

## 2ª Lista de Exercícios, MA 141

### PRODUTO ESCALAR, VETORIAL E MISTO

1. a) Determine, se existir, os valores de  $x$  para que o vetor  $v = x\vec{i} + 6\vec{k}$  seja paralelo ao produto vetorial de  $w = \vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$  por  $u = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

b) Determine  $x$  para que os pontos  $A = (x, 1, 2)$ ,  $B = (2, -2, -3)$ ,  $C = (5, -1, 1)$  e  $D = (3, -2, -2)$  sejam coplanares.

2. Encontre o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  nos seguintes casos:

a) Dados os pontos  $A = (1, 3, 4)$ ,  $B = (3, 5, 3)$ ,  $C = (2, 1, 6)$  e  $D = (2, 2, 5)$  tome  $u = \overrightarrow{AB}$ ,  $v = \overrightarrow{AC}$  e  $w = \overrightarrow{AD} = (1, 3, 4)$ .

b)  $u = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $v = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  e  $w = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .

3. Sejam  $u$  e  $v$  vetores no espaço. Mostre que

a)  $(u + v) \times (u - v) = 2v \times u$

b) Se  $u \times v$  é não nulo e  $w$  é um vetor qualquer no espaço então existem números reais  $a, b$  e  $c$  tal que  $w = a(u \times v) + bu + cv$ .

c) Se  $u \times v$  é não nulo e  $u$  é ortogonal a  $v$  então  $u \times (u \times v)$  é paralelo a  $v$ .

4. Sejam  $A(2, 1, 2)$ ,  $B(1, 0, 0)$  e  $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$  três pontos no espaço. Calcule os ângulos do triângulo  $ABC$ , e os comprimentos da mediana e da altura que saem do vértice  $A$ .

5. Sejam  $A(-1, 2, 3)$ ,  $M(-1, 3, 2)$  e  $N(1, 1, 3)$ . O triângulo  $ABC$  tem ângulos  $A = 90^\circ$  e  $B = 30^\circ$  e os vértices  $B$  e  $C$  pertencem à reta  $MN$ . Encontre os vértices  $B$  e  $C$ .

6. Sejam  $u = (-1, 1, 1)$  e  $v = (2, 0, 1)$  dois vetores. Encontre os vetores  $w$  que são paralelos ao plano determinado por  $O$ ,  $u$  e  $v$ , perpendiculares a  $v$  e  $u \cdot w = 7$ .

7. O vetor  $w$  é ortogonal aos vetores  $u = (2, 3, -1)$  e  $v = (1, -2, 3)$  e  $w \cdot (2, -1, 1) = -6$ . Encontre  $w$ .

8. Sejam  $u = (1, -1, 3)$  e  $v = (3, -5, 6)$ . Encontre  $proj_{u+v}(2u - v)$ .

9. Responda, justificando, falso ou verdadeiro a cada uma das seguintes afirmações:

a) Se  $u, v$  e  $w$  são vetores no espaço, com  $v$  não nulo e  $v \times u = v \times w$  então  $u = w$ .

b) Se  $u, v$  e  $w$  são vetores no espaço então:  $|u \cdot (v \times w)| = |v \cdot (u \times w)| = |w \cdot (v \times u)| = |v \cdot (w \times u)|$ .

c) Se  $u, v$  e  $w$  são vetores no espaço então  $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$ .

d) Se  $u, v$  e  $w$  são vetores no espaço,  $u$  é não nulo e  $u \times v = u \times w = \vec{0}$  então  $v \times w = \vec{0}$ .

### RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

10. Para cada um dos casos abaixo encontre equações paramétricas e equações simétricas para a reta  $r$ :

a) A reta  $r$  passa pelos pontos  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (2, 3, 1)$ .

b) A reta  $r$  tem vetor diretor  $v = (1, 1, -1)$  e passa pelo ponto  $P_0 = (0, 1, 7)$ .

c) A reta  $r$  passa pelo ponto  $P_0 = (1, -1, 1)$  e é paralela à reta  $l : x - 1 = y = \frac{2z - 2}{3}$ .

d) A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $2x - y + 2z = 4$  e passa pelo ponto de interseção das retas  $l_1$  e  $l_2$  dadas

por:  $l_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  e  $l_2: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ .

e) A reta  $r$  é a interseção dos planos  $x + y + 2z = 1$  e  $2x - y + z = 2$ .

11. Para cada par de retas  $r$  e  $l$  abaixo encontre  $l \cap r$ . E nos casos em que a interseção é vazia decida se elas são paralelas ou reversas.

a)  $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$  e  $l : \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ .

b)  $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$  e  $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$ .

c)  $r : \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$  e  $l : \begin{cases} x - 3y + z = -3 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$ .

12. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação do plano  $\pi$ .

a) O plano  $\pi$  passa pelo ponto  $P = (3, 1, 2)$  e tem vetor normal  $N = (1, 2, -3)$ .

b) O plano  $\pi$  passa pelos pontos  $A = (0, 0, 2)$ ,  $B = (2, 4, 1)$  e  $C = (-2, 3, 3)$

c) Tem-se que  $C = (-5, 1, 2) \in \pi$  e que  $\pi$  é perpendicular à reta que passa pelos pontos  $A = (2, 2, -4)$  e  $B = (7, -1, 3)$ .

- d) O plano  $\pi$  é perpendicular ao plano  $x + 3y - z = 7$  e contém os pontos  $A = (2, 0, 5)$  e  $B = (0, 2, -1)$ .  
e) O plano  $\pi$  é perpendicular a cada um dos planos  $x - y - 2z = 0$  e  $2x + y - 4z - 5 = 0$  e contém o ponto  $A = (4, 0, -2)$ .

13. a) Encontre a distância do plano  $\pi : 2x + 2y - z = 6$  e o ponto  $P = (2, 2, -4)$ .

b) Encontre a distância perpendicular entre os planos (paralelos):  $4x - 8y - z = 9$  e  $2x - 4y - \frac{z}{2} = 5$ .

c) Verifique que a reta  $x - 1 = z - 2$  e  $y = 3$  é paralela ao plano  $x + 2y - z = 3$  e encontre a distância perpendicular entre eles.

14. a) Sejam  $r$  : a reta  $x - 1 = y = z$  e  $A, B$  os pontos  $A = (1, 1, 1)$  e  $B = (0, 0, 1)$ . Encontre o ponto de  $r$  equidistante de  $A$  e  $B$ .

b) Dados o plano  $x - y + z = 1$  e o ponto  $P = (1, 0, 1)$ . Encontre o ponto  $Q$  que é simétrico a  $P$  em relação ao plano dado.

15. Sejam  $P = (a, b, c)$  um ponto no espaço e  $r$  a reta  $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ . Para cada par, não nulo, de números reais  $(m, n)$  considere o plano  $\pi_{(m,n)} : (m + n)x + (m - 2n)y + (2m + n)z = 4m + 5n$ .

Mostre que:  $P \in r$  se e somente se  $P \in \pi_{(m,n)}$ , para todo par não nulo  $(m, n)$ .

16. Dados os dois pontos  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de  $A$  e  $B$  é um plano que passa pelo ponto médio de  $A$  e  $B$  e é perpendicular à reta que contém  $A$  e  $B$ .

17. Considere as retas  $r$  e  $l$  dadas por:  $r: x = 0, y = 2 + t$  e  $z = 1 + t$ ;  $l: x - 2 = z + 1$  e  $y = 3$ .

a) Mostre que  $r$  e  $l$  são reversas.

b) Encontre os planos  $\pi$  e  $\alpha$  tais que:  $r \subset \pi, l \subset \alpha$  e  $\pi$  é paralelo a  $\alpha$ .

c) Encontre a distância entre os planos  $\pi$  e  $\alpha$  do item anterior.

d) Encontre  $P$  em  $r$  e  $Q$  em  $l$  tais que a reta que passa por  $P$  e  $Q$  seja perpendicular a  $r$  e a  $l$ .

18. Considere os planos  $\alpha : x - y + z - 3 = 0$  e  $\beta : 2m^2x - (m + 1)y + 2z = 0$ .

a) Determine  $m$ , em cada caso, para que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  sejam: paralelos; concorrentes e concorrentes ortogonais.

b) Para  $m = -1$  encontre a equação da reta interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

14. Sejam  $a, b, c, d$  números reais tais que  $ax + by + cz + d > 0$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Mostre que  $a = b = c = 0$  e  $d > 0$ .

## TRANSLAÇÃO NO PLANO - CÔNICAS - COORDENADAS POLARES

19. Tome  $x'y'$  o sistema de eixos do plano que é a translação do sistema  $xy$  para a nova origem  $O' = (1, 1)$ , i.é.,  $x' = x - 1$  e  $y' = y - 1$ .

a) Dado o ponto  $P = (1, 4)$  no sistema  $xy$ , encontre as coordenadas de  $P$  no sistema  $x'y'$ .

b) Dado o ponto  $A = (2, 1)$  no sistema  $x'y'$ , encontre as coordenadas de  $A$  no sistema  $xy$ .

c) Dada a equação  $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$ , encontre tal equação nas variáveis  $x'y'$ .

20. Encontre os vértices (ou vértice), os focos (ou foco) e a excentricidade de cada uma das cônicas. E esboce o gráfico.

a)  $4x^2 + 9y = 144$

b)  $49x^2 - 9y^2 = 441$

c)  $3x^2 - 14y = 0$

21. Para cada uma das equações abaixo decida se a cônica  $C$  determinada pela equação é degenerada ou não. Nos casos em que não são degeneradas encontre os vértices (ou vértice), os focos (ou foco) e esboce o gráfico.

a)  $9x^2 - 18x + 9y^2 - 6y = 10$

b)  $4x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 26$

c)  $4y^2 - 4y - 24x + 9 = 0$

d)  $36x^2 - 24x + 36y^2 - 36y + 14 = 0$

e)  $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 68 = 0$

f)  $9y^2 - 9x^2 + 6x = 1$ .

22. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas polares.

a)  $x^2 - y^2 = 16$

b)  $2xy = 25$

c)  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

d)  $x^3 + y^3 - 6xy = 0$

23. Em cada um dos casos abaixo encontre a equação em coordenadas cartesianas.

a)  $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$

b)  $r^2 = 2\sin 2\theta$

c)  $r = \frac{6}{2-3\sin\theta}$

d)  $r^2 = \cos\theta$ .

24. Em cada um dos casos abaixo identifique a cônica. Determine a excentricidade, a equação cartesiana da cônica e da diretriz e as coordenadas cartesianas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s).

a)  $r = \frac{5}{2-2\cos\theta}$

b)  $r = \frac{6}{3+\sin\theta}$

c)  $r = \frac{3}{2+4\cos\theta}$

d)  $r = \frac{4}{2-3\cos\theta}$ .