BIOMATEMÁTICA 14 (2004), 29-38 *ISSN 1679-365X*
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Um Modelo Fuzzy Presa-Predador em Citros: pulgões e joaninhas

Magda S. Peixoto[1], Laécio C. Barros[2], Rodney C. Bassanezi[3],
DMA, IMECC-UNICAMP, 13.083-970 - Campinas, SP.

Resumo. Neste trabalho utilizamos sistemas fuzzy, baseados em regras lingüísticas, para elaborar um modelo do tipo presa-predador e estudar a interação de pulgões (presas) e joaninhas na citricultura em que os pulgões são considerados agentes transmissores da Morte Súbita dos Citros (doença causada por vírus). Simulações foram feitas e um gráfico das populações de presa e de potencialidade dos predadores é mostrado, bem como um diagrama de fase.

Palavras-chave: *regras fuzzy; morte súbita dos citros; presa-predador.*

1 Introdução

A Morte Súbita dos Citros (MSC) é uma doença que tem afetado e matado plantas do sul do Triângulo Mineiro e norte do Estado de São Paulo. Recebeu este nome devido a rapidez com que as árvores cítricas morrem. É uma nova doença que vem afetando, principalmente, laranjeiras-doces enxertadas em limão "Cravo". A MSC consiste no entupimento do floema, vasos que conduzem nutrientes e água da raiz para a copa, causando uma espécie de "infarto". Seu avanço tem sido bastante rápido, de acordo com levantamento do Fundo de Defesa da Citricultura (Fundecitrus) (Bassanezi et al., 2003).

Pesquisadores da Alellyx Genomics descobriram dois insetos conhecidos como pulgões que transmitem o vírus suspeito de ser o responsável pela MSC. (Pesquisa FAPESP, maio/04, pag. 59)

A dispersão destes insetos se dá através do vento. Isto nos fez supor que espaço percorrido, r, pelo vetor que dissemina a doença é proporcional a intensidade dos ventos, v, e sua direção. Como as informações obtidas para v e r são do tipo lingüística, optamos

[1]magda@ime.unicamp.br
[2]laeciocb@ime.unicamp.br
[3]rodney@ime.unicamp.br

pela **teoria dos conjuntos fuzzy** para estabelecer a relação entre estas duas variáveis (Peixoto et al., 2004).

Dentre os predadores mais conhecidos em citros, as joaninhas, pertencentes à Ordem Coleoptera e Família Coccinelidae, são importantes agentes de controle biológico, pois se alimentam de pulgões. A ocorrência constante de larvas e adultos de joaninhas é importante no controle dos pulgões. Cada larva desses predadores pode consumir até 200 pulgões/dia e os adultos predam uma média de 20 pulgões/dia (Gravena, 1983).

Nosso interesse aqui é estudar a dinâmica das populações de joaninhas (predadores) e pulgões (presas) a fim de indicar alguma política de controle dos pulgões e, consequentemente da MSC.

Podemos considerar que os predadores são diferenciados de acordo com sua força de predação. As variáveis de estado são quantidade de presas e potencialidade dos predadores.

A partir destas informações, adotamos um modelo Presa-Predador fuzzy para estudar a interação entre pulgões e seu inimigo natural. O Modelo Presa-Predador Fuzzy utiliza uma **base de regras fuzzy** para estabelecer a dinâmica da relação presa-predador.

Temos então como objetivo: utilizar controladores fuzzy para modelar as variáveis x, x', Py, Py', que representam quantidade de presas, variação da quantidade de presas, potencial de predação e variação do potencial de predação, respectivamente .

2 Descrição do Modelo Presa-Predador

Os modelos matemáticos que descrevem relações entre presa e predador são utilizados para o estudo de interações que ocorrem entre duas populações nas quais uma delas depende da outra para se alimentar e sobreviver. Tais relações dinâmicas entre presas e predadores são temas de destaque em ecologia. Por volta de 1925 Lotka e Volterra desenvolveram um dos modelos matemáticos de mais largo uso e destacada importância para este tipo de relação, conhecido como Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra (Edelstein-Keshet, 1987).

O modelo presa-predador clássico de Lotka-Volterra pressupõe que tanto as presas como os predadores estão distribuídos uniformemente num mesmo habitat. Ou seja, todos os predadores têm a mesma chance de encontrar e comer cada presa. O modelo determinístico de Lotka-Volterra, que se tornou um paradigma, admite que as presas crescem exponencialmente na ausência dos predadores e que a taxa de mortalidade dos predadores, na ausência das presas, é proporcional a sua população $y(t)$ em cada instante (morte por falta de alimento). Pressupõe também que a população de predadores é favorecida pela abundância de presas, enquanto a de presas é desfavorecida pelo aumento de predadores (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978). Estas hipóteses são resumidas nas equações

(2.1), denominadas Modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} &= -by + \beta xy \end{cases} \tag{1}$$

As variáveis de estado x e y são, respectivamente, a quantidade de presas e de predadores em cada instante t. Os parâmetros são:

- a: taxa de crescimento relativo das presas;
- α : taxa de predação (probabilidade de um predador matar a presa em cada encontro entre eles);
- b : taxa de mortalidade de predadores na ausência de presas;
- β : taxa de "conversão" de presas em predadores.

É de nosso interesse levar em conta as particularidades de nossos dados e informações de especialistas onde, por exemplo, a "qualidade" dos predadores é de fundamental importância.

As joaninhas somente predam pulgões enquanto larvas e adultos , sendo que, cada larva desses predadores pode consumir até 200 pulgões/dia e os adultos predam uma média de 20 pulgões/dia (Gravena, 1983). Já os pulgões são predados por seus inimigos independentemente da fase da vida (Braga e Silva, 1999).

Assim, a população das presas (pulgões) não será subdividida, já que a qualidade de ser presa independe de seu tempo de vida para classificá-los quanto a facilidade de fuga dos seus predadores. Já a população de predadores será composta de larvas e adultos e daí devemos distinguir no modelo estas subpopulações com suas particularidades no presa-predador (nesse sentido, podemos dizer que este modelo é uma extensão do modelo Lotka-Volterra).

De acordo com a informação acima, podemos considerar que os predadores são diferenciados de acordo com sua força de predação, segundo uma função de pertinência à classe dos predadores como,

$$P_{y_i} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \text{larva;} \\ 0.1, & \text{se} \quad \text{adulto} \end{cases}$$

e o **potencial de predação** de uma população de predadores como sendo $P_y = p_1 + 0.1 * p_2$, onde p_1 é a quantidade de larvas desta população, p_2 é a população de adultos.

As variáveis de estado são portanto, quantidade de presas e potencialidade dos predadores. Adotamos uma **base de regras fuzzy** para modelar a dinâmica entre as presas e os predadores, a fim de estudar a evolução destas populações no ambiente.

Queremos ressaltar que o modelo de Lotka-Volterra (2.1) poderia ser adaptado para o nosso caso, subdividindo a classe dos predadores em dois compartimentos. Isto tornaria o modelo mais complexo, pois deveria aparecer uma equação diferencial para a população de larvas e outra para a de adultos. Pensando num modelo mais geral, no sentido que as subdivisões da classe dos predadores aumentasse indefinidamente, optamos por um modelo baseado em regras fuzzy em vez de adaptação do modelo do tipo (2.1) que passaria a ter muitas equações aumentando consideravelmente a complexidade para um tratamento matemático.

3 Sistema baseado em Regras Fuzzy

O marco inicial da teoria fuzzy foi o artigo publicado pelo matemático Lotfi Asker Zadeh (1965), professor no departamento de engenharia elétrica e ciências da computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley, com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos lingüísticos subjetivos. Esse seria o primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas. A idéia de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos criando a noção de grau de pertinência. Um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Para modelar matematicamente o tal "conjunto", Zadeh propôs o conceito de conjunto fuzzy.

Basicamente, um sistema baseado em regras fuzzy possui quatro componentes: um processador de entrada (ou fuzzificador), um conjunto de regras linguísticas, um método de inferência fuzzy e um processador de saída (ou defuzzificador), gerando um número real como saída (Ribacionka, 1999). A figura 1 ilustra um sistema fuzzy.

No esquema acima a base de conhecimentos é traduzida por um conjunto de regras fuzzy as quais desempenham o papel de uma função matemática. No nosso caso, o lado direito das equações do tipo (2.1).

Com o auxílo de especialistas da área de biologia, obtemos a seguinte base de regras fuzzy:

1. *If (x is baixa) and (Py is baixa) then (xlinha is aumenta)(Pylinha is diminui)*
2. *If (x is media1) and (Py is baixa) then (xlinha is aumentamuito)(Pylinha is diminuipouco)*
3. *If (x is media2) and (Py is baixa) then (xlinha is aumentamuito)(Pylinha is aumentapouco)*
4. *If (x is alta) and (Py is baixa) then (xlinha is aumenta)(Pylinha is aumenta)*
5. *If (x is alta) and (Py is media1) then (xlinha is aumentapouco)(Pylinha is aumentamuito)*
6. *If (x is alta) and (Py is media2) then (xlinha is diminuipouco)(Pylinha is aumentamuito)*
7. *If (x is alta) and (Py is alta) then (xlinha is diminui)(Pylinha is aumenta)*

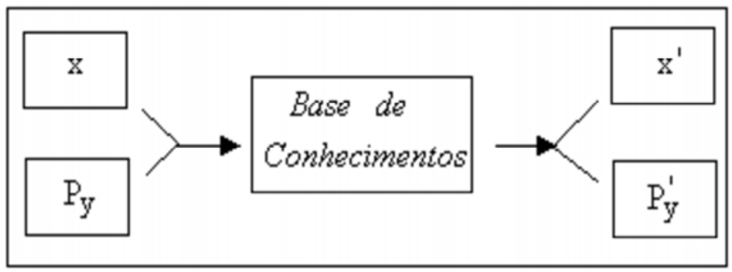

Figura 1: Sistema baseado em Regras Fuzzy.

8. *If (x is media2) and (Py is alta) then (xlinha is diminuimuito)(Pylinha is aumentapouco)*
9. *If (x is media1) and (Py is alta) then (xlinha is diminuimuito)(Pylinha is diminuipouco)*
10. *If (x is baixa) and (Py is alta) then (xlinha is diminui)(Pylinha is diminui)*
11. *If (x is baixa) and (Py is media2) then (xlinha is diminuipouco)(Pylinha is diminuimuito)*
12. *If (x is baixa) and (Py is media1) then (xlinha is aumentapouco)(Pylinha is diminuimuito*
13. *If (x is media1) and (Py is media1) then (xlinha is aumentapouco)(Pylinha is diminuipouco)*
14. *If (x is media2) and (Py is media1) then (xlinha is aumentapouco)(Pylinha is aumentapouco)*
15. *If (x is media2) and (Py is media2) then (xlinha is diminuipouco)(Pylinha is aumentapouco)*
16. *If (x is media1) and (Py is media2) then (xlinha is diminuipouco)(Pylinha is diminuipouco)*

Agora cada um dos adjetivos “baixa”, “alta”, são modelados matematicamente por um conjunto fuzzy através de sua função de pertinênica (u) que também é obtida junto aos especialistas. Para o nosso caso as funções de pertinências são do tipo triangulares (Figuras 2 e 3).

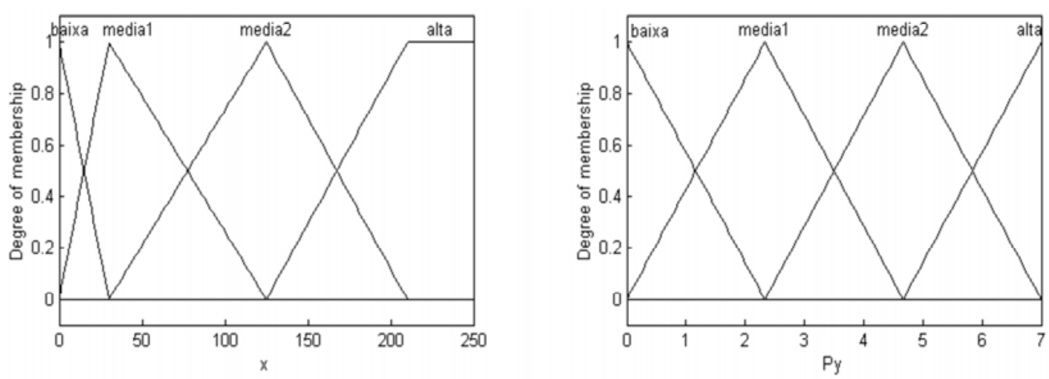

Figura 2: x e P_y são as variáveis de entrada.

O Método de Inferência de Mamdani (Pedrycz e Gomide, 1998) agrega as regras através do operador lógico OU, que é modelado pelo operador máximo ($\vee$) e, em cada

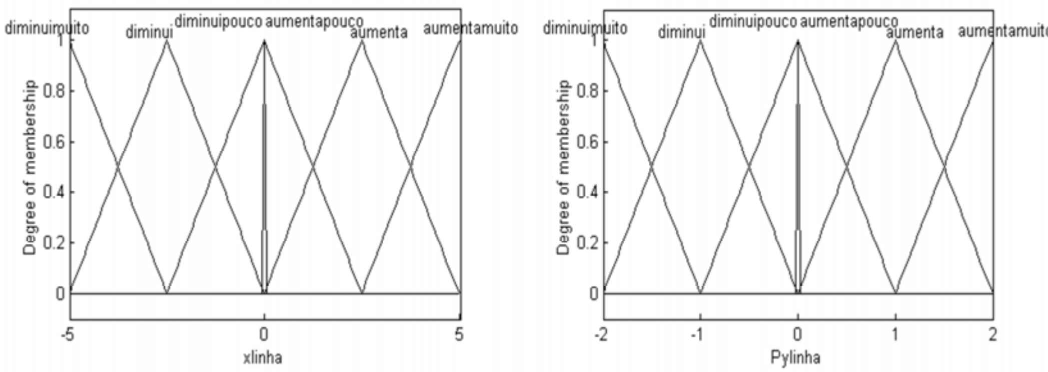

Figura 3: $xlinha$ e $P_y linha$ são as variáveis de saída.

regra, os operadores lógicos E e ENTÃO são modelados pelo operador mínimo ($\wedge$). Para ilustrar o método vamos usar apenas duas regras genéricas, do tipo daquelas que aparecem em nossa base de regras, cada uma com duas entradas e uma saída (Figura 4).

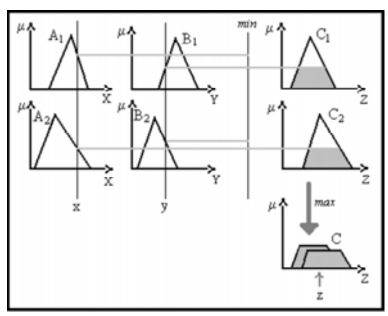

Figura 4: Método de Inferência de Mamdani

A saída geral, $\bar{z}$, do método é dada pela defuzzificação da saída fuzzy obtida a partir dos operadores lógicos descritos acima. No nosso caso usamos a defuzzificação do Centro de Gravidade dado por

$$\bar{z} = \frac{\displaystyle\int zu(z)dz}{\displaystyle\int u(z)dz}$$

e obtemos as seguintes superfícies como soluções do sistema:

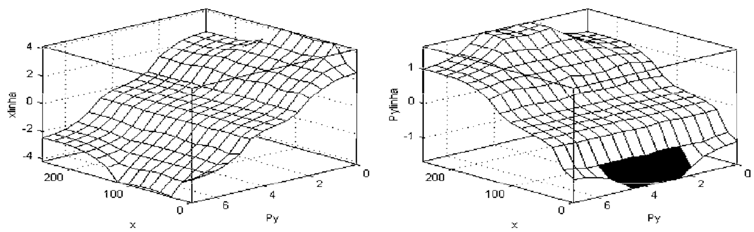

Figura 5: $xlinha = xlinha(x, P_y), P_ylinha = P_ylinha(x, P_y)$

4 Resultados

Nas simulações numéricas realizadas procuramos observar a variação da quantidade de presas e do potencial de predação. Para isso consideramos a quantidade média de pulgões e joaninhas em um ramo de uma laranjeira. Iniciamos as simulações com um número inicial x_0 de pulgões e um número inicial P_{y0} de potencial de predação em um ramo da árvore, escolhido aleatoriamente. Daí, obtemos os valores das variações de x e P_y, ou seja, x' e P_y'. A partir destes dois últimos valores, para obter x e P_y em cada iteração fizemos:

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) & = & x(t_i) + \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)dt \\ P_y(t_{i+1}) & = & P_y(t_i) + \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_y'(t)dt \end{cases} \tag{2}$$

Para resolver a integral acima utilizamos a Regra dos Trapézios, já que o sistema fuzzy fornece x' em cada iteração t_i. Assim o sistema (4.1) passa a ser:

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) & = & x(t_i) + \dfrac{1}{2}[x'(t_{i+1}) + x'(t_i)] \\ P_y(t_{i+1}) & = & P_y(t_i) + \dfrac{1}{2}[P_y'(t_{i+1}) + P_y'(t_i)] \end{cases} \tag{3}$$

Agora utilizando (4.2) e sendo $t_{i+1} = t_0 + i$ e $t_0 = 0$, obtemos os valores de x e P_y, e assim sucessivamente.

A evolução dos contingentes populacionais de presas e potencial de predação obtidas a partir de (4.2) ao longo do tempo para o modelo fuzzy está representada na Figura 6.

Construímos também um plano de fase para nosso modelo, o qual está ilustrado na Figura 7 abaixo.

Queremos ressaltar que mesmo sem equação, conseguimos um plano de fase que, a primeira vista, mantém uma certa periodicidade (embora a trajetória não seja fechada),

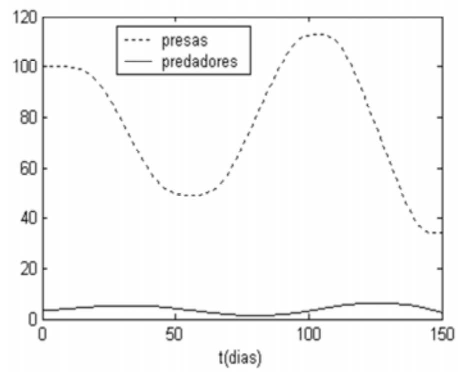

Figura 6: Evolução dos contigentes populacionais ao longo do tempo do modelo fuzzy para $x_0 = 100$ e $P_{y0} = 3.2$

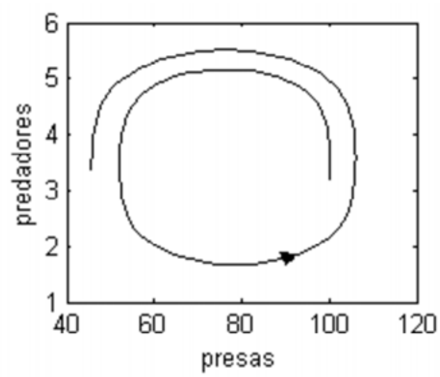

Figura 7: Plano de fase

característica central dos modelos presa-predador.Isto nos faz acreditar que estamos no caminho certo para investigar um modelo evolutivo em que a complexidade na interação entre presas e predadores não pode ser representada explicitamente por uma função matemática.

Agradecimentos

Aos professores Arício Xavier Linhares (IB/UNICAMP) e Carlos Roberto Sousa e Silva (UFSCar) pela cooperação para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq, ógão financiador deste projeto de pesquisa.

Referências

Bassanezi, R. B., Bergamin, A., Amorim, L., Gimenes-Fernandes, N., Gottwald, T. R., e Bov L., J. M. (2003). Spatial and temporal analyses of citrus sudden death as a tool to generate hypotheses concerning its etiology. *Phytopathologica*, 93:502–512.

Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.

Braga, A. e Silva, C. R. S. (1999). Af deos de citros (citrus sinensis) e seus predadores na regi o de s o carlos-sp. Monografia, Universidade Federal de S o Carlos, SP (dispon vel em http://sites.uol.com.br/fribacio).

Edelstein-Keshet, L. (1987). *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill, Inc.

Gravena, S. (1983). O controle biol gico na cultura algodoeira. *Informe Agropecu rio*, 9:3–15.

Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. Massachusetts Institute of Technology.

Peixoto, M. S., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2004). A model of cellular automata for the geographic scattering of the citrus sudden death using the fuzzy parameter. *Proceedings of the Third Brazilizn Symposium on Mathematical and Computational Biology*, 1:208–223.

Ribacionka, F. (1999). Sistemas computacionais baseados em l gica fuzzy. Disserta o de Mestrado, Universidade Mackenzie, S o Paulo, SP.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Informat. Control*, 8:338–353.