



UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
IMECC

A Geometria e a Astronomia na Grécia Antiga

Larissa Garcia Alfonsi RA: 033860
Renan Ferreira Fечи RA:035547
Flávio Henrique Ferraresi RA: 043621

23 de Novembro de 2006

**Trabalho apresentado na disciplina MA 241 – Geometria
Descritiva e Desenho Geométrico
Ministrado por Eliane Quelho Frota Rezende.**

Sumário

Resumo

A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga

Os Astrônomos da Grécia Antiga

Qual o Mais Distante, o Sol ou a Lua?

A Idéia de Aristarco

Tamanhos do Sol e da Terra

Relações com o Raio da Terra

Eratóstenes e o Raio da Terra

Ptolomeu e a Distância da Terra à Lua

Conclusão

Bibliografia

Resumo: Objetivamos com o estudo deste trabalho aplicar o conhecimento adquirido em sala de aula da mesma forma que os filósofos na Grécia antiga a faziam, visando assim encontrar uma forma educativa para aplicar e estimular o ensino de geometria.

A GEOMETRIA E AS DISTÂNCIAS ASTRONÔMICAS NA GRÉCIA ANTIGA

Qual é o mais distante da Terra: o Sol ou a Lua? Quais os tamanhos do Sol e da Lua? Cálculos e estudos para responder a perguntas como essas foram feitos na antiguidade, séculos antes de Cristo. Baseados em idéias muito simples e sustentados por noções de Geometria, veremos como cientistas como Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu chegaram a brilhantes resultados.

Os astrônomos da Grécia antiga

Tales de Mileto (624 - 546 a.C.) introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia, trazidos do Egito. Pensava que a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água.

Pitágoras de Samos (572 - 497 a.C.) acreditava na esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Achava que os planetas, o Sol, e a Lua eram transportados por esferas separadas da que carregava as estrelas. Foi o primeiro a chamar o céu de cosmos.

Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) explicou que as fases da Lua¹ dependem de quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou, também, os eclipses: um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol; um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou a favor da esfericidade da Terra, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada. Afirmava que o Universo é esférico e finito. Aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxus de Cnidus (408-355 a.C.), propondo em seu livro *De Caelo*, que "o Universo é finito e esférico, ou não terá centro e não pode se mover."

Heraclides de Pontus (388-315 a.C.) propôs que a Terra gira diariamente sobre seu próprio eixo, que Vênus e Mercúrio orbitam o Sol, e a existência de epiciclos.

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro a propor a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua.

Eratóstenes de Cirênia (276-194 a.C.), bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandrina de 240 a.C. a 194 a.C., foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra.

Ele notou que, na cidade egípcia de Siena (atualmente chamada de Aswân), no primeiro dia do verão, ao meio-dia, a luz solar atingia o fundo de um grande poço, ou seja, o Sol estava incidindo perpendicularmente à Terra em Siena. Já em Alexandria, situada ao norte de Siena, isso não ocorria; medindo o tamanho da sombra de um bastão na vertical, Eratóstenes observou que em Alexandria, no mesmo dia e hora, o Sol estava aproximadamente sete graus mais ao sul. A distância entre Alexandria e Siena era conhecida como de 5000 estádios. Um estádio era uma unidade de distância usada na Grécia antiga. Um camelo atravessa 100 estádios em um dia, e viaja a cerca de 16 km/dia. Como 7 graus corresponde a 1/50 de um círculo (360 graus), Alexandria deveria estar a 1/50 da circunferência da Terra ao norte de Siena e a circunferência da Terra deveria ser 50×5000 estádios. Infelizmente, não é possível se ter certeza do valor do estádio usado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se ele utilizou um estádio equivalente a 1/6 km, o valor está a 1% do valor correto de 40000 km. O diâmetro da Terra é obtido dividindo-se a circunferência por .

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã, construiu um observatório na ilha de Rodas, onde fez observações durante o período de 160 a 127 a.C. Como resultado, ele compilou um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. A magnitude, que especificava o brilho da estrela, era dividida em seis categorias, de 1 a 6, sendo 1 a mais brilhante, e 6 a mais fraca visível a olho nu. Hiparco deduziu corretamente a direção dos pólos celestes, e até mesmo a precessão, que é a variação da direção do eixo de rotação da Terra devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva 26000 anos para completar um ciclo. Para deduzir a precessão, ele comparou as posições de várias estrelas com aquelas catalogadas por Timocharis de Alexandria e Aristyllus de Alexandria 150 anos antes (cerca de 283 a.C. 260 a.C.). Estes eram membros da Escola Alexandrina do século III a.C. e foram os primeiros a medir as distâncias das estrelas de pontos fixos no céu (coordenadas eclípticas). Foram, também, dos primeiros a trabalhar na Biblioteca de Alexandria, que se chamava Museu, fundada pelo rei do Egito, Ptolémée Sôter Ier, em 305 a.C..

Hiparco também deduziu o valor correto de 8/3 para a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua e também que a Lua estava a 59 vezes o raio da Terra de distância; o valor correto é 60. Ele determinou a duração do ano com uma margem de erro de 6 minutos.

Ptolomeu (85 d.C. - 165 d.C.) (Claudius Ptolemaeus) foi o último astrônomo importante da antiguidade. Não se sabe se ele era egípcio ou romano. Ele compilou uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida como o Almagesto, que é a maior fonte de conhecimento sobre a astronomia na Grécia.

Qual o mais distante, o Sol ou a Lua?

Para constatar que o sol está mais distante da Terra que a lua, basta observar atentamente as várias faces da lua. Se ela estivesse mais longe de

nós que o sol, então, por simples análise de suas várias posições relativamente ao sol e à Terra (a Figura 1 ilustra quatro dessas posições), concluímos que ela estaria sempre iluminada pelo sol quando vista da terra. Em particular, não haveria lua nova! E haveria duas posições da lua onde ela seria lua cheia, uma delas em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente.



Figura 1

A hipótese contrária, de que o sol está mais distante da Terra que a lua, é a única compatível com as várias faces da lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar essa hipótese é a ocorrência de eclipses do sol, que só é possível com a lua mais próxima à Terra que o sol.

A idéia de Aristarco

Para descobrir quão mais distante a Lua se encontra da Terra em relação ao Sol é necessária uma observação mais profunda do ciclo lunar. A seguir, o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III a.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar essas distâncias.

Existem duas posições da lua em sua órbita, o “quarto crescente” e o “quarto minguante”, quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Figura 2). Quando isso acontece, o triângulo Terra-lua-sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela lua.

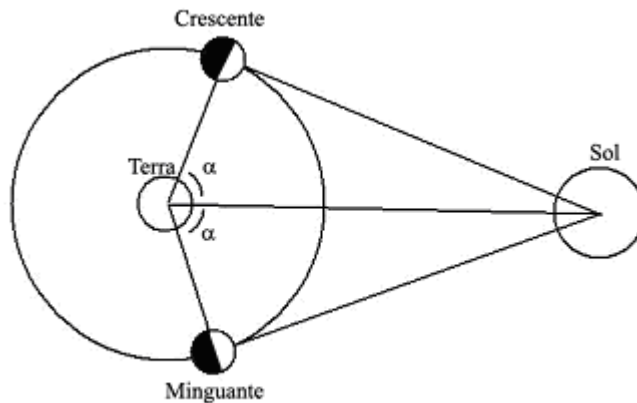


Figura 2

Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo α é muito próximo de 90° , indício de que o sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a lua.

Aristarco teria medido esse ângulo α , encontrando para ele um valor de 87° . Então o ângulo determinado pelo vértice sol seria de 3° . Basta agora construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar a razão TS/TL , que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao sol é cerca de 20 vezes a distância da Terra à lua.

$$\frac{TS}{TL} \cong \frac{1}{\text{sen } 3^\circ} \cong 19$$

Para calcular o valor do ângulo α basta observar o tempo de um ciclo lunar (tempo gasto para a distância angular de 360°), que é de 29,5 dias e o tempo gasto para Lua passar de Minguante a Crescente (percurso angular de 2α), 14,25 dias. Assim, levando-se novamente em conta o critério de proporção, tem-se:

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25} \therefore \alpha = 86,95^\circ$$

Pode-se, então, calcular as distâncias relativas à Terra:

$$\frac{TS}{TL} = \text{sec } \alpha = \text{sec } 86,95^\circ \cong 18,8$$

O resultado obtido por Aristarco, no entanto, está longe da realidade, sendo sabido hoje, que a distância do Sol a Terra é 400 vezes a da Lua a Terra, sendo então, o valor do ângulo α próximo a $89,86^\circ$, ou seja, muito próximo de 90° ! isto põe o problema de explicar como Aristarco teria chegado ao ângulo α . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo

gasto pela lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante à crescente gerou esse erro em seus resultados.

Tamanhos do Sol e da Terra

Aristarco comprovou através da observação de um eclipse total do Sol, que o Sol e a Lua possuem o mesmo “tamanho angular”, ou seja o ângulo sob o qual o observador vê o Sol é o mesmo sob o qual vê a Lua. Ele estimulou o ângulo 2α como sendo 2° , quando na verdade ele é apenas $0,5^\circ$. Considere a figura abaixo. Baseado na semelhança entre os triângulos TLL' e TSS' (Caso A.A., α e ângulo reto), temos:

$$\frac{TS}{TL} \cong 20, \text{ ou seja, o raio do Sol é aproximadamente 20 vezes o raio da}$$

Lua.

Assim

$$\frac{R_s}{D_s} = \frac{R_L}{D_L} = a = \text{tg}\alpha, \quad \frac{D_s}{D_L} = b$$

Como para Aristarco $a \cong 1$ e $b \cong 20$, quando, na realidade $a \cong 0,25$ e $b \cong 400$.

Relações com o Raio da Terra

Para relacionar os tamanhos do Sol e da Lua a raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua. Medindo o tempo gasto para que este satélite atravessasse o cone de sombra da Terra ele encontrou que o diâmetro do cone de sombra da terra na altura da Lua era $8/3$ do diâmetro da Lua.

Na figura 3, L, T, S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $AS = R_s$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra da altura da Lua, de sorte que $LD = 8 R_L / 3$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

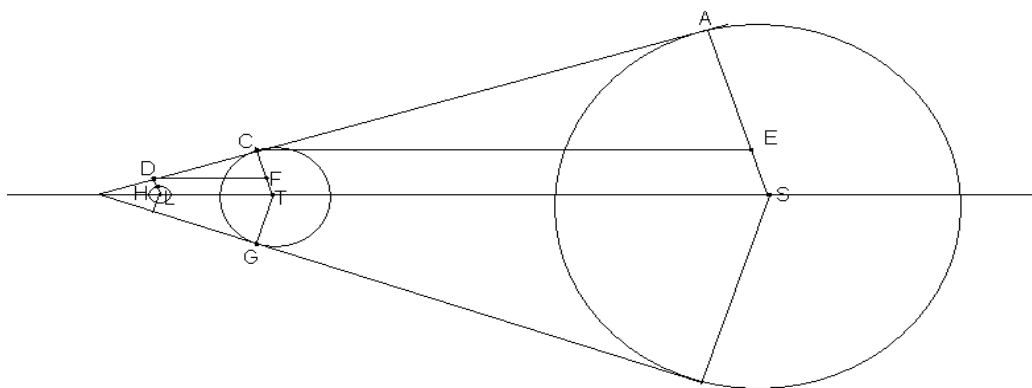


Figura 3

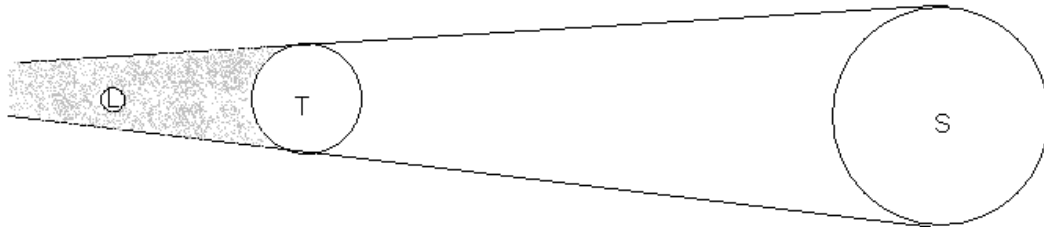


Figura 4

Mas

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3; DF = DL;$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T; CE = D_S$$

Substituindo na igualdade anterior,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_S = bD_L, R_S = aD_S = abD_L, R_L = aD_L$$

De sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

Daqui segue-se que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \left(\frac{8}{3} + 1\right)aD_L$$

Então,

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a}, \quad R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11} \quad \text{e} \quad R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}$$

Deste modo substituindo $a = \text{tg } 1^\circ \cong 0,017$ e $b \cong 20$, podemos obter as quatro grandezas, D_L , D_S , R_S e R_L , em termos do raio da terra R_T , com os dados de Aristarco:

$$D_L \cong 16,8R_T, D_S \cong 337R_T,$$

$$R_S \cong 5,7R_T, R_L \cong 0,29R_T$$

Ao contrário, com os valores mais corretos $a = \text{tg } \frac{1}{4}^\circ \cong 0,0044$ e $b=400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \cong 62R_T, D_S \cong 24855R_T,$$

$$R_S \cong 109R_T, R_L \cong 0,27R_T$$

Os cálculos que vimos descrevendo encontram-se num livro de Aristarco, intitulado Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua. Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência, Thomas Heath

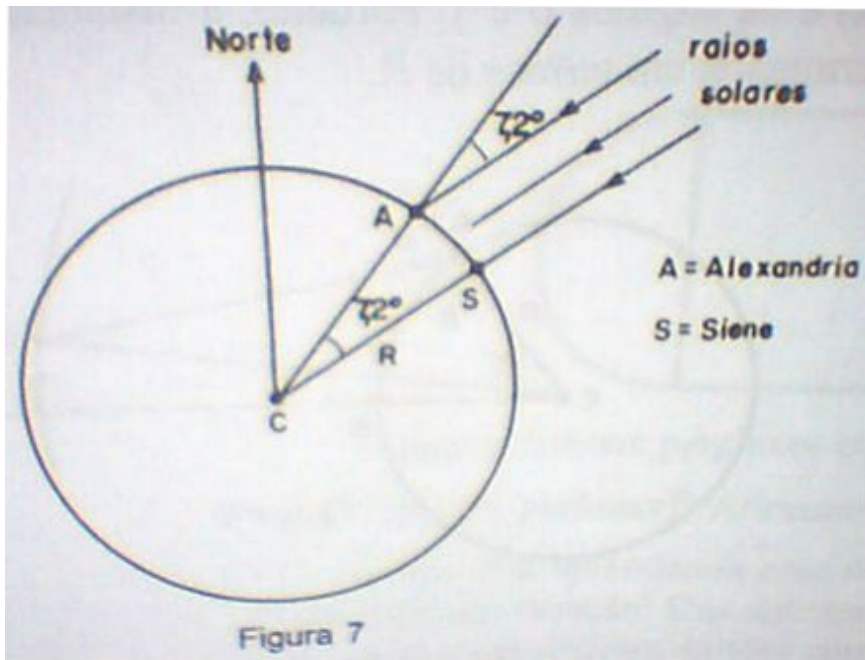
Aperfeiçoando as medições ao longo dos últimos séculos, sabemos hoje que o diâmetro terrestre não alcança um centésimo do solar. Embora os seus resultados tivessem erros de uma ordem de grandeza, o problema residia mais na falta de precisão dos seus instrumentos do que no seu método de trabalho, que era adequado. Além disso, Aristarco também calculou, com mais precisão do que a dos antigos sábios, a duração de um ano solar.

As imprecisões de Aristarco assumem pouca importância frente a seu bom senso: para ele, seria mais natural supor que o astro menor girasse em torno do maior, e não o contrário.

Eratóstenes e o raio da Terra

Pelo que vimos até agora, basta saber o raio da Terra para podermos calcular os tamanhos e as distâncias a que se encontram o Sol e a Lua.

Foi Eratóstenes (276-196 a.C.), outro sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno, para nós, habitantes do hemisfério Sul), os raios solares caíam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caíam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de $7,2^\circ$ com a vertical (Figura 7), ou seja, $1/50$ da circunferência completa, que é de 360° . Como os raios solares são praticamente paralelos, isso significa que o ângulo central ACS também mede $7,2^\circ$. Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos, $2\pi R/AS = 360^\circ/7,2^\circ$,



onde R é o raio da Terra. Como a distância AS de Alexandria a Siene era conhecida e igual a 5000 estádios, podemos calcular a circunferência terrestre:
 $2\pi R = 5000 \times 360/7,2 \approx 250000$ estádio ≈ 46300 km
 $R \approx (250000 \times 185) / 6,28 \approx 7365$ km.

O valor atual, no equador, é de 6378 km, mostrando que o resultado de Eratóstenes é bastante razoável.

Ptolomeu e a distância da Terra à Lua

Cláudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, o *Almagesto*, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos muitos fatos citados nesse livro, dentre eles vários eclipses, infere-se que Ptolomeu teria vivido por volta do ano 150 de nossa era.

Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua. Para isso imaginemos que um observador em A (Figura 8) veja a Lua na posição L , sobre a vertical de A . Depois de um certo tempo t , o observador passa da posição A à posição A' , devido ao movimento de rotação da terra. Ao mesmo tempo a Lua passará à posição L' . Como os ângulos ACA' e ACL' são conhecidos (pois os movimentos da Terra e da Lua são conhecidos), também é conhecido o ângulo $\gamma = ACA' - ACL'$. O ângulo α é medido diretamente, o que permite conhecer seu suplementar β . Assim, o triângulo $CA'L'$ fica completamente determinado pelo lado $CA' = R$ (raio da Terra) e os ângulos β e γ . Portanto, a distância CL' da Terra à Lua pode ser determinada em termos de R .

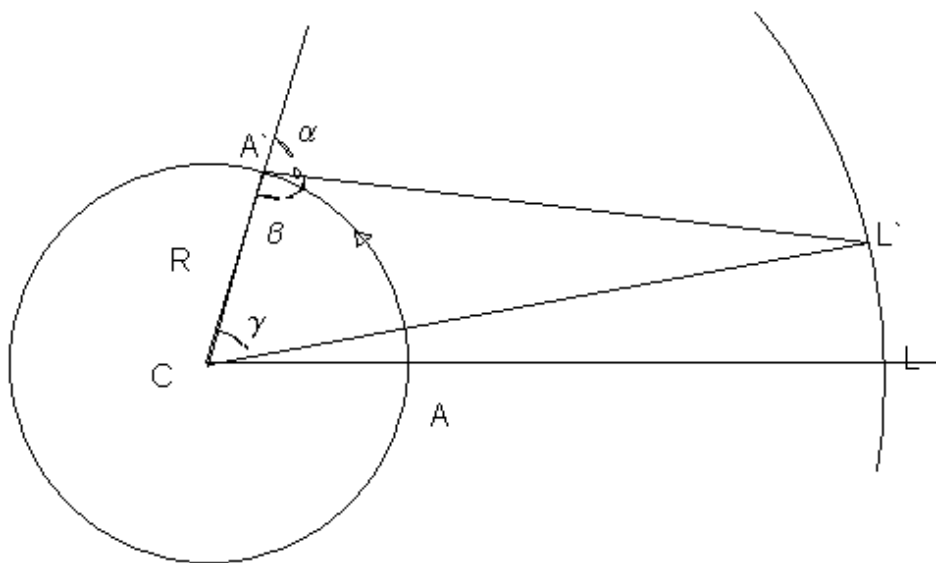


figura 8

Conclusão: Concluímos que apesar dos erros que encontramos em tais métodos apresentados na Grécia antiga podemos perceber que estes estavam muito próximos dos considerados atualmente e que se deve também à falta de instrumentos precisos em tal época.

Consideramos também que este trabalho influenciou bastante o grupo a pensar em como a geometria pode ser aplicada em sala de aula não apenas da forma tradicional.

Referências Bibliográficas:

Ávila, Geraldo. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga. In *Explorando o Ensino da Matemática*, vol. II, páginas 39-46.
<http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm>