MA141 Geometria Analítica

Prova 1

16 de Abril 2024 - Turmas 19h-21h

Nome completo: RA: Turma:

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2,5	2,5	3	2	10
Nota					

Instruções para realização e entrega de sua prova:

- Desligue o celular.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro material de consulta.
- Essa prova terá inicio às 19:00h e **finalizará às 21:00h**. Você terá duas horas para resolvê-la.
- A prova contém **4 (quatro)** questões, uma por folha. Resolva cada questão **em sua respectiva folha**.
- Não retire o grampo da prova.
- **Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

As questões da prova estão na próxima página; **aguarde a indicação da professora/do professor** para virar a folha.

Boa prova!

Questão 1 Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + w &= 5 \\ x + 2y - z - 2w &= -3 \\ 3x + y + 2z + 4w &= 10 \end{cases}$$

1. [0,5 pt] Escreva o sistema linear na forma matricial $AX = B$.
2. [1 pt] Usando o método de escalonamento de Gauss, encontre a forma escalonada da matriz aumentada do sistema linear $AX = B$.
3. [1 pt] Escreva a solução geral desse sistema, isto é, o conjunto de soluções.

Questão 2

1. [1 pt] Utilizando o desenvolvimento por linhas ou colunas do determinante (método de Laplace), mostrar que $\det(A) = -2k(k^2 - 1)$ para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{onde } k \in \mathbb{R}.$$

2. [1,5 pt] Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz coluna

$$B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Determine os valores de k para os quais o sistema $AX = B$ tem solução única, infinitas soluções, nenhuma solução.

Questão 3 Determine se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa; demonstrando ou dando contra-exemplo conforme o caso. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

1. [0,75 pt] Sejam $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$. Se o sistema homogêneo $AX = 0$ tem infinitas soluções, então o sistema $AX = B$ também tem infinitas soluções para qualquer $B \in M_{m\times 1}$.
2. [0,75 pt] Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = I_n$ então $A = I_n$ ou $A = -I_n$.
3. [0,75 pt] Se A, $B \in M_n$ são duas matrizes então $\det(A + 2B) = \det(A) + 2^n \det(B)$.
4. [0,75 pt] Toda matriz quadrada que é equivalente por linhas à matriz identidade tem determinante 1.

Questão 4 [2 pontos] Determinar qual/quais das seguintes matrizes é invertível. Em caso que seja, calcular a inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 1).1).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_{4\times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$AX = B \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Questão 1).2) Matriz Aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 3L_1 \to L_3]{L_2 - 2L_1 \to L_2}$$

$$\xrightarrow[L_3 - 3L_1 \to L_3]{L_2 - 2L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{-5} \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -11/5 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + 5L_2 \to L_3]{L_1 - 2L_2 \to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_3}{5} \to L_3}$$

$$\xrightarrow{\frac{L_3}{5} \to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 + L_3 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/5 \end{array}\right]$$

Questão 1) 3) Solução Geral:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} - \alpha \\ \alpha - \frac{3}{5} \\ \alpha \\ 8/5 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Questão 2) 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K \\ K & 1 & 0 & 0 \\ 1 & K & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-2) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & K \\ K & 1 & 0 \\ 1 & K & 0 \end{vmatrix} = (-2) \times (-1)^4 \times K(K^2-1) = -2K(K^2-1)$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \\ K & 1 & 0 \\ 1 & K & 0 \end{bmatrix} = K(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} K & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} = K(K^2-1)$$

Questão 2) 2) $\det(A) \neq 0$ para solução única. O sistema $AX = B$ pode ser escrito:

$$-2K(K^2-1) \neq 0$$

$$K(K^2-1) \neq 0$$

$$K \neq 0 \text{ ou } K^2 - 1 \neq 0$$

$\boxed{\text{para } K \neq 0 \text{ ~~ou~~ } K \neq 1 \text{ ~~ou~~ } K \neq -1}$

S.P.D

(Solução Única)

$$\begin{cases} -2z = K \\ z + KW = 0 \\ Kx + y = K^2 \\ x + Ky = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{para } K = 0}$

$$\begin{cases} -2z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ W = \alpha \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(W Variável Livre)

S.P.I (Infinitas Soluções)

$\boxed{\text{para } K = 1}$

$$\begin{cases} -2z = 1 \\ z + W = 0 \\ x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

ABSURDO! $\Rightarrow 1 = 0$

S.I (sem solução)

(sistema impossível)

Questão 2)2) $\boxed{\text{Para } K=-1}$

$$\begin{cases} -2z = -1 \\ z - w = 0 \\ y - x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}, \Longrightarrow \begin{matrix} y - x = 1 \\ y - x = 0 \end{matrix} \Rightarrow 1 = 0$$

ABSURDO!

S.I (sistema impossível)

(não há solução)

Questão 3) 1) Falso. Contra-Exemplo; $m = n = 2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

infinitas soluções; mas

$x = -\alpha$

$y = \alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$2(\underbrace{x+y}_{1}) = 1$

$2 \times 1 = 1$

$2 = 1$

ABSURDO!

Não há solução

Questão 3) 2)

Falso. Contra-Exemplo; Seja $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$A \neq I_2$ e $A \neq -I_2$

Questão 3) 3)

Questão 3)3)

Falso. Contra-Exemplo: $n=2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1$ e $\det(B) = 2$ e $\det(A+2B) = 15$

$\det(A) + 2^2 \det(B) = 1 + 4 \times 2 = 9 \neq 15 = \det(A+2B)$

Questão 3)4) Falso. Contra-Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det(A) = 2$; Vamos mostrar que A é equivalente por linhas à identidade $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 + L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{2} \to L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Pelas operações elementares aplicadas na matriz aumentada $[A \mid I_2]$ mostramos que A é inversível (equivalente por linhas à I_2), mas $\det(A) = 2 \neq 1$.

Questão 4) Vamos obter os determinantes:

$$A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right| = 2\times 3\times 2 + 1\times 0\times(-1) + (-1)\times 1\times 0 - \left[(-1)3(-1) + 0\times 0\times 2 + 2\times 1\times 1\right]$$

$$= 12 - (3+2) = 12 - 5 = 7 \neq 0$$

(A invertível)

$$B \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = (-1)4(1) + (-2)(0)(0) + (0)(2)(0) - \left[(0)(4)(0) + (0)(0)(-1) + (1)(2)(-2)\right] =$$

$$= -4 - [-4] = 0$$ (B não é invertível)

Questão 4) Vamos obter a inversa de A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + L_1 \to L_3]{L_2 - 2L_1 \to L_2}$$

$$\xrightarrow[L_3 + L_1 \to L_3]{L_2 - 2L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{-5} \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 3L_2 \to L_3]{L_1 - 3L_2 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3/5 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 7/5 & 3/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{7} L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3/5 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & -1/7 & 5/7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 + \frac{3}{5} L_3 \to L_1]{L_2 - \frac{L_3}{5} \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & -1/7 & 5/7 \end{array}\right]$$

a inversa de A é $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$