção) de tratar seno, cosseno, etc. como funções reais de uma variável real, ou seja, $\text{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é que precisa falar nas funções trigonométricas da medida de um ângulo. Neste caso, para cada unidade de medida tem-se uma função diferente, mas é costume universal unificar as teorias, tomando o radiano como unidade. Isto é bem conveniente porque as fórmulas do Cálculo ficam mais simples.

Ao falar das tabelas de valores das funções trigonométricas, o livro faz referência a computadores mas não diz que, hoje em dia, a maneira mais rápida e precisa de obter esses valores é usando uma calculadora manual. Aliás, uma ausência conspícua em todo o livro é a das calculadoras. Elas deveriam ser mencionadas e usadas com certa freqüência, pois são essenciais na resolução de problemas reais, onde os dados numéricos não são aqueles escolhidos pelo professor ou pelo autor do livro para que a resposta fique bonitinha. Lendo a página 177, o aluno pode ter a impressão de que é necessário um computador para saber quanto vale o seno de um ângulo de 3 graus.

A figura da página 182 é para explicar o sinal negativo do cosseno de um ângulo obtuso, logo o destaque não deveria ser dado ao ângulo de 30°.

As leis dos senos e dos cossenos são apresentadas neste capítulo inicial e isto, como dissemos, é bom pois os assuntos deixados para o fim do livro raramente são tratados em aula. Entretanto, há uma séria omissão. A principal aplicação dessas leis é a determinação dos seis elementos de um triângulo (3 lados e 3 ângulos) conhecendo-se três deles, sendo pelo menos um lado. Embora alguns exercícios tratem de casos particulares desta questão, a discussão geral não é feita, como deveria ser. Também seria interessante observar que a razão comum do seno para o lado oposto é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Para introduzir a noção da radiano, o autor faz uso de uma regra de três não justificada e de sua frase mágica “podemos notar”, com a qual legitima todas as afirmações gerais. Na verdade, o radiano é mal explicado em quase todos os nossos livros didáticos, por isso vale a pena recordar seu significado.

Numa circunferência de raio r, o comprimento ℓ do arco subtendido pelo ângulo central α é diretamente proporcional a r e à medida do ângulo α. Indicando, como de hábito, pelo mesmo símbolo α o ângulo central e sua medida, e admitindo que o raio e o arco são medidos com a mesma unidade, temos então $\ell = c \cdot \alpha \cdot r$, onde a constante de proporcionalidade c depende da unidade escolhida para medir os ângulos. (Note-se que c não depende da unidade de medida linear porque, se a mudarmos, ℓ e r serão multiplicados pelo mesmo fator, que se cancelará na igualdade acima.) Se variarmos a unidade de medida dos ângulos, a constante c ficará multiplicada pelo fator de mudança. Por exemplo, se a unidade é o grau, $c = \pi/180$, se é o grado então $c = \pi/200$. Se passamos de graus para grados, c ficará multiplicado por $9/10$. Pois bem, o radiano é a unidade de medida de ângulos para a qual se tem $c = 1$. Quando o ângulo α é medido em radianos, a fórmula acima se reduz a $\ell = \alpha \cdot r$, logo $\alpha = \ell/r$. Portanto, a medida de um ângulo em radianos é a razão entre o arco que ele subtende na circunferência que tem centro no seu vértice e o raio dessa circunferência.

São dados exemplos numa tabela (bem ilustrada, por sinal) onde se tem a conversão de unidades, de graus para radianos. Todos os ângulos que dela constam têm por medida em radianos um múltiplo racional de π. Isto pode levar (e de fato leva) muitos alunos a pensarem que não se pode falar em ângulos de 3 radianos, por exemplo. A propósito, a tabela (nem nenhum outro lugar no livro) não diz quantos graus tem um radiano ou quantos radianos mede um ângulo de 1°.

Seja C a circunferência unitária de $\mathbb{R}^2$, isto é, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. O livro chama C de "o ciclo" e fala da "correspondência entre os números reais e os pontos do ciclo". Em primeiro lugar este neologismo "ciclo" é desnecessário e não corresponde à linguagem comum dos matemáticos e dos usuários da Matemática. Em segundo lugar, a preposição "entre" tem uma conotação de simetria. Diz-se "uma correspondência biunívoca entre os conjuntos X e Y" mas não se diz "uma função $f \colon X \to Y$ entre X e Y". E por último, mas não por menos, por que não dizer logo a *função* $E \colon \mathbb{R} \to C$, cujo contradomínio é a circunferência unitária C? Para que introduzir a noção de função em toda a sua generalidade no começo do livro e depois, quando se depara com um importantíssimo exemplo de função como este, ter acanhamento de usar os conceitos e a terminologia já apresentados anteriormente? A função $E \colon \mathbb{R} \to C$, devida a Euler, é instrumento indispensável para estudar as funções trigonométricas. Não se deve ter receio de falar explicitamente dela. Pelo contrário, deve-se dar-lhe todo o destaque merecido.

Os “números congruentes” deveriam sempre ser ditos “congruentes módulo 2π”, ou mod 2π simplesmente. Pois há congruências com muitos módulos.

O desenvolvimento dos tópicos de Trigonometria segue um roteiro tradicional, dentro do modelo rebarbativo que foi um dos grandes responsáveis pela revolução da Matemática Moderna feita há 3 ou 4 décadas. Que sentido tem hoje em dia “transformar soma em produto”? O autor simplesmente exibe seus algebrismos sem explicar por que o faz. Antigamente isso se chamava “tornar calculável por logaritmos” e já naquela época não tinha muito sentido. Toda essa pletora de assuntos desmotivados e sem objetivo aparente faz com que a Trigonometria ocupe tantas páginas desnecessariamente. Isto, em vez de ajudar a que ela seja melhor entendida, tem o efeito oposto. Enquanto isso, o que é realmente fundamental é omitido, tocado de leve ou soterrado debaixo de um monte de irrelevâncias. Por exemplo, em 110 páginas de Trigonometria não se encontra o fato de que, ao projetar ortogonalmente um segmento de reta sobre um eixo, seu comprimento fica multiplicado pelo cosseno do ângulo que ele faz com aquele eixo.

Para determinar o período da função $f(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$, é usada desnecessariamente a fórmula do seno da soma, sem se perceber que para qualquer função periódica f, de período p, a função $g(x) = f(\omega x)$ tem período p/ω. Além do mais, a demonstração está incorreta, pois a última implicação está invertida.

Observações gerais sobre o livro

Boa qualidade gráfica. Figuras claras. Revisão cuidadosa. Concepção tradicional de ensino, com ênfase muito predominante nas manipulações. Os conceitos apresentados em geral não são precedidos de motivação. São raras as aplicações a problemas reais e nenhuma delas é exposta nem resolvida no texto. O livro não utiliza nos capítulos seguintes, sequer na parte teórica, muitos dos conceitos introduzidos nos capítulos anteriores. Não estabelece conexões entre os assuntos tratados nos vários capítulos, nem entre si nem com os estudos feitos nos anos anteriores. Não evidencia a estrutura lógico-dedutiva da Matemática. Não estimula a criatividade e a imaginação do leitor nem o induz a conjeturar. Não verifica respostas. Não apresenta problemas com final em aberto. Não deixa clara a diferença entre definição e teorema. Abusa das expressões do tipo “observamos que”, “notamos que”, etc. Não usa nem se refere ao uso de calculadoras.

O livro é dividido em partes, cada uma das quais agrupa alguns capítulos. Precedendo cada parte vem uma página que descreve uma profissão de nível universitário (Medicina, Direito, Administração, Química, etc.). No final da descrição há um parágrafo onde se tenta explicar a importância da Matemática naquela profissão. As explicações são fraquíssimas, às vezes até contraproducentes. O autor deveria, em cada caso, valer-se da consulta a uma autoridade naquela área para conseguir informações que lhe levassem a uma propaganda mais fundamentada da necessidade dos conhecimentos matemáticos.

Antônio Machado

Matemática na Escola do Segundo Grau – volume 2

Capítulo 1. Progressões Aritméticas

O capítulo começa com a definição de seqüência como um conjunto ordenado. Além de apelar para uma noção que não foi nem será explicada no livro (a de conjunto ordenado), esta definição é incorreta pois um conjunto (ordenado ou não) não tem elementos repetidos. Além disso, o conjunto dos números reais é ordenado mas não é uma seqüência. Na verdade, uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais (seqüência infinita) ou o conjunto dos n primeiros números naturais (seqüência finita, com n elementos). A noção de função foi definida, com toda a generalidade, no vol. 1. Aqui seria mais um bom lugar para usá-la. Assim, igualdade de duas seqüências reduz-se à igualdade de duas funções, não sendo necessário dar a definição incorreta do livro. Com efeito, as seqüências $(1, 2)$ e $(1, 2, 2)$ têm os mesmos elementos, 1 e 2, dispostos na mesma ordem (1 vem antes de 2 em ambos os casos), mas não são iguais.

Em realidade, ao mencionar a fórmula do termo geral, o livro já está tratando a seqüência como uma função.

Nas seqüências definidas por recorrência, cada termo é calculado não apenas a partir do anterior mas, ao contrário do que afirma o livro, a partir de um, dois ou mais anteriores, mesmo de todos eles. Um exemplo disso é a seqüência das temperaturas máximas até cada dia de um ano; outros são os recordes olímpicos de corrida, salto, natação, etc.

A propósito, os exemplos de seqüências oferecidos são artificiais, sem relação com a realidade, e sem graça. Mesmo no âmbito da Matemática, há exemplos concretos e naturais como, digamos, $a_n =$ número de diagonais de um polígono de n lados. Aqui, tem-se a recorrência $a_{n+1} = a_n + n - 1$. Nenhum exercício proposto é desafiador ou relacionado com uma situação real.

As seqüências são classificadas em crescentes, decrescentes ou estacionárias, deixando a impressão de que não existem seqüências de outro tipo.

Uma progressão aritmética é meramente a restrição de uma função afim ao conjunto dos números naturais. Dada uma progressão aritmética (a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$) existe uma única função afim $f(x) = ax + b$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E reciprocamente: dada a função afim $f(x) = ax + b$, seus valores $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n)$, ... formam uma progressão aritmética. Esta conexão nunca é feita no livro, embora a fórmula do termo geral a sugira claramente. Um defeito grave deste livro, e do ensino da Matemática em geral nas nossas escolas, é que os tópicos aprendidos numa ocasião não são relacionados com os estudos subseqüentes.

Outra deficiência, que já fizemos notar antes, é a de salientar fatos irrelevantes e omitir outros que mereceriam destaque. Aqui temos um exemplo disso. Como uma reta fica determinada por dois de seus pontos, basta conhecer dois valores de uma função afim para determinar todos os demais. Daí, conhecendo-se dois termos de uma progressão aritmética esta fica determinada. Este fato não é mencionado explicitamente no texto. Em compensação é dado destaque à observação inconseqüente de que $m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + q_q$ numa progressão aritmética.

Os casos mais importantes de soma dos termos de uma progressão aritmética são a soma dos n primeiros números naturais e a soma dos n primeiros números ímpares. Esta última é calculada num exemplo e a primeira é proposta como exercício. A expressão geral da soma S_n nunca é apresentada explicitamente como uma função quadrática de n. Muito menos é observado que todo trinômio da forma $an^2 + bn$ representa a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (o que levaria à noção de progressão aritmética de 2ª ordem).

Os poucos exercícios interessantes são apenas "para quem gosta de desafios". O importante símbolo $\sum$, de somatório, aparece no último desses exercícios porém merecia maiores esclarecimentos.

Os autores brasileiros de livros didáticos de Matemática costumam incluir o zero entre os números naturais mas escrevem as progressões como a_1, a_2, ..., a_n, ... Por que não começar as progressões com a_0? Isto inclusive simplificaria as fórmulas.

Capítulo 2. Progressões Geométricas

As progressões geométricas são bem mais interessantes do que as aritméticas, porque ocorrem em diversas situações freqüentes na vida atual. Seu estudo pode ser motivado com exemplos atraentes de culturas de bactérias, compras a prazo, desintegração radioativa, concentração de substâncias em nosso organismo, resfriamento de corpos, pressão atmosférica, etc.

Uma progressão geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial, $f(x) = b \cdot a^x$ e se consideram apenas os valores $f(n) = b \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}$. Por isso é que os problemas em que se aplicam funções exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam progressões geométricas.

É excusado dizer que, neste livro (como nos demais em uso no país), esta importantíssima conexão entre progressão geométrica e função exponencial não é explorada. A motivação que abre o capítulo é artificial, o mesmo ocorrendo com os exemplos que se seguem à definição de progressão geométrica. Dentre os 18 exercícios iniciais, há uma tentativa de apresentar questões interessantes nos três últimos. Mas o último deles apresenta uma situação irreal: quem pode imaginar que "Uma dívida será paga mensalmente, sendo que a cada vez se pagará 20% da dívida restante"?

Novamente é dado destaque a fatos irrelevantes sobre progressões geométricas, como $m + n = r + s \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$, enquanto questões interessantes, como interpolação de meios geométricos, são omitidas. (Bem entendido, falar em interpolação só faz sentido no contexto de problemas reais.)

Para ilustrar uma situação em que se tem a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o autor escolhe um exemplo muito infeliz, no qual um pedaço de barbante é cortado ao meio, uma das metades é posta no bolso, a outra é cortada novamente ao meio e uma das partes posta no bolso, etc. Depois, temos que juntar todos os pedacinhos que estão no bolso (em número infinito) e, como diz literalmente o autor: "o barbante inicial vai ficar guardado inteiro em nosso bolso, só que em pedacinhos." (!)

De um modo geral, as tentativas feitas pelo autor para ilustrar os conceitos com situações reais, além de raras, são mal sucedidas como o exercício sobre um pedreiro que constrói uma calçada e por cada dia de serviço cobra o dobro do dia anterior. Há tantos exemplos naturais sobre este assunto que não seria difícil encontrar vários mais plausíveis.

O tratamento dado à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (série geométrica) é muito insatisfatório. Não é feita nenhuma tentativa para dar significado a uma soma com um número infinito de parcelas. Nem se menciona jamais que as potências sucessivas $q, q^2, q^3, \ldots$ de um número cujo valor absoluto é $|q| < 1$ vão decrescendo e podem tornar-se menores do que qualquer número positivo dado.

Os exercícios que pedem para calcular somas de áreas de quadrados superpostos carecem de significado. Os que se referem a geratrizes de dízimas periódicas deveriam constar no texto com explicações completas, dada a importância do tema.

A leitura complementar sobre Indução Finita merece elogio pela lembrança de falar em tema de tal importância. Deveria conter exercícios não resolvidos.

Capítulos 3, 4 e 5. Matrizes, determinantes e sistemas lineares

No livro, esses três capítulos estão agrupados numa só unidade, o que é correto, pois eles fazem parte da Álgebra Linear. Nos programas, nos livros-texto e nos exames vestibulares, esses assuntos são sempre mal colocados e impropriamente abordados. O caso presente não é uma exceção.

O capítulo sobre matrizes ocupa 30 páginas que tratam das operações de adição e multiplicação de matrizes e de suas propriedades.

O ritmo é pausado, com muitos exemplos e exercícios simples, que procuram familiarizar o leitor com esses estranhos objetos, vindos não se sabe de onde nem para que. Infelizmente, os exemplos e exercícios apresentados são sempre artificiais e as definições são arbitrárias, dando ao aluno a impressão de que as matrizes e suas operações são frutos do capricho dos matemáticos.

A noção de matriz, introduzida abruptamente na abertura do Capítulo 3, poderia ser facilmente motivada, pois ocorre em muitas situações da vida real nas quais se tem uma tabela de dupla entrada. Só para mencionar dois exemplos, temos a matriz retangular onde a_{ij} é a nota do aluno i na matéria j, ou a matriz quadrada em que a_{ij} é a distância da cidade i à cidade j. Este segundo exemplo ilustra, de modo natural, a noção de matriz simétrica.

Sem dúvida, a operação mais estranha entre matrizes é a multiplicação. Se apresentada de modo correto, sendo precedida de exemplos, ela pode tornar-se bem aceitável. Mas proposta assim de chofre, como um decreto ditatorial, soa muito forçada. O aluno (e, muitas vezes, seu professor) deve ficar pensando: por que não fazer como na adição, multiplicando matrizes do mesmo tipo, elemento por elemento? O autor começa, como devia, com o produto de uma matriz-linha $1 \times n$ por uma matriz-coluna $n \times 1$. Seria tão fácil motivar essa definição com uma lista de mercadorias e seus respectivos preços! Mas nenhuma justificativa é dada para a definição proposta. O caso geral do produto também aparece caído do céu.

Mesmo aceitando a proposta (inadmissível) de que as noções matemáticas devem ser estudadas na escola sem considerar suas interpretações concretas, suas relações com a vida real e mesmo suas conexões umas com as outras, a exposição sobre matrizes neste livro padece de alguns defeitos.

As matrizes ora aparecem dentro de parênteses, ora dentro de colchetes. A matriz que possui inversa é chamada de inversível mas, segundo os dicionários, chama-se inversível a uma palavra ou expressão que não possui versão noutro idioma. (Exemplo: "saudade" é uma palavra inversível.) O correto é dizer matriz *invertível.*

No livro, o símbolo $\Leftrightarrow$ às vezes significa condição necessária e suficiente, às vezes significa igualdade por definição.

As propriedades operatórias das operações entre matrizes são apresentadas peremptoriamente, sem demonstração nem ao menos ilustração por meio de um exemplo. Não são estabelecidas relações entre a adição, a multiplicação de matrizes e a transposição. A multiplicação de um número por uma matriz é definida separadamente mas não é feita a observação de que ela se reduz ao produto das matrizes αI e A.

Pode-se imaginar a perplexidade do leitor desse livro diante de afirmações feitas "en passant", sem comentários adicionais. Às vezes tais asserções são imediatas mas constatar a veracidade de várias delas é uma tarefa acima do nível do aluno e mesmo de muitos professores. Por exemplo: obtida uma matriz X tal que $AX = I$, o autor simplesmente diz: não é necessário verificar a igualdade $XA = I$ pois ela é certamente verdadeira. Afirmação correta para matrizes quadradas, falsa em geral e difícil de provar quando é verdadeira.

A inversa de uma matriz é calculada num único exemplo, onde a matriz dada é 2×2. O livro deveria dizer que o método usado é impraticável no caso geral de uma matriz $n \times n$ pois exige resolver n sistemas lineares $n \times n$. Uma palavra de orientação deveria ser dada ao leitor curioso que pensasse em inverter uma matriz 3×3, por exemplo. Há também um exemplo de uma matriz 2×2 não-invertível. Aqui seria uma oportunidade de explicar que uma matriz 2×2 é não-invertível se, e somente se, uma de suas linhas (ou colunas) é múltiplo de outra.

Depois de definida, a inversa de uma matriz aparece no livro duas vezes. A primeira, numa "leitura complementar" do capítulo seguinte, onde se diz que A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$. (Na verdade, o livro "prova" isto de modo bem característico: uma afirmação resulta de um teorema não demonstrado e a recíproca é estabelecida com a frase tão repetida: "verifica-se também que".) A segunda aparição de A^{-1} é para provar a Regra de Cramer, onde na verdade ela não é necessária.

Os determinantes de ordens 2 e 3 são definidos explicitamente. Segundo a norma do livro, essas definições são apresentadas sem nenhuma preparação ou justificativa, e como sempre, os exemplos que se seguem são inteiramente fora de contexto. O leitor nunca é avisado que uma matriz 2×2 tem determinante zero se, e somente se, uma de suas linhas (ou colunas) é múltiplo da outra. (Embora ocorram os infalíveis exercícios para achar um k que torne o determinante igual a zero.)

Um dos grandes defeitos deste capítulo é o de nunca enunciar as propriedades fundamentais do determinante. Por exemplo, não é dito no texto que o determinante muda de sinal quando se permutam duas de suas colunas, nem ao menos que um determinante com duas colunas iguais é nulo. Tampouco é mencionado que o determinante depende linearmente de cada uma de suas colunas.

Estas propriedades, aqui ignoradas, são muito mais do que importantes. Elas constituem a essência do conceito de determinante: tudo o que é verdadeiro sobre determinantes em geral é conseqüência delas (e mais o fato de que $\det I = 1$). Uma exposição, por mais elementar e breve que seja, não deve deixar de destacar essas propriedades.

O autor oferece uma definição indutiva para o determinante de uma matriz $n \times n$, a qual ele só usa para obter os determinantes 2×2 e 3×3, que já tinham sido definidos antes. Ou seja: a definição dada não teve serventia. Até mesmo para saber que, no desenvolvimento do determinante segundo seus cofatores, qualquer linha ou coluna pode ser usada como base, ele lança mão de um teorema não demostrado. Na verdade, os fatos mais relevantes do capítulo (e em quase todo o livro) são enunciados como teoremas, para os quais não se oferecem provas. O leitor é então levado a achar que a Matemática é um conjunto de regras que servem para efetuar cálculos banais e rotineiros sem a menor relação com nada concreto ou real e a justificação dessas regras deve ser evitada pois, segundo o autor, isso não contribui para o entendimento.

O importante fato de que uma matriz e sua transposta têm determinantes iguais é relegado a uma leitura complementar e não é demonstrado. Na verdade, nenhuma afirmação geral sobre determinantes pode ser facilmente demonstrada a partir da definição dada.

Os determinantes ocorreram historicamente como um instrumento para resolver sistemas de equações lineares, mediante o que se chama hoje a Regra de Cramer. Entretanto, há séculos já se sabe que, como processo de cálculo, os determinantes são extremamente ineficazes. Eles só podem ser usados efetivamente quando o sistema é determinado e, mesmo neste caso, é impossível exagerar como são impraticáveis. Para dar uma idéia da situação, imaginemos um computador (um tanto ultrapassado) capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo. Para resolver um sistema de 15 equações lineares com 15 incógnitas, usando a Regra de Cramer, tal computador demoraria 1 ano, 1 mês e 16 dias. O mesmo computador, usando o método de escalonamento (que é bem elementar e não requer determinantes) levaria $2\,\frac{1}{2}$ milésimos de segundo para resolver dito sistema. Se tivéssemos um sistema 20×20, a Regra de Cramer requereria 2 milhões, 745 mil e 140 anos para obter a solução! O método de escalonamento usaria apenas 6 milésimos de segundo para resolver o sistema.

Apesar disso, nossos professores, nossos livros-texto e os exames vestibulares de nossas universidades continuam dando aos determinantes e à Regra de Cramer o papel de instrumento computacional que estes assuntos não merecem.

No Ensino Médio, os determinantes deveriam ser estudados apenas nos casos 2×2 e 3×3, com as definições dadas explicitamente (como neste livro) e as propriedades fundamentais demonstradas direta e honestamente a partir das definições, mostrando como a Matemática pode ser apresentada coerente e racionalmente. A regra $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ pode ser provada facilmente a partir daquelas propriedades e o determinante pode ser interpretado como a área de um paralelogramo (no caso 2×2) ou o volume de um paralelepípedo (no caso 3×3). A situação geral de um determinante $n \times n$ pode constar de uma "leitura complementar", fazendo analogia aos casos 2×2 e 3×3.

A noção mais importante, que governa todos os conceitos e resultados contidos nesses Capítulos 3, 4 e 5, é aquela de dependência (e independência) linear. Entretanto, nas 80 páginas que os compreendem, *nem uma só vez* se fala em combinação linear de linhas ou de colunas de uma matriz!

O Capítulo 5 trata de sistemas lineares. É parte do folclore matemático o fato de que, para determinar n números (incógnitas), são necessárias n informações sobre eles. Mas é preciso que tais informações sejam independentes (nenhuma seja redundante, isto é, conseqüência das outras). Além disso, elas precisam ser compatíveis, ou seja, nenhuma delas pode ser contraditória com as demais. No caso de sistemas lineares, cada equação é uma informação e a independência significa que nenhuma linha da matriz completa é combinação linear das demais. A compatibilidade, por sua vez, quer dizer que a última coluna da matriz completa é combinação linear das outras. Este é o modo correto de olhar para o problema. Não há mistério. Tudo pode ser explicado facilmente, em muito menos do que 80 páginas. E mais ainda: os cálculos das soluções explícitas podem ser efetuados de modo rápido pelo processo de eliminação.

No livro, são apresentados dois métodos para resolver um sistema linear com n equações e n incógnitas: a Regra de Cramer e o Escalonamento. Mas não é feito nenhum comentário comparativo entre os dois métodos. De um autor de livro didático, espera-se que tenha experiência no trato das coisas que está expondo e que transmita essa experiência (ou parte dela) aos seus leitores. O autor certamente já tentou resolver um sistema 5×5 usando ambos os métodos. Por que não contar aos alunos o que aconteceu?

Um ponto positivo: o autor, no caso de sistemas indeterminados, dá explicitamente a expressão geral das soluções.

Cinco pontos negativos:

1. Entre os 30 exercícios e 104 exemplos do Capítulo 5, há apenas um problema que recai num sistema linear. Nos vários campos de atividade humana, problemas dessa natureza abundam. A ausência deles no texto é deplorável, especialmente problemas que levam a sistemas indeterminados, para os quais há várias soluções possíveis e se busca a melhor.

2. O plural de conjunto-solução é conjuntos-solução.

3. Na discussão de um sistema $n \times n$, o autor manda que primeiramente se calcule o determinante D da matriz incompleta. Somente se $D = 0$ é que se deve escalonar. Trata-se de uma recomendação equivocada. O escalonamento, além de mais fácil do que o cálculo de D, já diz tudo sobre o sistema. Então para que calcular D? Inclusive ter-se-ia que calcular $n + 1$ determinantes para obter a solução no caso determinado, enquanto o escalonamento já dá essa solução imediatamente.
4. A implicação $D = 0 \Rightarrow S$ indeterminado ou impossível, na pág. 109, requer explicação.
5. O problema do vestibular da PUC-SP contém um erro crasso, que o autor não percebeu. (Página 116.)

Capítulo 6. Análise Combinatória

O capítulo de Análise Combinatória é bastante breve e trata dos temas clássicos de permutações, arranjos e combinações. Começa com uma seção sobre o fatorial, com uma lista desnecessariamente longa de exercícios manipulativos e cansativos sobre o tema. Segue-se o princípio fundamental da contagem, com muitos exemplos e exercícios.

A definição geral de permutação é confusa. Uma seqüência de n termos formada por n elementos dados não admite repetição. Mas logo no primeiro exemplo ocorrem os anagramas da palavra LILI.

Ao contar permutações, arranjos e combinação, por alguma razão o livro sempre diz "quantidade" em vez de "número".

Quando especifica o conceito de permutação com repetições, a linguagem do livro é obscura e ambígua. Ele deveria dizer que são k elementos distintos, onde o primeiro é repetido n_1 vezes, o segundo é repetido n_2 vezes, ... e o k-ésimo é repetido n_k vezes, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Em vez disso, eis o que está escrito: "n elementos dos quais n_1 são repetidos de um tipo, n_2 são repetidos de outro tipo, n_3 são repetidos de outro tipo, e assim por diante."

A dedução da fórmula do número de permutações com repetição é pouco clara. Na verdade, não há dedução alguma. Usando o princípio fundamental da contagem, o resultado seria obtido facilmente.

Os arranjos e as combinações não são apresentados com repetições. Apesar de tudo o que foi escrito sobre conjuntos no Volume 1, o livro não diz que $C_{n,k}$ é o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos.

O leitor deste capítulo fica com a impressão de que todo problema de Análise Combinatória se reduz a determinar se se tem um arranjo simples, uma combinação simples, uma permutação simples ou uma permutação com repetições e, em seguida, aplicar a fórmula correspondente. Esta impressão é inteiramente falsa mas o livro não dá sequer uma sugestão da imensa variedade de belos problemas de Análise Combinatória que são resolvidos por raciocínios com os quais o aluno pode perfeitamente ser familiarizado, ensinando-o a utilizar sua inteligência de modo racional e sistemático. Não são apresentados métodos para resolução de problemas combinatórios. Não há problemas que o aluno tenha que separar em casos, nem engendrar uma estratégia para resolver. Este seria um ótimo capítulo para estimular a criatividade e a imaginação mas o leitor não é levado a fazê-lo.

Um professor experiente diria a seus alunos que os processos fundamentais da Análise Combinatória são *escolher* e *misturar*, os quais correspondem aos instrumentos básicos da teoria, respectivamente as combinações e as permutações. Os arranjos são apenas uma composição dessas duas ferramentas, por isso não deveriam ter o mesmo destaque na apresentação.

Capítulo 7. Probabilidade

Um capítulo sonolento. O assunto se presta a questões elementares muito interessantes e provocativas, que sempre atraem a atenção dos alunos, estimulam discussões e palpites e terminam por educá-los na maneira de evitar erros de raciocínio. Daremos apenas dois dos inúmeros exemplos que poderiam ser oferecidos:

1. O que é melhor para um apostador: comprar dois bilhetes de uma mesma loteria ou comprar um bilhete de cada uma de duas loterias distintas?

2. Um casal deseja ter 4 filhos. É mais provável que sejam dois de um sexo e dois do outro ou que sejam três de um sexo e um do outro?

Perguntas como estas são bastante motivadoras, estimulam os alunos a estudar e despertam o interesse em pensar matematicamente. No livro, há apenas um exercício desse tipo, na seção Quebra-Cuca ("para quem gosta de desafios").

Todo livro que trate de probabilidades deve conter muitos problemas em que o leitor tenha que tomar uma decisão: é melhor fazer isto ou aquilo? Lamentavelmente não é o caso deste. Fazendo com que o aluno tenha uma atitude passiva, não tome decisões em relação aos problemas, o livro se afasta das recomendações dos PCN: o ensino deve fornecer ao aluno a possibilidade de analisar dados e tomar as decisões corretas, a fim de prepará-lo para o pleno exercício da cidadania.

Capítulo 8. Binômio de Newton

São 15 páginas dedicadas a um assunto que poderia ser exposto em muito menos, não fosse a repetitividade excessiva.

Sem razão plausível, o símbolo $C_{n,k}$ usado no Capítulo 6 é mudado para $\binom{n}{k}$. Muitas propriedades desses coeficientes binomiais, que resultariam imediatamente da definição de $\binom{n}{k}$ como o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto com n elementos, são provadas a partir da fórmula, com mais dificuldade. A própria fórmula do binômio não é provada de modo convincente. Como de costume, as propriedades que requereriam mais argúcia para explicar (como a parte $\Rightarrow$ da propriedade 2, pág. 172) são enunciadas sem nenhuma justificativa.

Não há razão para que este tema constitua um capítulo, mesmo que recebesse um tratamento mais lúcido.

Capítulos 9, 10, 11, 12 e 13. Geometria Espacial

A Geometria geralmente é colocada no final de nossos livros didáticos; por isso é vista muito apressadamente nas escolas. O presente livro dedica as 136 páginas finais ao estudo da Geometria Espacial. O modo de apresentação às vezes dá impressão de ser intuitivo e experimental, às vezes parece dedutivo, pois enuncia alguns teoremas e até mesmo os demonstra, embora nunca escreva a palavra "demonstração", como se ela tivesse sido banida do ensino da Matemática. Essa indefinição entre o heurístico e o lógico dificulta o acompanhamento da exposição. Nunca se sabe se o autor está demonstrando um resultado ou simplesmente tecendo considerações que o tornam aceitável. A distinção entre estas duas alternativas é ainda mais difícil de ser feita porque as verdadeiras demonstrações são sempre acanhadamente precedidas de frases do tipo "vamos verificar que ...". Na página 187, por exemplo, há um argumento heurístico que parece provar o postulado segundo o qual 3 pontos não-colineares determinam um plano.

Um postulado fundamental (que assegura a tridimensionalidade do espaço) diz que dois planos distintos com um ponto em comum têm também uma reta em comum. Este postulado nunca é mencionado, embora seja implicitamente usado em várias ocasiões.

Vários exercícios na pág. 185 contêm perguntas relevantes sobre as propriedades dos semiplanos e dos semi-espaços. Mas o leitor, estritamente falando, não pode respondê-los pois lhe faltam elementos para isso: não foram enunciados os postulados que estabelecem a convexidade desses conjuntos, nem foi estabelecida a propriedade de um plano separar o espaço em dois semi-espaços disjuntos (a qual resulta do postulado mencionado acima).

O livro adota o hábito, comum aos autores de livros didáticos brasileiros, de admitir que uma reta é paralela a si mesma e um plano é também paralelo a si próprio. Além de ser contrário à terminologia universal, essa lamentável convenção complica os enunciados, conduz a equívocos e provoca contradições. (Por exemplo, um sistema linear 2×2 é impossível quando as retas representadas por suas equações são paralelas e indeterminado quando essas retas coincidem.)

Outra terminologia imprópria que o livro adota é aquela que restringe o uso do adjetivo "ortogonais" para retas reversas. Em estudos posteriores, o aluno vai encontrar eixos ortogonais com um ponto em comum.

Neste livro, e nos demais da coleção, o verbo "intersectar" é sempre substituído por "interceptar". Seria o caso de perguntar se o ponto P é a interseção da reta r com o plano α ou é a "interceptação" de r e α?

Nunca é enunciado o fato de que por um ponto dado no espaço passa uma, e somente uma, reta perpendicular a um plano dado.

O autor afirma que as proposições que se demonstram chamam-se Teoremas e as que não se demonstram são chamadas Postulados. Na pág. 201 há uma proposição intitulada "Propriedade". É um teorema não demonstrado ou um postulado? O mesmo ocorre na pág. 204.

Ao tratar da projeção ortogonal de um segmento sobre um plano, na pág. 208, é feita a seguinte afirmação: "caso AB não seja paralelo a α, a medida da projeção $A'B'$ é menor do que a medida de AB." Ora, o aluno já viu Trigonometria no vol. 1. Por que não esclarecer a questão e mostrar logo que a medida de $A'B'$ é igual à de AB vezes o cosseno do ângulo entre o segmento e o plano? Isto é tão simples e bonito! Além disso, é um exemplo de conexão entre áreas diferentes da Matemática. E por falar em área, seria fácil, e interessante mostrar que projetando-se um polígono sobre um plano sua área também fica multiplicada pelo cosseno do ângulo entre o plano dado e o plano do polígono.

Na pág. 215 prova-se que, num triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da altura pela hipotenusa. A demonstração usa o seno de um dos ângulos agudos. Muito bem; uma conexão é sempre bem-vinda. (Embora fosse mais simples dizer que esses produtos são iguais porque cada um deles é o dobro da área do triângulo.) Na demonstração, o símbolo $\Rightarrow$ é erradamente empregado com o significado de "portanto".

O livro dá destaque (até maior do que o merecido) ao estudo de retas reversas. Prova corretamente a existência de uma perpendicular comum; mas a unicidade dessa perpendicular merece apenas um "pode-se verificar".

O livro chama de conjunto *côncavo* todo aquele que não é convexo. Esta definição não é usual e é imprópria. Não há conjuntos côncavos.

São oferecidas três definições diferentes de poliedro convexo mas não há nenhuma tentativa de mostrar (nem se afirma) que as três definem o mesmo conceito.

A fórmula do volume de um cubo é deduzida para o caso em que a aresta mede 4 cm e daí é enunciada em geral. Nem ao menos aresta de medida racional é considerada. Imaginemos um cubo cuja aresta é incomensurável com a unidade de comprimento. Qual seria seu volume? Mesmas observações podem ser feitas para a fórmula do volume de um bloco retangular. Ocorre que o leitor destes livros nunca vai ter contato com o importantíssimo conceito de proporcionalidade, logo não terá ocasião de ver uma elegante dedução dessa fórmula.

Como preparação para o cálculo do volume de um prisma, o livro necessita usar seções do mesmo por planos paralelos às bases (aqui chamadas de seções transversais). O livro afirma, sem uma só palavra de justificativa, que toda seção transversal tem área igual à da base. Por que não dizer logo toda a verdade? As seções transversais são todas congruentes às bases. Isto pode ser provado sem dificuldade, mesmo a partir da definição de prisma dada no livro, que não é a mais conveniente. Aqui se teria um ótimo exemplo da noção de translação, que é tão relevante na Geometria de hoje e nas suas aplicações mas infelizmente não faz parte do nosso ensino.

A base para o cálculo dos volumes mais usuais é o Princípio de Cavalieri. A escolha é boa mas o enunciado do Princípio não está bom. A frase "que têm bases no mesmo plano", além de desnecessária, não faz sentido pois sólidos em geral não têm bases.

Os Capítulos 11, 12 e 13 são devotados à obtenção de fórmulas para calcular os volumes de certos sólidos mais conhecidos porém em nenhum momento há preocupação em definir (nem ao menos em dar uma idéia intuitiva sobre) o que se entende por volume de um sólido.

Todo o Capítulo 12 trata das fórmulas para áreas e volumes relacionados com pirâmides. Assim como o conceito crucial para o estudo dos prismas é o de translação, para pirâmides é o de homotetia. Esta importante noção (caso particular de semelhança) simplificaria muito os cálculos e contribuiria substancialmente para o entendimento.

Não há menção de sólidos semelhantes. Conseqüentemente, o leitor não é informado de que, ao ampliar um sólido numa escala $r:1$, sua área externa fica multiplicada por r^2 e seu volume (conseqüentemente seu peso) fica multiplicado por r^3. São inúmeras as conclusões (físicas, biológicas, etc) que se podem tirar dessa observação. As aulas sobre áreas e volumes ficam muito mais animadas depois disso. Além do mais, o próprio estudo teórico do assunto seria facilitado por considerações de semelhança.

Numa Leitura Complementar é oferecido um argumento que visa demonstrar o Teorema de Euler: $V - A + F = 2$. Este teorema é enunciado para poliedros convexos mas, na demonstração, esta hipótese não é usada. Como a relação não é válida para todo poliedro, segue-se que a demonstração não é correta. De fato, o argumento usado admite que é possível construir o poliedro grudando as faces, uma a uma, ao longo de arestas consecutivas. A situação não é tão simples assim. (Um estudo detalhado deste assunto, com várias propostas de demonstrações corretas, pode ser encontrada no livro "Meu Professor de Matemática", publicado pela SBM.)

É feita uma apresentação dos poliedros regulares, com a demonstração de que existem apenas cinco.

O capítulo final do livro trata de cilindros, cones e esferas. Cilindros e cones nunca são definidos, salvo num caso particular, e esferas são definidas inadequadamente. Com efeito, um cilindro de revolução é inicialmente definido como "o sólido obtido pela rotação completa de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados". Em seguida é dito (numa Nota): "Existem também cilindros circulares não retos que não são cilindros de revolução. São chamados cilindros circulares oblíquos. Num cilindro oblíquo, as bases são círculos de mesmo raio, contidos em planos paralelos, mas o eixo, que liga os centros das bases, não é perpendicular ao plano delas." Os cones são tratados analogamente e a esfera é definida como o sólido obtido pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

A definição correta da esfera (sólida) de centro O e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é $\leq r$. Ou então: a reunião de todos os segmentos de reta de comprimento r que têm uma extremidade em O. Esta definição faz uso somente de conceitos geométricos elementares e não requer a noção de rotação completa. O cone de base na figura plana F e vértice no ponto P, situado fora do plano de F, é a reunião dos segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto de F. O cilindro cuja base é a figura plana F e cuja geratriz é o segmento de reta g é a reunião de todos os segmentos de reta paralelos a g que têm uma extremidade em F e estão todos num mesmo semi-espaço determinado pelo plano de F.

É muito importante que as definições matemáticas sejam dadas de forma correta, sem ambigüidades, sem elementos obscuros ou confusos. Somente assim os fatos podem ser estabelecidos adequadamente. Uma conseqüência das definições imperfeitas é a impossibilidade de provar corretamente afirmações sobre o objeto definido, mesmo as mais simples. (Vide os comentários sobre a definição de determinante, feitos antes.)

Para obter a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha, são usadas regras de três que não vêm acompanhadas de justificativas. Nem poderiam vir, pois a importantíssima noção de proporcionalidade nunca foi estudada como devia e onde devia, isto é, no volume 1. A propósito: aqui se tem mais um exemplo (na verdade, dois) de por que não se deve definir grandezas proporcionais por meio da fórmula $y = k \cdot x$. Com efeito, essa fórmula é o objetivo final. Para chegar a ela é preciso antes ter a proporcionalidade assegurada (por outros meios, naturalmente).

No final do Capítulo 13, diz-se que as fórmulas que exprimem a área de uma calota esférica e o volume do segmento esférico são obtidos mediante "cálculos trabalhosos", por isso não serão feitos no livro. Na verdade, o mesmo argumento usado para obter o volume da esfera, usando Cavalieri, se adapta *ipsis literis* para calcular o volume do segmento e, analogamente, o argumento clássico e elementar que conduz à área da esfera (que o autor não expôs no livro) fornece também a área da calota.

A coleção de exercícios nos capítulos de Geometria apresenta uma sensível melhora em relação aos capítulos anteriores mas, ainda assim, se ressente de situações mais realistas. Isto sem falar na grande escassez de problemas de natureza teórica, o que é conseqüência da má estruturação lógica da exposição.

Observações gerais sobre o Volume 2

O livro apresenta inadequadamente algumas definições de importantes conceitos. Por exemplo, a definição de seqüência é incorreta; a definição de determinante é matematicamente correta mas não é usada para tirar conseqüências dela; as definições de cilindro e pirâmide oblíquos são inconclusivas; a definição de esfera é imprópria e a definição de permutação (em geral ou sem repetições) é obscura. Outras definições são dadas em desacordo com o uso geral, principalmente em estudos mais avançados. Vide, por exemplo, retas ou planos paralelos e retas ortogonais. Quase não há aplicações dos conceitos estudados com situações da vida real. As poucas tentativas feitas neste sentido são mal sucedidas. Não são mostradas as conexões que existem entre os assuntos expostos aqui e os estudados em séries (ou mesmo capítulos) anteriores. O livro não sugere a idéia de que a Matemática se baseia no método dedutivo. É dado destaque a uma série de fatos irrelevantes, em detrimento de conceitos (como o de dependência linear, por exemplo) e resultados (como as propriedades do determinante) fundamentais.

Antônio dos Santos Machado

Matemática na Escola do Segundo Grau – volume 3

Parte 1. Geometria Analítica (Caps. 1, 2, 3 e 4)

As 117 primeiras páginas do livro, divididas em quatro capítulos, contêm uma introdução à Geometria Analítica em duas dimensões.

Capítulo 1

O primeiro capítulo, como é natural, trata das coordenadas de um ponto do plano, relativas a um sistema ortogonal de eixos. (O Vol. 2, restringiu o uso do termo "ortogonal" apenas às retas reversas mas, como prevíamos, não se manteve a terminologia.)

No texto e em vários exercícios são mencionados pontos simétricos em relação a uma reta mas o conceito nunca é definido.

Dois exercícios, logo na primeira seção, referem-se a regiões do plano definidas por desigualdades. Infelizmente não se fala mais nisso no restante do livro, o que é uma pena. Com efeito, esta importante noção dá lugar a interessantes problemas, de fácil solução, no âmbito da Programação Linear, que despertariam o interesse dos alunos e os poriam em contato com uma área da Matemática de relevância nas aplicações.

No Exercício 20 (pág. 7) é mencionado que as desigualdades $a^2 \lesseqgtr b^2 + c^2$ caracterizam os triângulos obtusângulos e acutângulos, sem justificação salvo o costumeiro "sabemos que". Este resultado, que é uma simples aplicação da lei dos cossenos, aparece num exercício (pág. 190, Vol. 2). Não achamos correto, num livro didático, o procedimento de usar no texto resultados propostos anteriormente como exercícios.

Outro exercício (ainda na pág. 7), refere-se ao caminho de comprimento mínimo que liga dois pontos dados e passa por uma reta dada. O resultado é admitido sem maiores comentários porém merecia uma explicação satisfatória, inclusive porque faz uso da noção de simétrico de um ponto em relação a uma reta. Além disso, o fato poderia ser usado para demonstrar a propriedade de reflexão da elipse, um tópico muito interessante que o livro deveria mencionar mais adiante, ao estudar essa curva.

Ao determinar as coordenadas dos pontos que dividem um segmento dado em partes iguais, é feita uma conexão com as progressões aritméticas. Isto é correto. Pena que no Vol. 2, quando se estudou progressão aritmética, nunca se fez uma figura mostrando que os termos de uma progressão aritmética representam pontos igualmente espaçados sobre uma reta. Nesta altura, deveria ser determinado o ponto que divide um segmento numa razão dada, o que conduziria à equação paramétrica de uma reta. Estes assuntos são imprescindíveis, porém são inexplicavelmente omitidos no livro.

Para obter a caracterização de pontos colineares em termos de suas coordenadas, o livro apresenta bruscamente um determinante, saído não se sabe de onde.

Deve-se observar que a condição de alinhamento de três pontos é uma questão extremamente simples, que se baseia numa semelhança de triângulos retângulos e não requer determinantes para exprimi-la. Definindo a *inclinação* de um segmento não-vertical AB como o quociente $(y_B - y_A)/(x_B - x_A)$, os pontos A, B, C são colineares se, e somente se, os segmentos AB e AC são verticais ou então a inclinação de AB é igual à inclinação de BC.

O livro leva 3 páginas para discutir o que poderia ser dito em poucas linhas e o faz de modo inadequado. Destaca a proporção $(x_B - x_A)/(x_C - x_A) = (y_B - y_A)/(y_c - y_A)$, que nada significa, quando o certo seria trocar a posição dos extremos, para exprimir igualdade das inclinações. Além disso, valoriza o determinante e, para complicar as coisas ainda mais, introduz um determinante de 3ª ordem, cujo anulamento equivale a dizer que três pontos do plano são colineares quando o volume de um certo tetraedro no espaço é igual a zero!

Capítulo 2

O Capítulo 2 se intitula "Estudo da Reta". Suas 47 páginas transmitem a impressão de que a equação da reta (e, conseqüentemente, a Geometria Analítica) é um assunto difícil.

A equação da reta que passa por 2 pontos dados é apresentada sob forma de um determinante (de 2ª ou de 3ª ordem) igualado a zero. Esta insistente predileção do livro por determinantes não ajuda em nada a compreensão do leitor. Na verdade, como já ocorreu nos volumes anteriores, a definição oficial é logo abandonada em prol da forma mais simples $ax + by + c = 0$ e mais ainda: quando se procuram as relações entre a equação e as propriedades geométricas, a forma utilizada é $y = mx + q$, que é ainda mais simples e reveladora.

A principal razão de ser do método das coordenadas, usado pela Geometria Analítica, é obter informações sobre as figuras a partir das equações e inequações que as definem. Assim, por exemplo, ao representar uma reta por uma equação, seja de que forma for, deve-se ser capaz de obter informações sobre essa reta examinando os coeficientes da equação.

Nesse sentido, representar uma reta pela equação $\Delta = 0$, onde Δ é um determinante, não tem utilidade alguma, pois não é claro como saber a posição dessa reta no plano a partir daí. Então por que dar preferência a essa definição?

A própria equação $ax + by + c = 0$, que o livro chama de "forma geral", contém uma importante informação que ajuda muito a localizar a reta r que ela representa: r é perpendicular ao segmento OA, onde $O = (0, 0)$ e $A = (a, b)$. Mas o livro nunca menciona isto. É uma pena, entre outras coisas porque esta observação facilitaria muito a obtenção da fórmula da distância de um ponto a uma reta, que o autor, na pág. 60, considera *muito trabalhosa*.

Na realidade, em que pese a preferência dos autores de livros didáticos brasileiros, a forma adequada é $ax+by = c$, em vez de $ax+by+c = 0$, pois a primeira equação apresenta a reta como a linha de nível c da função $f(x, y) = ax+by$. Essas linhas de nível são paralelas duas a duas e perpendiculares ao segmento OA, com $O = (0, 0)$ e $A = (a, b)$. Este ponto de vista ajuda bastante o entendimento.

Em vez da obscura equação $\Delta = 0$, a forma mais conveniente de representar a reta não-vertical que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é $y = y_1 + m(x - x_1)$ onde $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. É uma equação simples e transparente, que fornece de modo imediato as informações que se quer sobre a reta dada.

Ao estudar a posição relativa das retas definidas pelas equações $ax+by+c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ não é mencionado o importante fato de que essas retas são perpendiculares se, e somente se, $aa' + bb' = 0$.

Para saber se essas retas são paralelas ou concorrentes, o livro faz uso do determinante D, cujas linhas são (a, b) e (a', b'). Se $D \neq 0$, as retas r e s são concorrentes. Se $D = 0$ as retas coincidem ou são (na terminologia do livro) "paralelas distintas". Em seguida o autor afirma que as retas dadas coincidem se, e somente se, a equação de uma delas se obtém da outra multiplicando-a por um número k. Metade desta afirmação é óbvia mas a recíproca precisaria ser provada. Além disso, no Vol. 2 nunca se disse que um determinante 2×2 é zero se, e somente se, suas linhas são proporcionais. De um modo geral, a discussão da posição relativa de duas retas está mal conduzida. O resultado deveria ser enunciado assim:

Se $ab' - a'b \neq 0$ as retas são concorrentes.

Se $ab' - a'b = 0$ e $a'c - ac' \neq 0$ as retas são "paralelas distintas".

Se $ab' - a'b = ac' - a'c = 0$ as retas coincidem.

Observação: Se $ab'-a'b = ac'-a'c = 0$ então necessariamente se tem $bc' - b'c = 0$.

Em seguida são analisadas as 4 posições relativas de três retas no plano mas não é dito como reconhecer, a partir das equações dessas retas, qual dos 4 casos ocorre.

O exemplo 29 (pág. 50) é, na verdade, um mau exemplo para os alunos. Não é necessário cálculo algum nem coeficiente angular para saber que duas retas verticais são paralelas. O livro didático deveria sobretudo ensinar o bom-senso: exortar o aluno a observar as equações, reconhecer as propriedades e evitar cálculos desnecessários. Ele não deve ser adestrado para trabalhar como uma máquina programada mas, pelo contrário, ser estimulado a desenvolver seu espírito crítico.

A partir do ponto em que o coeficiente angular de uma reta é definido, o livro passa a tratar de paralelismo e perpendicularismo em termos daquele conceito, esquecendo o princípio de que as propriedades geométricas devem ser detectadas a partir da equação das retas dadas; quanto mais diretamente melhor. Assim, por exemplo, as retas de equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ são perpendiculares se, e somente se, $aa' + bb' = 0$. (Como dissemos acima, esta condição não aparece no livro.) A equação da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e é perpendicular à reta não-horizontal de equação $ax + by + c = 0$ é apresentada em termos do coeficiente angular, quando deveria ser escrita explicitamente como $y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$.

O final do Capítulo 2 traz um comentário sobre feixes de retas, o que é bom. Entretanto, já que o assunto foi mencionado, para que deixar de fora do feixe a reta vertical? Se duas retas, de equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, têm um ponto P em comum, todas as retas que passam por esse ponto são dadas pelas equações $(\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')y + \alpha c + \beta c' = 0$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que são combinações lineares das duas equações originais. Mas acontece que a expressão "combinação linear" não aparece em lugar algum dos três volumes.

O livro não trata do ângulo entre duas retas do plano. Não há problemas pedindo para determinar se um ponto está acima ou abaixo de uma reta dada. Não há exercícios de aplicação. Em nenhuma ocasião o aluno é solicitado a obter um sistema de coordenadas que, segundo seu julgamento, facilite a resolução de um problema. Todos os exercícios são de manipulação de fórmulas e equações. Estas observações se aplicam não somente a estes capítulos iniciais, mas a todo o restante do livro e, mais geralmente, à coleção inteira.

Capítulo 3

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da circunferência.

A equação de uma circunferência cujo centro e cujo raio são dados é uma mera aplicação direta da fórmula da distância entre dois pontos. Os quadrados são desenvolvidos e a equação se torna $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$. Durante 10 páginas, o livro procura adestrar os alunos na obtenção do centro e do raio de uma circunferência cuja equação é apresentada assim. O método consiste em usar fórmulas que, naturalmente, devem ser decoradas. Ora, o modo racional e didático de tratar esta questão é completar os quadrados. Completando os quadrados não há nada a memorizar e tudo o que se fizer ou disser terá uma explicação clara. Mas em nenhum livro da coleção se completa um quadrado.

Na pág. 78 está afirmado que toda equação do tipo acima pode ser escrita como $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = x_C^2 + y_C^2 - f$, com $x_C = -d/2$ e $y_C = -e/2$. Mas esta afirmação não está justificada. O que se fez antes foi provar (trivialmente) a recíproca. A prova que falta seria facilmente feita completando os quadrados.

Como não poderia deixar de ser (pois isto acontece com todos os autores), o livro afirma, na pág. 79, que $A = B \neq 0$ e $C = 0$ são *condições necessárias* (grifo do autor) para que a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência. A afirmação é correta e o livro fala como se tivesse acabado de prová-la. Mas está muito longe disso, conforme observou o Prof. Zoroastro Azambuja Filho, na R.P.M. nº 29.

Para obter a interseção de duas circunferências, o livro sugere subtrair as duas equações, obtendo-se uma equação do primeiro grau. Faltou dizer que esta é a equação de uma reta que possui uma relação muito importante com essas circunferências.

A reta cuja equação é obtida pela subtração das equações de duas circunferências chama-se o eixo *radical* dessas circunferências. Ela é perpendicular à reta que une os centros, passa pelos pontos de interseção caso as circunferências sejam secantes, passa pelo ponto de tangência caso as circunferências sejam tangentes e não tem ponto em comum com nenhuma delas caso as circunferências também não possuam ponto em comum. Uma propriedade do eixo radical é que, de qualquer dos seus pontos, os segmentos das tangentes traçada às circunferências são iguais.

Na obtenção da circunferência que passa por três pontos dados, faltou o importante comentário de que o centro é o ponto de interseção de duas mediatrizes de segmentos consecutivos ligando os pontos. Isto deixaria claro que o problema não tem solução quando os três pontos são colineares. A propósito: esta observação não foi feita no livro.

Isto nos leva a observar que uma grande ausência no livro são exemplos e problemas que provoquem discussão sobre a existência de uma ou de várias soluções, e de como, variando os dados, se obteriam problemas com soluções diferentes. Em suma, cada página reforça a desconfortável sensação de que o livro não estimula a participação ativa dos seus leitores.

Capítulo 4

O Capítulo 4, que conclui o estudo da Geometria Analítica, chama-se Lugares Geométricos.

A primeira frase diz que *lugar geométrico* é "um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade."

Ora, todo conjunto é formado por elementos que possuem uma dada propriedade (e só por eles). Na realidade, "conjunto" e "propriedade" são conceitos intercambiáveis. Portanto, a definição acima simplesmente diz que lugar geométrico é qualquer conjunto de pontos. Isto nos leva a concluir que o conjunto dos pontos do plano que têm coordenadas racionais é um lugar geométrico. (Seria mais adequado dizer que este é um lugar algébrico.) Se é assim, então para que falar em lugar geométrico, se já temos a consagrada palavra "conjunto"?

Ocorre que a expressão "lugar geométrico" é anterior à Teoria dos Conjuntos, e permaneceu depois dela. Uma saída para os autores de livros didáticos seria dizer um lugar geométrico (plano) é um subconjunto do plano definido por meio de uma propriedade geométrica.

Em seguida, são oferecidos três exemplos simples (porém interessantes) de como obter equações de lugares geométricos e identificá-los por meio delas. Os dois primeiros são boas amostras de como o método da Geometria Analítica é eficiente para resolver alguns problemas geométricos. Quanto ao terceiro, deveria ser feito um comentário mostrando como a mesma conclusão pode ser obtida imediatamente, sem coordenadas. (E aqui vale mais uma vez a observação acerca de exercitar o espírito crítico.)

Em seguida, a parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como lugares geométricos e, mediante escolhas apropriadas de sistemas de coordenadas, suas equações são deduzidas. Mais exatamente, o que o livro mostra é que, em cada caso, os pontos da curva têm coordenada que satisfazem a equação.

Mas, em nenhum dos três casos se prova que somente as coordenadas dos pontos da curva satisfazem a equação correspondente. Há ainda outra recíproca que está faltando. No Volume 1, foi prometido que aqui se demonstraria que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, mas a promessa não foi cumprida. Há apenas uma observação a esse respeito na página 98, onde se mencionam as coordenadas do vértice mas não se fala do foco, da diretriz, nem é dada uma só palavra no sentido de provar a afirmação feita.

Ainda no terreno das promessas não cumpridas, também foi dito no Vol. 1 que o gráfico da função $y = 1/x$ é uma hipérbole e que isso seria esclarecido aqui. Mas há apenas uma Nota na pág. 109 propondo este resultado como exercício.

Nas definições de parábola, elipse e hipérbole há menções explícitas aos eixos de simetria dessas curvas. Mas o conceito de eixo de simetria de uma figura nunca é definido e muito menos se prova que as retas ali propostas são, de fato, eixos de simetria.

Na pág. 108, menciona-se que as curvas de que estamos falando são seções cônicas. Mesmo sem provar este fato, caberiam ali uma ou mais figuras ilustrando a situação.

Na pág. 112 há uma seção que trata dos zeros de uma função quadrática com duas variáveis, ou seja da "equação geral do segundo grau".

Entende-se que, no nível do livro, não caberia um estudo completo do assunto. Mas o conteúdo da seção, em vez de ser informativo, é desinformador. Quando deveria dizer que, salvo em casos excepcionais, uma equação do 2º grau em x e y define sempre uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, o livro se detém nos casos excepcionais e nunca, nem mesmo ao se desculpar por não apresentar um tratamento completo da matéria, nunca é dito que, em geral, a curva definida por uma equação do segundo grau é uma cônica.

No final do Capítulo 4, encerrando a Geometria Analítica, há 6 linhas sobre equações paramétricas, seguidas de dois exemplos, nenhum dos quais é uma reta. O leitor que prosseguir seus estudos vai surpreender-se ao ver que, salvo excepcionalmente, as curvas que ocorrem na Matemática e suas aplicações são geralmente definidas parametricamente.

Capítulo 5

O Capítulo 5 trata dos números complexos.

Não há uma preâmbulo histórico situando a posição desses números na evolução das idéias matemáticas.

A introdução do assunto é repetitiva e confusa. Os números complexos e suas operações são apresentados três vezes e, cada vez, não se sabe se se trata de uma motivação, uma definição ou mesmo uma demonstração. As propriedades operatórias são listadas mas não é dita uma palavra sobre a razão pela qual elas são válidas.

Apesar de o livro ter acabado de usar mais de cem páginas para a Geometria Analítica, o plano complexo é apenas apresentado mas não é empregado. Todos os que têm algum experiência com números complexos sabem como é fundamental a visão geométrica para o seu entendimento e manejo. Logo no início de seu aprendizado, o aluno deveria ganhar familiaridade com essa interpretação bidimensional. Para começar, um número complexo, sendo um par ordenado de números reais, é um ponto do plano cartesiano. Assim ele deve ser considerado, em vez de dizer que o ponto é apenas o "afixo" do número complexo.

O conjugado de um número complexo é seu simétrico em relação ao eixo real. Figuras deveriam ilustrar este fato. Mas não existem.

A soma de número complexos se faz geometricamente com a lei do paralelogramo. Figuras deveriam mostrar exemplos disso. Mas não existem.

Muito especialmente, a multiplicação de números complexos tem uma interpretação bonita e fértil em aplicações, como uma semelhança no plano (rotação seguida de homotetia). Este fato, nunca mencionado no livro, poderia ser usado para resolver interessantes problemas de Geometria (sintética ou analítica). Em particular, a multiplicação por um número complexo fixado de módulo 1 significa uma rotação no plano. Por exemplo, multiplicar por i é efetuar uma rotação de 90° no sentido anti-horário. Mas nada disso é mostrado no livro.

O resultado é uma apresentação árida, sem conexões com outros temas já estudados e sem atrativos.

A propriedade $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ é exibida num exemplo bem particular e enunciada em geral. Ocorre que sua prova no caso geral não daria trabalho maior e deveria ser feita, principalmente porque este fato será usado no capítulo seguinte, para demonstrar que as raízes complexas de uma equação polinomial com coeficientes reais ocorrem aos pares conjugados.

Não é dito explicitamente que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, nem (conseqüentemente) que $z^{-1} = \overline{z}$ quando z tem módulo 1. São fatos elementares que merecem ser destacados, não apenas para ajudar o entendimento dos iniciantes como ainda porque são necessários para a eficiente manipulação com números complexos.

Capítulos 6 e 7

O Capítulo 6 se intitula Teoria dos Polinômios, quando na verdade trata mais da prática. O Capítulo 7 se ocupa das equações polinomiais (ou algébricas).

O estudo elementar dos polinômios se justifica, em primeiro lugar, por sua aplicação às equações algébricas de graus arbitrários e, em segundo lugar, porque apresenta interessantes questões de divisibilidade, análogas às de números inteiros (as quais, por sua vez, não merecem o devido destaque no currículo do Ensino Médio). Já as equações polinomiais, que foram estudadas no Vol. 1 nos casos de primeiro e segundo graus, ocorrem em problemas de Geometria (terceiro grau) e, com graus arbitrários, em questões de Matemática Financeira. Infelizmente, mesmo tendo estudado antes a função exponencial e as progressões geométricas, o livro não apresentou aplicações à Matemática Financeira. Seja como for, não são apresentadas justificativas ou motivações para os assuntos expostos nos Capítulos 6 e 7.

Logo no início do Capítulo 6, mais um destaque irrelevante: $P(1)$ = soma dos coeficientes de P. Por que não $P(-1)$ = soma alternada dos coeficientes de P? Por que não $P(0)$ = termo constante de P? (Este sim, mais importante.)

Um ponto importante, onde muitos autores de livros didáticos costumam fazer confusão, é a relação entre função polinomial e expressão de um polinômio (identidade de polinômios). A maneira mais simples e natural de tratar este assunto é começar observando que $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, o que é muito fácil de mostrar com base na igualdade evidente

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha\, x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1}).$$

Daí resulta que um polinômio de grau n não pode ter mais do que n raízes distintas, logo todo polinômio identicamente nulo tem todos os coeficientes iguais a zero.

O presente livro aborda esta questão de um modo que, em princípio, é matematicamente correto: supondo que um certo polinômio de grau n tem $n + 1$ raízes distintas, obtém-se assim um sistema linear homogêneo de $n + 1$ equações, tendo por incógnitas os coeficientes do polinômio. O determinante do sistema é de Vandermonde, logo é não-nulo e a única solução é trivial. Os coeficientes do polinômio em questão são portanto todos iguais a zero.

Acontece, porém, que, na verdade, o livro trata explicitamente apenas os casos de grau 1 e 2, deixando o caso geral por conta do leitor.

Além disso, o determinante de Vandermonde não foi estudado no Vol. 2. (Ele aparece num exercício, num exemplo 4×4, sem nome nem destaque.)

E, já que o autor optou por esta demonstração mais complicada (e incompletamente exposta), por que não tirar dela aquilo que ela pode dar? Este método serve para mostrar (com o mesmo argumento) que, dados $n + 1$ pontos arbitrários $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ no plano, com $x_0, \ldots, x_n$ dois a dois distintos, existe uma único polinômio de grau $\leq n$ cujo gráfico passa por esses pontos. Em particular, se os pontos dados são $(x_0, 0), \ldots, (x_n, 0)$ o polinômio que responde a questão é identicamente nulo.

Duas observações a propósito do que foi dito acima:

1. No livro inteiro não há um só gráfico de um polinômio de grau superior a 2. A exibição de alguns desses gráficos ajudaria muito o entendimento das funções polinomiais.
2. Seria útil adotar a convenção de que o grau do polinômio identicamente nulo é $-\infty$. Isto simplificaria bastante diversos enunciados e raciocínios. (Vide nosso comentário acima sobre o polinômio cujo gráfico passa por $n + 1$ pontos dados no plano.)

O método dos coeficientes a determinar, usado na divisão de polinômios, deveria ser apresentado (e usado) imediatamente após o princípio de identidade de polinômios. Aí é seu lugar certo.

As propriedades formais da adição de polinômios (enunciadas mas não provadas) valem para funções quaisquer. Já a multiplicação de polinômios tem propriedades específicas, como, por exemplo, $P \cdot Q = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$ (mencionada no texto). Isto não é válido para funções quaisquer, logo deveria ser provado e comentado.

A existência do quociente e do resto no algoritmo da divisão de polinômios é admitida e enunciada peremptoriamente.

A divisibilidade de polinômios é mencionada apenas no caso $x - a$. É provado que se P é divisível por $x-a$ e $x-b$, com $a \neq b$ então P é divisível por $(x-a)(x-b)$. Seria fácil provar o caso geral: se Q_1 e Q_2 são primos entre si e ambos dividem P então P é divisível pelo produto $Q_1 \cdot Q_2$.

No Capítulo 7, sobre equações algébricas, onde o autor continua escrevendo conjuntos soluções em vez de conjuntos-solução como deveria, o leitor encontra novamente a dedução da fórmula das raízes de uma equação do segundo grau, que já vira na oitava série e no Vol. 1 desta coleção. Em compensação, não é mencionado no livro que existem fórmulas para resolver por radicais equações do terceiro e do quarto graus e que para os graus superiores a estes essas fórmulas não podem existir.

No final do capítulo há uma breve apresentação do método de bisseção para obter valores aproximados para as raízes reais de uma equação de grau superior ao segundo. Isto é louvável. Neste ponto, deveria ser observado que o método da bisseção se aplica também a equações que não são algébricas. Outro comentário importante, que contribuiria muito para a compreensão do tema (e que deveria ser feito) é que os algoritmos para a solução aproximada de equações são superiores em eficiência às fórmulas como aquelas de Tartaglia e Ferrari para equações do terceiro e do quarto graus. E que há outros algoritmos, como o método de Newton, que são bem mais rápidos para obter boas aproximações do que o método das bisseções. Afinal de contas, um estudo de 25 páginas sobre equações algébricas não pode se limitar a generalidades inconclusivas como este faz.

Como dissemos antes, para provar que o conjugado da raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais também é uma raiz, é usada a igualdade $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, que não foi provada anteriormente.

Na exposição do Capítulo 7, a noção de multiplicidade de uma raiz nunca é apresentada de modo claro e satisfatório. Na página 192, o que deveria ser a verdadeira definição é destacada como se fosse algo que acaba de ser demonstrado. E muito antes de falar em raízes múltiplas, o autor afirma que todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas, sem explicar o que isto quer dizer.

No estudo das relações de Girard, o autor não menciona uma de suas aplicações mais interessantes: a de obter um polinômio cujas raízes são conhecidas.

Capítulos 8, 9, 10 e 11. Funções Reais, Noções de Estatística e Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Os quatro capítulos finais do livro constituem claramente um curso de revisão acelerada, desses que se fazem às vésperas do exame vestibular: seções bem curtas, definições ligeiras, exemplos simples, exercícios imediatos, nenhuma demonstração, nada que exija raciocínio ou outra atividade intelectual além da memorização.

A definição de função par (e função ímpar) requer que o domínio seja simétrico em relação à origem, isto é, que $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$. Esta condição foi esquecida (pág. 212).

As funções crescentes e decrescentes foram definidas corretamente no Vol. 1 mas a definição dada aqui é imprecisa o bastante para não permitir seu uso na resolução de problemas.

O capítulo sobre Estatística limita-se a umas poucas definições básicas (média, mediana, desvio, freqüência e gráficos).

A divisibilidade de inteiros é tratada de modo extremamente sucinto e incompleto. Um resultado que foi usado no Capítulo 7, quando se fez o reconhecimento das raízes racionais das equações com coeficientes inteiros, não foi sequer mencionado aqui, muito menos provado. (Se um inteiro divide um produto de dois fatores e é primo com um deles então divide o outro.)

Neste capítulo final do livro, o caso da divisão de inteiros em que o dividendo é negativo (o qual costuma causar confusão) é bem esclarecido com exemplos.

Considerações gerais sobre o Volume 3

O programa usualmente apresentado no terceiro ano de Ensino Médio é bastante reduzido e contém poucos tópicos que possam apresentar dificuldades conceituais. Mesmo assim, o livro possui algumas deficiências na organização dos assuntos, conforme destacamos nas páginas acima. Falta objetividade no estudo analítico da reta. Não é dado o destaque necessário ao significado geométrico dos números complexos e das operações entre eles, o que seria fácil de fazer depois de estudada a Geometria Analítica. Os exemplos e exercícios são essencialmente de natureza manipulativa imediata, não requerendo raciocínio. Não há aplicações interessantes. O leitor só é instado a pensar quando depara com problemas chamados "quebra-cuca", que são espalhados pelo livro mas nada têm a ver com os assuntos nele tratados. Há alguns erros sistemáticos de gramática.