

# Equação Logística Discreta: Novas Soluções Estacionárias na Abordagem Fuzzy

Karine F. Magnago<sup>1</sup>, Rodney C. Bassanezi<sup>2</sup>, Laécio C. Barros<sup>3</sup>

DMA, IMECC – UNICAMP, 13.081-970, Campinas, SP.

**Resumo.** A variável de estado da equação logística é considerada subjetiva e modelada por meio de subconjuntos fuzzy; com isso, novos pontos fixos e soluções periódicas são conhecidos, exclusivos da equação fuzzy correspondente. Condições de existência e estabilidade destas soluções também são estudadas.

**Palavras-chave:** Modelo logístico discreto; variável fuzzy; pontos fixos e ciclos.

## 1 Introdução

A modelagem não linear tem sido importante aliada no estudo de diversos processos dinâmicos, além de fornecer resultados interessantes e inesperados especialmente relacionados a ocorrência do caos determinístico.

Na dinâmica populacional, ela aparece com o modelo logístico discreto

$$x_{t+1} = f_a(x_t) = ax_t(1 - x_t) \quad (1)$$

onde  $x_t$  denota a densidade populacional na geração  $t$  e  $a$ , a taxa de crescimento intrínseco ( $1 \leq a \leq 4$ ) (Devaney, 1989; Sharkovski et al., 1993; Rohde e Rohde, 2001; Murray, 1993). A simplicidade na equação 1 oculta um processo complexo surpreendente. Para  $a \in (1, 3)$ , a população entra em equilíbrio com um único valor  $x_a$ ; de fato,  $x_0 = 0$  e  $x_a = 1 - 1/a$  são pontos fixos de 1, sendo que o primeiro é instável e o segundo é estável neste intervalo. Em  $a_1 = 3$  (primeiro valor de bifurcação), o ponto fixo  $x_a$  perde a estabilidade e, a partir deste valor, a população equilibrada alterna entre duas densidades populacionais até o próximo valor de bifurcação que é  $a_2 = 1 + \sqrt{6}$ . Em  $a_2 = 1 + \sqrt{6}$ , esta órbita de

---

<sup>1</sup>magnago@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>rodney@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>laeciocb@ime.unicamp.br

período 2 perde a estabilidade e origina-se uma órbita de período 4 estável até o próximo valor de bifurcação  $a_3$ . Este comportamento de duplicação do período das órbitas ocorre sucessivamente até que o sistema alcance o caos em  $a^* = 3.569 \dots$ . A partir de  $a^*$ , observam-se regiões do parâmetro  $a$  onde a flutuação populacional é caótica, intercaladas com pequenas janelas onde aparecem novamente órbitas periódicas estáveis (janelas de periodicidade). Por exemplo em  $a = 3.83$ , temos uma órbita estável de período 3. O diagrama de bifurcação apresentado na figura 1 ilustra estes cenários.

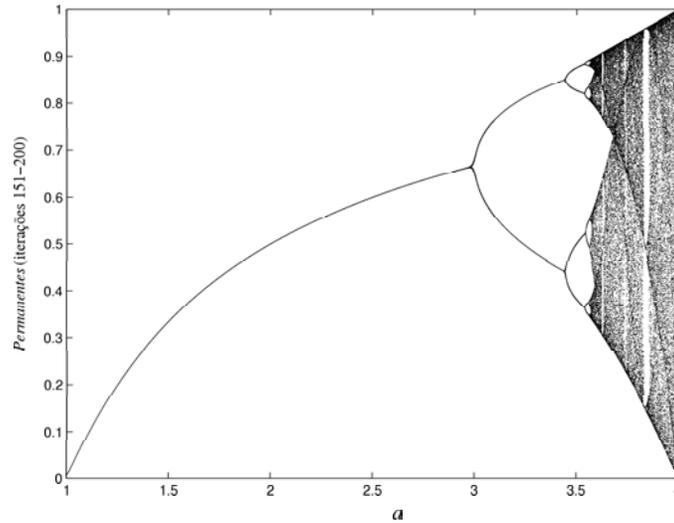


Figura 1: Diagrama de bifurcação do modelo logístico discreto.

Apesar do modelo logístico discreto estar bem estabelecido, não podemos esquecer que nele assumimos que a população é homogênea e que usamos a taxa  $a$  média para toda a população. Já numa espécie natural é razoável admitir que cada indivíduo responde de maneira particular aos estímulos e limitações a ele apresentados, caracterizando a população por uma diversidade comportamental. Esta heterogenidade é mais acentuada quando consideramos cada indivíduo isoladamente e menos, quando observamos grupos de indivíduos.

Rohde e Rohde (2001) estudaram a heterogenidade populacional utilizando a dinâmica de metapopulações e considerando taxas de crescimento intrínseco ( $a$ ) ligeiramente diferentes em cada subpopulação.

Já Barros et al. (1997, 2000); Bassanezi et al. (2000) lidaram com a subjetividade inerente à dinâmica populacional considerando a variável de estado fuzzy; com isso, encontraram algumas novas soluções estacionárias para a equação fuzzy associada a 1. Também

Ahmed e Hegazi (2001) estudaram a dinâmica do replicador discreto de gavião-pomba e jogos de dilema do prisioneiro, além de um modelo presa-predador, utilizando sistemas dinâmicos fuzzy e obtendo novas soluções.

Neste artigo, nós propomos que a variável de estado é subjetiva ou imprecisa e utilizamos o princípio da extensão de Zadeh como ferramenta. Assim, determinamos novos pontos fixos e novas órbitas periódicas exclusivos da versão fuzzy correspondente à equação logística 1.

## 2 Preliminares Matemáticas

Esta seção é reservada para a apresentação de alguns conceitos básicos da teoria de subconjuntos fuzzy e de resultados preliminares relacionados a sistemas discretos fuzzy, necessários para o desenvolvimento deste estudo.

**Definição 1** Um subconjunto fuzzy  $A$  em  $\mathfrak{R}^n$  é definido pela função  $u_A : \mathfrak{R}^n \rightarrow [0, 1]$  que atribui a  $x$  o seu grau de pertinência  $u_A(x)$  ao subconjunto  $A$ .

**Definição 2** Um  $\alpha$ -nível de um subconjunto fuzzy  $u$  é definido por

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathfrak{R}^n : u(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

e

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathfrak{R}^n : u(x) > 0\}}.$$

Representamos a família dos subconjuntos fuzzy  $u : \mathfrak{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , cujos  $\alpha$ -níveis são subconjuntos compactos não-vazios do  $\mathfrak{R}^n$ , por  $\mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$ . Ainda, usamos  $\mathcal{E}^n$  para denotar a família dos subconjuntos fuzzy cujos  $\alpha$ -níveis também são convexos ( $\mathcal{E}^n \subset \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$ ).

**Definição 3** A extensão de Zadeh de uma função  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é a função  $\hat{f}$  onde para cada subconjunto fuzzy  $u$  é associado o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(u)$  dado por

$$\hat{f}(u)(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}. \quad (2)$$

**Teorema 1** Seja  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  função contínua. Sua extensão de Zadeh  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$  é bem definida e

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

A prova deste teorema pode ser encontrada em Barros et al. (1997).

**Teorema 2** *Sejam  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  função contínua e  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$  sua extensão de Zadeh. Então  $(\hat{f})^t(u) = \widehat{(f^t)}(u)$ , para todo  $u \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$  e  $t$  natural, onde  $(\hat{f})^t$  indica a composição de  $\hat{f}$ ,  $t$  vezes.*

Prova:

Provar que  $(\hat{f})^t(u) = \widehat{(f^t)}(u)$  equivale a mostrar que  $\left[ (\hat{f})^t(u) \right]^\alpha = \left[ \widehat{(f^t)}(u) \right]^\alpha$ ,  $\forall u \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$ ,  $\forall t$  natural e  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

Primeiro mostra-se que  $\left[ (\hat{f})^t(u) \right]^\alpha = f^t([u]^\alpha)$ ; esta demonstração é feita por indução em  $t$ .

$t = 1$ :

Segue imediatamente do teorema 1.

$t > 1$ :

Admitimos  $\left[ (\hat{f})^{t-1}(u) \right]^\alpha = f^{t-1}([u]^\alpha)$ ; daí

$$\begin{aligned} \left[ (\hat{f})^t(u) \right]^\alpha &= \left[ \hat{f} \left( (\hat{f})^{t-1}(u) \right) \right]^\alpha = f \left( \left[ (\hat{f})^{t-1}(u) \right]^\alpha \right) \\ &= f \left( f^{t-1}([u]^\alpha) \right) = f^t([u]^\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

O resultado desejado é consequência imediata da continuidade da composição de funções contínuas.

Um sistema dinâmico fuzzy discreto é um sistema iterativo

$$u_{t+1} = F(u_t) \quad (4)$$

com a função  $F : \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$ .

Dado  $u_0 \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$ , a seqüência de iteradas

$$u_0, F(u_0), F(F(u_0)), \dots$$

é dita *solução* ou *órbita positiva* da equação 4 por  $u_0$ . Usaremos  $F^t(u_0)$  para denotar a  $t$ -ésima iterada de  $F$  em  $u_0$ .

Dizemos que  $\bar{u} \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$  é ponto fixo de  $F$  se  $F(\bar{u}) = \bar{u}$ .

Observe que  $F(\bar{u}) = \bar{u}$  se, e somente se,  $[F(\bar{u})]^\alpha = [\bar{u}]^\alpha$ , onde  $\alpha \in [0, 1]$ . Ainda, se  $\bar{x}$  é ponto fixo de uma função  $f$ , então a função característica  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é ponto fixo da sua extensão de Zadeh  $\hat{f}$  pois

$$\hat{f}(\chi_{\{\bar{x}\}}) = \chi_{\{f(\bar{x})\}} = \chi_{\{\bar{x}\}}.$$

Um ponto  $\bar{u} \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}^n)$  é dito *ponto periódico de período  $p$*  ou  *$p$ -periódico* da função  $F$  se  $p$  é o menor inteiro positivo tal que  $F^p(\bar{u}) = \bar{u}$ . O conjunto de todas as iteradas de um ponto  $p$ -periódico é chamado *órbita  $p$ -periódica* ou  *$p$ -ciclo*.

**Definição 4** Definimos a métrica

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

onde  $h$  é a métrica de Hausdorff; neste caso:

$$h([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \max \{ \rho([u]^\alpha, [v]^\alpha), \rho([v]^\alpha, [u]^\alpha) \},$$

$$\rho([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup_{a \in [u]^\alpha} \inf_{b \in [v]^\alpha} \|a - b\|$$

e  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana em  $\mathfrak{R}^n$ .

**Definição 5** Dizemos que um ponto fixo  $\bar{u}$  de  $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $u$  para o qual  $D(\bar{u}, u) < \delta$ ,  $D(F^t(u), \bar{u}) < \varepsilon$  é satisfeito para todo  $t$  natural. Um ponto fixo  $\bar{u}$  é assintoticamente estável se ele for estável e existir  $r > 0$  tal que para todo  $u$  tal que  $D(\bar{u}, u) < r$  tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$ .

Observe que um ponto  $p$ -periódico é um ponto fixo da função  $F^p$ . Logo, segue o mesmo conceito de estabilidade de ponto fixo.

**Teorema 3** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua com  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  e  $\hat{f}$  sua extensão de Zadeh. Então

i)  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é estável para o sistema  $u_{t+1} = \hat{f}(u_t)$  se, e somente se,  $\bar{x}$  é estável para  $x_{t+1} = f(x_t)$ ;

ii)  $\chi_{\{\bar{x}\}}$  é assintoticamente estável para o sistema  $u_{t+1} = \hat{f}(u_t)$  se, e somente se,  $\bar{x}$  é assintoticamente estável para  $x_{t+1} = f(x_t)$ .

A prova deste teorema pode ser encontrada em Bassanezi et al. (2000).

**Corolário 1** Seja  $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  a extensão de Zadeh da função contínua  $f$ . O ponto fixo  $\chi_X$  de  $\hat{f}$  é estável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que se  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  com  $[u]^0 \subset B(X, \delta)$  e  $X \subset B([u]^1, \delta)$  então  $f^t([u]^0) \subset B(X, \varepsilon)$  e  $X \subset B(f^t([u]^1), \varepsilon)$  para  $t$  natural.

A prova deste corolário pode ser encontrada em Bassanezi et al. (2000).

A pesar do conteúdo dessa seção ser válido para o espaço  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , vamos nos restringir a  $n = 1$ .

### 3 A Equação Fuzzy e Seus Pontos Fixos

Considere a equação fuzzy, de tempo discreto, associada ao modelo logístico 1

$$u_{t+1} = \hat{f}_a(u_t) \quad (5)$$

onde  $\hat{f}_a$  é a extensão de Zadeh de  $f_a$ .

Pelo teorema 3, sabemos que  $\chi_{\{0\}}$  e  $\chi_{\{x_a\}}$  são pontos fixos da equação 5, sendo o primeiro instável e o segundo assintoticamente estável para  $1 < a < 3$  e instável para  $3 \leq a \leq 4$ . A partir de agora, estamos interessados em encontrar novos pontos fixos para esta equação.

Se  $u \in \mathcal{E}^1$  denota um ponto fixo da equação fuzzy 5, temos

$$\hat{f}_a(u) = u, \quad (6)$$

ou seja:

$$[\hat{f}_a(u)]^\alpha = [u]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (7)$$

em termos dos  $\alpha$ -níveis. Como  $f_a$  é contínua, segue do teorema 1

$$f_a([u]^\alpha) = [u]^\alpha = [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha] \quad (8)$$

ou

$$\begin{cases} u_I^\alpha & = \min \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \\ u_{II}^\alpha & = \max \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \end{cases} \cdot \quad (9)$$

Resolvendo o sistema 9, obtemos os novos pontos fixos:

$$u_1 = \chi_{[0, x_a]}, 1 \leq a \leq 2, \quad (10)$$

$$u_2 = \chi_{[{}^1x_1, {}^1x_2]}, 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}, \quad (11)$$

e, em termos dos  $\alpha$ -níveis,

$$[u_3]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{0\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \tilde{\alpha} > 0, \quad (12)$$

$$[u_4]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 2 < a \leq 4, \tilde{\alpha} > 0, \quad (13)$$

$$[u_5]^\alpha = \begin{cases} [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \check{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \check{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \check{\alpha} > 0, \quad (14)$$

$$[u_6]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \bar{\alpha} < \alpha \leq \check{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \check{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \bar{\alpha} > 0, \quad (15)$$

e

$$[u_7]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \check{\alpha} \\ [{}^1x_1, {}^1x_2] & \text{se } \alpha > \check{\alpha} \end{cases}, 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}, \check{\alpha} > 0. \quad (16)$$

Em  $u_2$  e em  $u_7$  temos os valores

$${}_1x_1 = \frac{1 + a - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \quad (17)$$

e

$${}_1x_2 = \frac{1 + a + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \quad (18)$$

que formam um 2-ciclo do modelo logístico clássico, desde que  $a \geq 3$ .

As figuras 2 e 3 ilustram estes novos pontos fixos fuzzy.

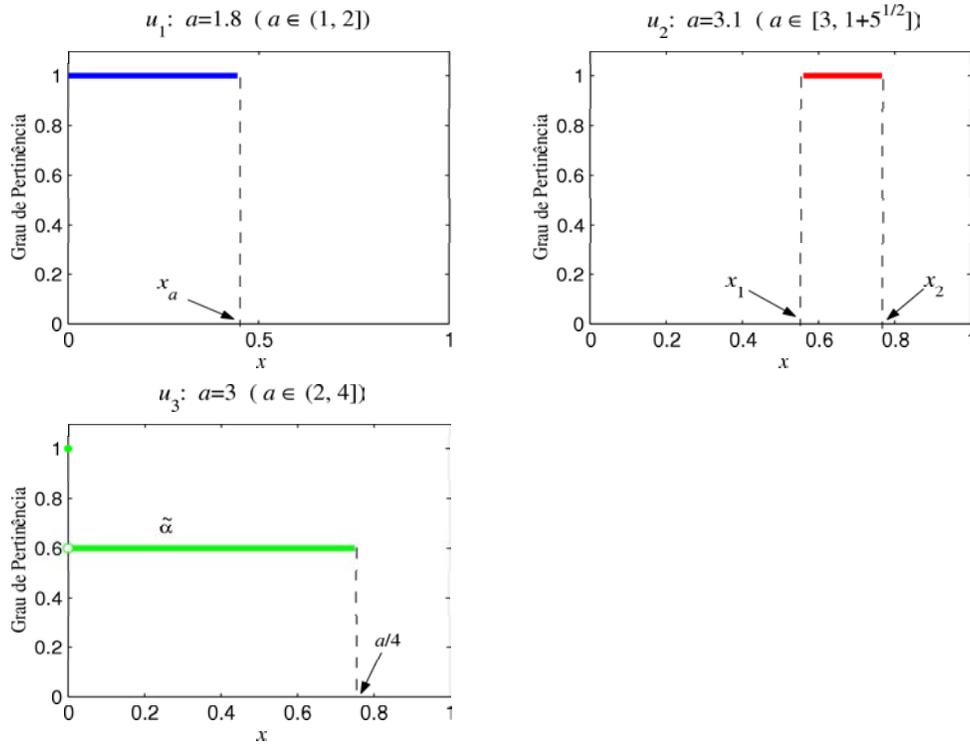


Figura 2: Pontos fixos fuzzy  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .

As condições apresentadas a direita de cada um dos pontos fixos identificam os valores do parâmetro  $a$  nos quais o ponto fixo em questão existe.

A análise da estabilidade foi feita utilizando a definição 5 e o corolário 1, obtendo:

- $u_1$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $u_6$  e  $u_7$  são instáveis nos seus intervalos de existência, respectivamente;
- $u_2$  é assintoticamente estável no seu intervalo de existência;

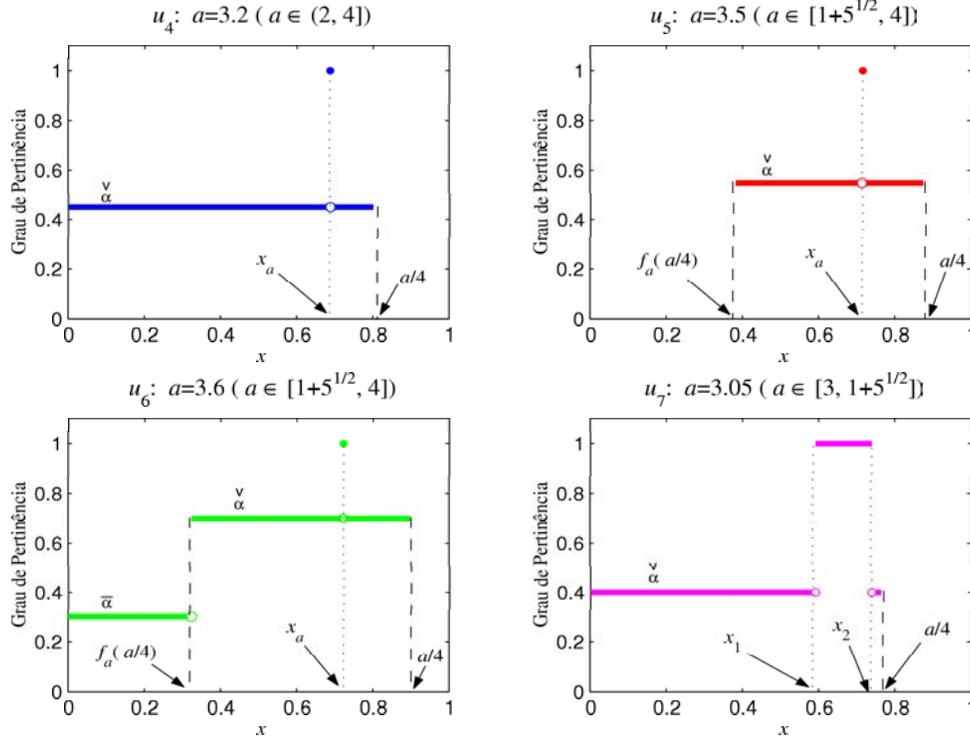


Figura 3: Pontos fixos fuzzy  $u_4, u_5, u_6$  e  $u_7$ .

- $u_5$  é assintoticamente estável se  $\tilde{\alpha} = 1$  e  $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$  e instável caso contrário.

Algumas das demonstrações da análise anterior podem ser encontradas em Bassanezi et al. (2000).

Observe que os pontos fixos assintoticamente estáveis têm a forma  $\chi_A$ , com  $A = \{x_a\}$  (correspondente ao ponto fixo clássico para  $1 < a < 3$ ),  $A = [^1x_1, ^1x_2]$  ( $u_2$  para  $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$ ) e  $A = [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]$  ( $u_5$  para  $\tilde{\alpha} = 1$  e  $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$ ).

## 4 Ciclos Fuzzy

Observando que o equilíbrio fuzzy  $u_2$  (expressão 11) é a função característica do intervalo fechado limitado pelos pontos do 2-ciclo clássico, intuimos que os pontos de um  $2^N$ -ciclo clássico podem dar origem a um  $2^{N-1}$ -ciclo fuzzy construído de maneira análoga. O objetivo desta seção é explorar esta expectativa.

O exemplo a seguir destaca as principais características deste tipo de ciclo fuzzy, o que torna mais claros os resultados generalizados.

Exemplo: O modelo logístico discreto clássico (equação 1) possui um 4-ciclo clássico que denotamos por  $B_2 = \{^2x_1, ^2x_2, ^2x_3, ^2x_4\}$ , em ordem crescente, assintoticamente estável desde que  $a \in [a_2, a_3) = [1 + \sqrt{6}, 3.541 \dots)$ . Usando os pontos de  $B_2$ , escrevemos o 2-ciclo fuzzy

$$\hat{B}_2 = \{\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}, \chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]}\} \quad (19)$$

cujos subconjuntos são pontos fixos da equação

$$u_{t+2} = \hat{f}_a^2(u_t) \quad (20)$$

desde que  $a \in [a_2, a_2^*] = [1 + \sqrt{6}, 3.4985 \dots)$  ( $a_2^* < a_3$ ). Esse intervalo de existência do 2-ciclo fuzzy  $\hat{B}_2$  aparece quando buscamos os pontos fixos da equação 20. Observe que  $u$  é ponto fixo de 20 se satisfaz

$$[u]^\alpha = [\hat{f}_a^2(u)]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (21)$$

ou, usando o teorema 2,

$$[u]^\alpha = f_a^2([u]^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (22)$$

ou ainda

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= \min \{f_a^2(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \\ u_{II}^\alpha &= \max \{f_a^2(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \end{cases} \quad (23)$$

onde  $[u]^\alpha = [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Quando  $u = \chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}$ : temos  $[u]^\alpha = [{}^2x_1, {}^2x_2] \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  e, pela equação 23,

$$\begin{cases} {}^2x_1 &= \min \{f_a^2(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\} = f_a^2({}^2x_2) \\ {}^2x_2 &= \max \{f_a^2(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\} = f_a^2({}^2x_1) \end{cases}, \quad (24)$$

o que só se verifica quando  ${}^2x_2 \leq \frac{1}{2}$ , valor em que ocorre um mínimo de  $f_a^2(x)$  (veja na figura 4). Observe que  ${}^2x_1$  é sempre maior que  $x_{\max_1}$ , valor em que ocorre um máximo de  $f_a^2(x)$  (veja na figura 5).

Quando  $u = \chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]}$ : temos  $[u]^\alpha = [{}^2x_3, {}^2x_4] \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  e

$$\begin{cases} {}^2x_3 &= \min \{f_a^2(x) : x \in [{}^2x_3, {}^2x_4]\} = f_a^2({}^2x_4) \\ {}^2x_4 &= \max \{f_a^2(x) : x \in [{}^2x_3, {}^2x_4]\} = f_a^2({}^2x_3) \end{cases}, \quad (25)$$

o que só se verifica quando  ${}^2x_3 \geq x_{\max_2}$ , outro valor em que ocorre um máximo de  $f_a^2(x)$  (veja na figura 4).

Ambas condições obtidas nos dois parágrafos acima implicam na mesma restrição  $a \leq a_2^*$ . Isto não é coincidência! Esta condição restringe o suporte do subconjunto fuzzy a regiões onde a função  $f_a^2(x)$  é monótona, regiões limitadas pelos sucessivos valores onde ocorrem os mínimos e máximos da função em  $[0, 1]$ . Isto se deve ao fato básico que os extremos relativos de uma função ocorrem quando sua derivada se anula; neste exemplo,  $\frac{d f_a^2}{d x}(x) = 0$ .

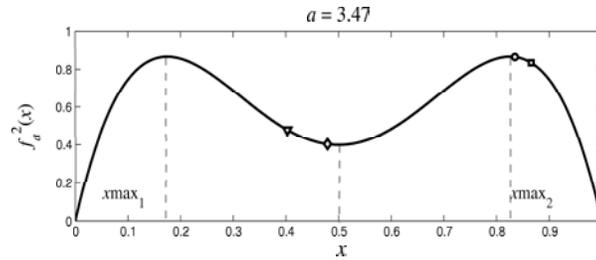


Figura 4: Gráfico de  $f_a^2(x)$  destacando as posições dos pontos do 4-ciclo  $B_2$  em relação aos extremos da função ( $\nabla$ :  $({}^2x_1, {}^2x_2)$ ;  $\diamond$ :  $({}^2x_2, {}^2x_1)$ ;  $\circ$ :  $({}^2x_3, {}^2x_4)$  e  $\square$ :  $({}^2x_4, {}^2x_3)$ ).

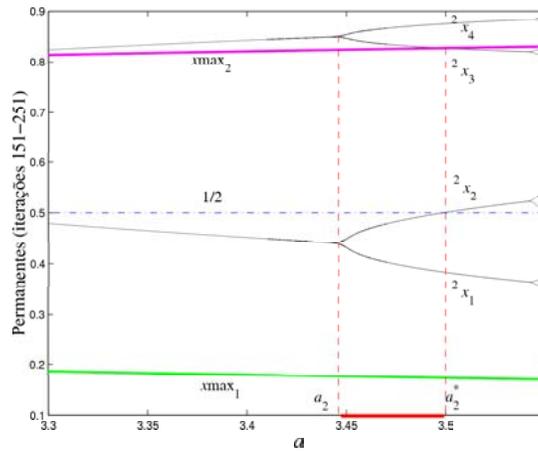


Figura 5: Seção do diagrama de bifurcação do modelo logístico: a abscissa  $x_{\max_2}$  do máximo intercepta o ramo do  ${}^2x_3$  no mesmo valor de  $a$  em que a abscissa do mínimo ( $\frac{1}{2}$ ) intercepta o ramo do  ${}^2x_2$ .

De fato, observamos que sempre ocorre um máximo ou um mínimo relativo da função envolvida  $f_a^{2^{N-1}}$  em  $x = \frac{1}{2}$ . Então, equivalentemente, podemos determinar o intervalo adequado de  $a$  tal que o valor  $\frac{1}{2}$  não pertença ao interior do suporte dos conjuntos

fuzzy que formam o ciclo (figura 5). O subexemplo a seguir ilustra o que acontece quando  $x = \frac{1}{2}$  pertence ao interior do suporte de um destes conjuntos.

Sub-exemplo: Considere  $\tilde{a} = 3.52$  (fora do intervalo de existência do 2-ciclo fuzzy).

Observe o que acontece quando iteramos  $\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}$  por  $\hat{f}_a$ , em termos dos  $\alpha$ -níveis:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) \right]^\alpha &= f_a([{}^2x_1, {}^2x_2]) \\ &= [\min \{f_a(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\}, \max \{f_a(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\}] \\ &= [{}^2x_3, \frac{a}{4}] \end{aligned} \quad (26)$$

ou seja,

$$\hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) = \chi_{[{}^2x_3, \frac{a}{4}]} \quad (27)$$

Iterando novamente, obtemos

$$\hat{f}_a^2(\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]} \quad (28)$$

que é um ponto fixo da equação fuzzy 5 assintoticamente estável para este valor de  $a$  (caso particular de  $u_5$ :  $\tilde{\alpha} = 1$ ).

Para proseguirmos com os resultados, considere a seguinte notação.

Seja  $B_N = \{{}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2N-1}, {}^N x_{2N}\}$ , em ordem crescente, um  $2^N$ -ciclo do modelo 1, assintoticamente estável desde que  $a \in [a_N, a_{N+1}) \subset [3, a^*]$ ,  $N$  natural.

Considere a região  ${}^N R_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 2^N\}$ , limitada por  $a = a_N$ ,  $a = a^*$ ,  $x = {}^N g_i(a)$  e  $x = {}^N h_i(a)$  onde  ${}^N g_i$  e  ${}^N h_i$  são os valores das soluções de  $f_a^{2^N}(x) = x$  que são instáveis em  $[a_N, 4]^1$  de tal forma que  $x = {}^N x_i(a)$  satisfaz  ${}^N g_i(a) < {}^N x_i(a) < {}^N h_i(a)$ . Observe que  ${}^N R_{2^N}$  é limitada por  $x = 1$  no lugar de  $x = {}^N h_i(a)$ . Também, dado  $a$ , denota-se  ${}^N R_i(a) = [{}^N g_i(a), {}^N h_i(a)]$ .

Exemplo: Vamos tomar  $N = 2$ ; notamos que  $f_a^{2^2}(x) = f_a^4(x) = x$  têm como soluções:  $0, {}^2x_1, {}^1x_1, {}^2x_2, {}^0x_1 = x_a, {}^2x_3, {}^1x_2, {}^2x_4$ , em ordem crescente ( $a \in [a_2, 4]$ ).

Os pontos fixos clássicos  $0$  e  $x_a$ , bem como o 2-ciclo clássico  $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$ , são instáveis desde que  $a \in [a_2, 4]$ ; logo, eles limitam as regiões  ${}^2R_1 = (a_2, a^*) \times [0, {}^1x_1]$ ,  ${}^2R_2 = (a_2, a^*) \times [{}^1x_1, {}^0x_1]$ ,  ${}^2R_3 = (a_2, a^*) \times [{}^0x_1, {}^1x_2]$ , e  ${}^2R_4 = (a_2, a^*) \times [{}^1x_2, 1]$  (veja figura 6).

O 4-ciclo clássico  $B_2 = \{{}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3, {}^2x_4\}$  é assintoticamente estável desde que  $a \in [a_2, a_3)$  e instável, caso contrário. Note que  ${}^2x_i \in {}^2R_i(a)$ ,  $a \in [a_2, a^*]$  e  $i = 1, 2, 3, 4$ .

---

<sup>1</sup>Equivalentemente,  ${}^N g_i(a)$  e  ${}^N h_i(a)$  podem ser entendidos também como todas as soluções de  $f_a^{2^N-1}(x) = x$  para  $a \in [a_N, 4]$ .

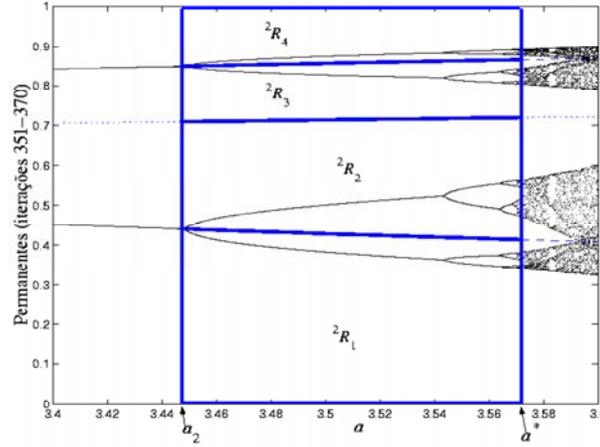


Figura 6: Seção do diagrama de bifurcação do modelo logístico destacando as regiões  ${}^2R_1$ ,  ${}^2R_2$ ,  ${}^2R_3$  e  ${}^2R_4$ .

Os dois primeiros resultados a seguir dizem respeito ao modelo logístico discreto 1; eles auxiliam na demonstração do terceiro resultado, que envolve a equação fuzzy discreto 5.

Observe na figura 5 que quando o 2-ciclo  $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$  perde a estabilidade em  $a_2$ , nasce o 4-ciclo  $B_2 = \{{}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3, {}^2x_4\}$ , de modo que  ${}^1x_1$  dá origem a  ${}^2x_1$  e  ${}^2x_2$  e  ${}^1x_2$  dá origem a  ${}^2x_3$  e  ${}^2x_4$ . De modo geral, quando  $B_{N-1}$  perde a estabilidade em  $a_N$ ,  ${}^{N-1}x_i \in B_{N-1}$  dá origem a  ${}^Nx_{2i-1}, {}^Nx_{2i} \in B_N$ .

**Resultado 1** Para  $N$  natural e  $a \in [a_N, a^*)$ , a equação discreta 1 apresenta um  $2^N$ -ciclo

$$B_N = \{{}^Nx_1, {}^Nx_2, \dots, {}^Nx_{2^N}\},$$

em ordem crescente. Se  $f_a({}^Nx_i) = {}^Nx_j$  ( $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^N\}$ ), então os pontos de um  $2^t$ -ciclo  $B_t$  ( $t$  natural,  $t > N$  e  $a \in [a_t, a^*)$ ) em  ${}^NR_i$  são levados nos pontos do mesmo ciclo  $B_t$  em  ${}^NR_j$ .

Prova:

Esta demonstração é feita por indução em  $N$ .

$N = 1$ :

Neste caso,  $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$  e é óbvio que  $f_a({}^1x_1) = {}^1x_2$  e  $f_a({}^1x_2) = {}^1x_1$ .

A partir de  $a_1$ ,  ${}^0x_1 = x_a = 1 - 1/a$  divide o espaço  $[a_1, a^*) \times [0, 1]$  em duas regiões  ${}^1R_1$  e  ${}^1R_2$ .

Para  $a \in [a_t, a^*)$ ,  $t > 1$ , tem-se um  $2^t$ -ciclo que satisfaz  $f_a^{2^t}(x) = x$  e

$$\underbrace{{}^t x_1 < {}^t x_2 < \dots < {}^t x_{2^{t-1}} < {}^0 x_1 < {}^t x_{2^{t-1}+1} < \dots < {}^t x_{2^t-1} < {}^t x_{2^t}}_{\in {}^1 R_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in {}^1 R_2}. \quad (29)$$

Como  $a > 3$ , tem-se  ${}^0 x_1 > \frac{1}{2}$ ; daí:

$$\frac{1}{2} < {}^0 x_1 < {}^t x_{2^{t-1}+1} < \dots < {}^t x_{2^t-1} < {}^t x_{2^t} \quad (30)$$

e como  $f_a$  é decrescente em  $[\frac{1}{2}, 1]$ , segue que

$$f_a({}^t x_{2^t}) < f_a({}^t x_{2^t-1}) < \dots < f_a({}^t x_{2^{t-1}+1}) < f_a({}^0 x_1) = {}^0 x_1 < f_a\left(\frac{1}{2}\right). \quad (31)$$

Mas  $f_a$  leva pontos do  $2^t$ -ciclo em outros pontos do mesmo ciclo, então, comparando 31 com 29, a única escolha possível é

$$f_a({}^t x_{2^t}) = {}^t x_1; f_a({}^t x_{2^t-1}) = {}^t x_2; \dots; f_a({}^t x_{2^{t-1}+1}) = {}^t x_{2^t-1}. \quad (32)$$

Portanto, a metade dos pontos do  $2^t$ -ciclo que estão em  ${}^1 R_2$  só podem ser levados por  $f_a$  na outra metade dos pontos que estão em  ${}^1 R_1$ . Por conseqüência, também os pontos que estão em  ${}^1 R_1$  só podem ser levados naqueles que estão em  ${}^1 R_2$ , pois não existem repetições no percurso iterativo de um ciclo.

$N > 1$ :

Considere válida a hipótese de indução: “Se  $f_a^{(N-1)}(x_i) = {}^{N-1}x_{\tilde{j}}$  ( $\tilde{i} \neq \tilde{j}$ ,  $\tilde{i}, \tilde{j} \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ ), então os pontos de um  $2^t$ -ciclo  $B_t$  ( $t$  natural,  $t > N - 1$  e  $a \in [a_t, a^*)$ ) em  ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}$  são levados nos pontos do mesmo ciclo  $B_t$  em  ${}^{N-1}R_{\tilde{j}}$ ”.

Em  $a_N$ , a solução  ${}^{N-1}x_{\tilde{i}}$  perde a estabilidade, dando origem a dois novos pontos

$${}^N x_{2\tilde{i}-1} < {}^{N-1} x_{\tilde{i}} < {}^N x_{2\tilde{i}}. \quad (33)$$

A partir de  $a_N$ ,  ${}^{N-1}x_{\tilde{i}}$  é solução instável de  $f_a^{2^N}(x) = x$  e divide a antiga região  ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a) = [{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$  em duas subregiões  ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a) = [{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}x_{\tilde{i}}(a)]$  e  ${}^N R_{2\tilde{i}}(a) = [{}^{N-1}x_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$  tais que  ${}^N x_{2\tilde{i}-1} \in {}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$  e  ${}^N x_{2\tilde{i}} \in {}^N R_{2\tilde{i}}(a)$ .

Igualmente,  ${}^{N-1}x_{\tilde{j}}$  dá origem a dois novos pontos

$${}^N x_{2\tilde{j}-1} < {}^{N-1} x_{\tilde{j}} < {}^N x_{2\tilde{j}} \quad (34)$$

tais que  ${}^N x_{2\tilde{j}-1} \in {}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$  e  ${}^N x_{2\tilde{j}} \in {}^N R_{2\tilde{j}}(a)$ .

Note que, da forma que as regiões foram limitadas, temos exatamente o mesmo número de pontos de  $B_t$  em cada região  ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}$  ( $\tilde{i} \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ ).

**I.** Se  $f_a$  é crescente em  ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$ , então  $f_a({}^N x_{2\tilde{i}-1}) = {}^N x_{2\tilde{j}-1}$  e  $f_a({}^N x_{2\tilde{i}}) = {}^N x_{2\tilde{j}}$ . Também todos os pontos de  $B_t$  em  ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$  e em  ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$  são levados em pontos do mesmo  $2^t$ -ciclo em  ${}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$  e em  ${}^N R_{2\tilde{j}}(a)$ , respectivamente.

**II.** Se  $f_a$  é decrescente em  ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$ , então  $f_a({}^N x_{2\tilde{i}-1}) = {}^N x_{2\tilde{j}}$  e  $f_a({}^N x_{2\tilde{i}}) = {}^N x_{2\tilde{j}-1}$ . Também todos os pontos de  $B_t$  em  ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$  e em  ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$  são levados em pontos do mesmo  $2^t$ -ciclo em  ${}^N R_{2\tilde{j}}(a)$  e em  ${}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$ , respectivamente.

**III.** Suponha  $f_a$  crescente em  $[{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), \frac{1}{2}]$  e decrescente em  $[\frac{1}{2}, {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$ , ou seja,  $\frac{1}{2} \in {}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$  (valor onde ocorre o máximo de  $f_a$ ).

Neste caso,  $f_a$  é monótona em uma das regiões,  ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$  ou  ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$ , e nesta região usamos o mesmo argumento dos itens **I** ou **II** para definir a região para onde os pontos de  $B_t$  são levados por  $f_a$ . Já para a região onde  $f_a$  não é monótona, resta concluir que os pontos de  $B_t$  nela são iterados por  $f_a$  na outra região ainda não atingida (análogo ao que ocorre quando  $N = 1$ ).

Pelos itens anteriores, temos que  $f_a({}^N x_i) = {}^N x_j$  implica que pontos de  $B_t$  em  ${}^N R_i$  são levados por  $f_a$  nos pontos do mesmo ciclo em  ${}^N R_j$ , podendo  $i$  assumir o valor  $2\tilde{i} - 1$  ou  $2\tilde{i}$  (e  $j$ , o correspondente valor dentre  $2\tilde{j} - 1$  e  $2\tilde{j}$ ).

**Resultado 2** Para  $N$  natural e  $a \in [a_N, a^*]$ , a equação discreta 1 apresenta um  $2^N$ -ciclo

$$B_N = \{{}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N}\},$$

em ordem crescente. As condições a seguir são equivalentes:

- (1)  $0 \leq \mu(B_N) \leq 1$ , onde  $\mu(B_N) = f'_a({}^N x_1) \cdot f'_a({}^N x_2) \cdot \dots \cdot f'_a({}^N x_{2^N})$ ;
- (2)  $a \in [a_N, a_N^*] \subset [a_N, a_{N+1}]$ , onde  $a_N^*$  é tal que  $f_{a_N^*}^{2^N}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ;
- (3)  $[{}^N x_1, {}^N x_2] \subset [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\dots$ ,  $[{}^N x_{2^{i-1}}, {}^N x_{2^i}] \subset [0, \frac{1}{2}]$  e  $[{}^N x_{2^{i+1}}, {}^N x_{2^{i+2}}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\dots$ ,  $[{}^N x_{2^{N-1}}, {}^N x_{2^N}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ .

Prova:

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

Sabe-se que  $\mu(B_N)$  é monótona decrescente em  $[a_N, a_{N+1}]$ , variando a partir de 1 até  $-1$ . Se  $a_N^*$  denota o valor de  $a$  tal que  $\mu(B_N) = 0$ , tem-se imediatamente que  $0 \leq \mu(B_N) \leq 1 \Leftrightarrow a \in [a_N, a_N^*]$  (conforme ilustrado na figura 7). E ainda, em  $a = a_N^*$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mu(B_N) &= f'_{a_N^*}({}^N x_1) \cdot f'_{a_N^*}({}^N x_2) \cdot \dots \cdot f'_{a_N^*}({}^N x_{2^N}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_1) \cdot a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_2) \cdot \dots \cdot a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_{2^N}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}^N x_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } {}^N x_2 = \frac{1}{2} \text{ ou } \dots \text{ ou } {}^N x_{2^N} = \frac{1}{2} \\
& \iff \\
& \frac{1}{2} \in B_N \text{ ou } f_{a_N^*}^{2^N} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

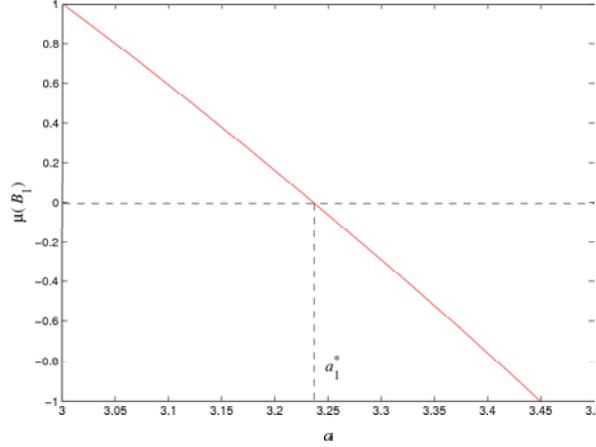


Figura 7: Função  $\mu(B_1)$ :  $a_1^*$  é o valor do parâmetro  $a$  quando  $\mu(B_1) = 0$  ou  $f_{a_1^*}^{2^N} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ .

$$(2) \Leftrightarrow (3)$$

Observe na figura 8 as duas únicas possibilidades: na primeira, o ramo do  ${}^N x_{2^{i+1}}$  decresce interceptando o  $\frac{1}{2}$  quando  $a = a_N^*$  (8 A) e na segunda, o ramo do  ${}^N x_{2^i}$  cresce interceptando o  $\frac{1}{2}$  quando  $a = a_N^*$  (8 B). O resultado segue imediatamente.

Como  $f_a$  é monótona crescente em  $[0, \frac{1}{2}]$  e monótona decrescente em  $[\frac{1}{2}, 1]$ , (3) equivale dizer que  $f_a$  é monótona em  $[{}^N x_{2^{i-1}}, {}^N x_{2^i}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^{N-1}$ .

**Resultado 3** Para  $N$  natural e  $a \in [a_N, a_N^*]$ , a equação fuzzy discreta 5 apresenta um  $2^{N-1}$ -ciclo fuzzy

$$\hat{B}_N = \left\{ \chi[{}^N x_1, {}^N x_2], \chi[{}^N x_3, {}^N x_4], \dots, \chi[{}^N x_{2^{N-1}}, {}^N x_{2^N}] \right\};$$

que satisfaz  $\hat{f}_a^{2^{N-1}}(u) = u$ , onde  $B_N = \{{}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N}\}$  é o  $2^N$ -ciclo clássico assintoticamente estável em  $a \in [a_N, a_{N+1})$  ( $a_N^* < a_{N+1}$ ).

Prova:

Inicialmente, observe que os pontos do  $2^{N-1}$ -ciclo clássico  $B_{N-1} = \{{}^{N-1} x_1, {}^{N-1} x_2, \dots, {}^{N-1} x_{2^{N-1}}\}$  obedecem à seguinte ordem iterativa  $f_a({}^{N-1} x_{i_k}) = {}^{N-1} x_{i_{k+1}}$ , onde  $i_k$  assume o valor apropriado no conjunto  $\{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ , para  $k \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$  e

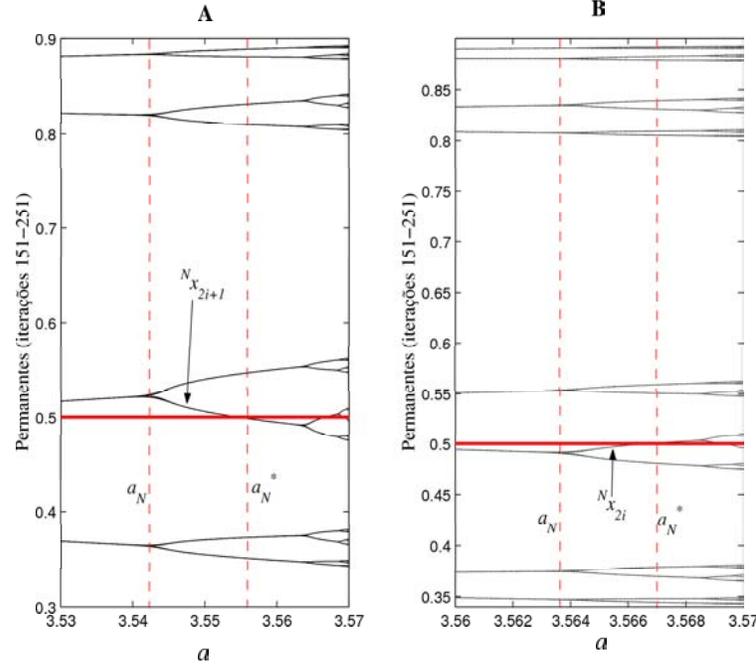


Figura 8: **A.** Seção do diagrama de bifurcação destacando o 8-ciclo  $B_3$ : no intervalo  $[a_3, a_3^*]$  temos  $[{}^3x_1, {}^3x_2] \subset [0, \frac{1}{2}]$  e  $[{}^3x_3, {}^3x_4], [{}^3x_5, {}^3x_6], [{}^3x_7, {}^3x_8] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ ; **B.** Seção do diagrama de bifurcação destacando o 16-ciclo  $B_4$ : no intervalo  $[a_4, a_4^*]$  temos  $[{}^4x_1, {}^4x_2], [{}^4x_3, {}^4x_4], [{}^4x_5, {}^4x_6] \subset [0, \frac{1}{2}]$  e  $[{}^4x_7, {}^4x_8], \dots, [{}^4x_{15}, {}^4x_{16}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ .

$i_{2^{N-1}+1} = i_1$ . Pelo resultado 1, os pontos de um  $2^t$ -ciclo  $B_t$  ( $t$  natural,  $t > N - 1$  e  $a \in [a_t, a_t^*)$ ) em  ${}^{N-1}R_{i_k}$  são levados nos pontos do mesmo ciclo  $B_t$  em  ${}^{N-1}R_{i_{k+1}}$ .

**I.** Demonstração que  $\hat{B}_N$  é um  $2^{N-1}$ -ciclo fuzzy.

Temos que mostrar que, escolhido um subconjunto fuzzy  $u$  em  $\hat{B}_N$ , ele deve satisfazer  $\hat{f}_a^{2^{N-1}}(u) = u$  e que a cada iteração por  $\hat{f}_a$  se percorre um outro subconjunto fuzzy em  $\hat{B}_N$  (sem repetições) até que, após  $2^{N-1}$  iterações, retorna-se ao subconjunto original.

Seja  $\chi_{[{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}]}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ , um subconjunto fuzzy arbitrário em  $\hat{B}_N$ . Vamos calcular  $\hat{f}_a(\chi_{[{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}]})$  usando a formalização de  $\alpha$ -níveis; como  $f_a$  é contínua tem-se

$$\left[ \hat{f}_a \left( \chi_{[{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}]} \right) \right]^\alpha = f_a \left( [{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}] \right). \quad (35)$$

Do resultado 2, se  $a \in [a_N, a_N^*]$  então  $f_a$  é monótona em  $[{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}]$  e

$$f_a \left( [{}^N x_{2i_{k-1}}, {}^N x_{2i_k}] \right) = [\min, \max], \quad (36)$$

onde

$$\min = \min \{f_a({}^N x_{2i_k-1}), f_a({}^N x_{2i_k})\}$$

e

$$\max = \max \{f_a({}^N x_{2i_k-1}), f_a({}^N x_{2i_k})\}.$$

Mas  ${}^N x_{2i_k-1}$  e  ${}^N x_{2i_k}$  são os únicos pontos de  $B_N$  em  ${}^{N-1}R_{i_k}(a)$  e, pelo resultado 1, são levados por  $f_a$  nos únicos pontos de  $B_N$  em  ${}^{N-1}R_{i_{k+1}}(a)$  que são  ${}^N x_{2i_{k+1}-1}$  e  ${}^N x_{2i_{k+1}}$ . Daí:

$$f_a([{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]) = [{}^N x_{2i_{k+1}-1}, {}^N x_{2i_{k+1}}]. \quad (37)$$

ou

$$\hat{f}_a(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]}) = \chi_{[{}^N x_{2i_{k+1}-1}, {}^N x_{2i_{k+1}}]}. \quad (38)$$

Após  $L$  iterações,  $L \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ , tem-se

$$\hat{f}_a^L(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]}) = \chi_{[{}^N x_{2i_{k+L}-1}, {}^N x_{2i_{k+L}}]}; \quad (39)$$

o ciclo recomeça quando  $L = 2^{N-1}$ .

## II. Demonstração que $\hat{B}_N$ é um $2^{N-1}$ -ciclo fuzzy estável.

Vamos utilizar o corolário 1. Para facilitar a notação utilizamos  $F = f_a^{2^{N-1}}$  e destacamos que  $\hat{F}(u) = \widehat{f_a^{2^{N-1}}}(u) = \hat{f}_a^{2^{N-1}}(u)$  (do teorema 2).

Seja  $\bar{u} = \chi_{[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ , tal que  $\hat{F}(\bar{u}) = \bar{u}$ .

**II. a)** Suponha  $f_a$  crescente em  $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$ ; neste caso,  $F$  também é crescente.

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $t \geq 0$ ; tome  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que

$$\begin{aligned} F^t(x) \in ({}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i-1}) & \quad \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i-1}) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i} - \varepsilon, {}^N x_{2i}) & \quad \text{se } x \in ({}^N x_{2i} - \delta, {}^N x_{2i}) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \varepsilon) & \quad \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \delta) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \varepsilon) & \quad \text{se } x \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \delta) \end{aligned} \quad (40)$$

Como

$$\begin{aligned} F^t([{}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i} + \delta]) & = [F^t({}^N x_{2i-1} - \delta), F^t({}^N x_{2i} + \delta)] \\ & \subset [{}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i} + \varepsilon] \end{aligned} \quad (41)$$

segue que, para um subconjunto fuzzy arbitrário  $u$ ,

$$F^t([u]^0) \subset B([\bar{u}]^0, \varepsilon) \quad \text{desde que } [u]^0 \subset B([\bar{u}]^0, \delta). \quad (42)$$

Por outro lado,

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t ({}^N x_{2i-1} + \delta) - \varepsilon, F^t ({}^N x_{2i} - \delta) + \varepsilon] \quad (43)$$

ou seja

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset B (F^t ([{}^N x_{2i-1} + \delta, {}^N x_{2i} - \delta]), \varepsilon) \quad (44)$$

e ainda

$$[\bar{u}]^0 \subset B (F^t ([u]^1), \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [\bar{u}]^0 \subset B([u]^1, \delta) \quad . \quad (45)$$

De 42 e 45, e de acordo com o corolário 1, segue que  $\bar{u}$  é estável.

**II. b)** Suponha  $f_a$  decrescente em  $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$ .

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $t \geq 0$ . Se  $t$  é par, tome  $0 < \delta_1 < \varepsilon$  tal que 40 seja satisfeita (com  $\delta_1$  no lugar de  $\delta$ ).

Se  $t$  é ímpar, tome  $0 < \delta_2 < \varepsilon$  tal que

$$\begin{aligned} F^t(x) \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \varepsilon) & \quad \text{se} \quad x \in ({}^N x_{2i-1} - \delta_2, {}^N x_{2i-1}) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \varepsilon) & \quad \text{se} \quad x \in ({}^N x_{2i} - \delta_2, {}^N x_{2i}) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i} - \varepsilon, {}^N x_{2i}) & \quad \text{se} \quad x \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \delta_2) \\ F^t(x) \in ({}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i-1}) & \quad \text{se} \quad x \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \delta_2) \end{aligned} \quad (46)$$

Seja  $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Como

$$\begin{aligned} F^t ([{}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i} + \delta]) &= \begin{cases} [F^t ({}^N x_{2i-1} - \delta), F^t ({}^N x_{2i} + \delta)] & \text{se } t \text{ é par} \\ [F^t ({}^N x_{2i} + \delta), F^t ({}^N x_{2i-1} - \delta)] & \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &\subset [{}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i} + \varepsilon] \end{aligned} \quad (47)$$

segue que, para um subconjunto fuzzy arbitrário  $u$ ,

$$F^t ([u]^0) \subset B ([\bar{u}]^0, \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [u]^0 \subset B([\bar{u}]^0, \delta) \quad . \quad (48)$$

Por outro lado, se  $t$  é par

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t ({}^N x_{2i-1} + \delta) - \varepsilon, F^t ({}^N x_{2i} - \delta) + \varepsilon]$$

e se  $t$  é ímpar

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t ({}^N x_{2i} - \delta) - \varepsilon, F^t ({}^N x_{2i-1} + \delta) + \varepsilon]$$

ou seja

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset B (F^t ([{}^N x_{2i-1} + \delta, {}^N x_{2i} - \delta]), \varepsilon) \quad (49)$$

e ainda

$$[\bar{u}]^0 \subset B(F^n([u]^1), \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [\bar{u}]^0 \subset B([u]^1, \delta) \quad . \quad (50)$$

De 48 e 50, e de acordo com o corolário 1, segue que  $\bar{u}$  é estável.

**III.** Demonstração que  $\hat{B}_N$  é um  $2^{N-1}$ -ciclo fuzzy assintoticamente estável, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$ .

**III. a)** Suponha  $f_a$  crescente em  $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$ .

Existem  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$  se  $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$  se  $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_2$ .

Tome  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , usando os argumentos da parte **II. a)**, podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$  se  $u \in B(\bar{u}, r)$ .

**III. b)** Suponha  $f_a$  decrescente em  $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$ .

Se  $t$  é par, existem  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$  se  $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$  se  $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_2$ .

Se  $t$  é ímpar, existem  $r_3 > 0$  e  $r_4 > 0$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$  se  $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_3$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$  se  $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_4$ .

Tome  $r = \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ , usando os argumentos da parte **II. b)**, podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$  se  $u \in B(\bar{u}, r)$ .

De **II** e **III** temos que  $\bar{u}$  é assintoticamente estável.

## Agradecimentos

Karine F. Magnago agradece a CNPq pelo fomento.

## Referências

- Ahmed, E. e Hegazi, A. S. (2001). On same variats of dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12:2103–2108.
- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (1997). On the continuity of zadeh's extension. in "Seventh IFSA World Congress", Vol. II, Praga.
- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (2000). Fuzzy modelling in population dynamics. *Ecological Modelling*, 128:27–33.

- Bassanezi, R. C., Barros, L. C., e Tonelli, P. A. (2000). Attractors and asymptotic stability for fuzzy dynamical systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 113:473–483.
- Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Publishing Company, California.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical biology*, volume 19 of *Biomathematics Texts*. Springer-Verlag, Berlin.
- Rohde, K. e Rohde, P. P. (2001). Fuzzy chaos: Reduced chaos in the combined dynamics of several independently chaotic population. *American Naturalist*, 158:553–556. no. 5.
- Sharkovskii, A. N., Maistrenko, Y. L., e Romanenko, E. Y. (1993). *Difference equations and their applications*. Mathematics and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, London.

