

# Estudo matemático da propagação de uma doença de transmissão indireta

Norberto Aníbal Maidana<sup>1</sup>,

Wilson C. Ferreira Jr<sup>2</sup>

IMECC – Unicamp, Cx.Postal 6065, 13.083-970, Campinas/SP.

## 1 Introdução

O estudo da propagação de uma espécie alienígena introduzida em um meio foi amplamente desenvolvido depois da apresentação de Fisher [1] do modelo para a propagação de um gene mutante.

No livro de J.D.Murray[2] pode-se encontrar um amplo desenvolvimento destas questões.

No artigo de Murray et al [3] encontra-se uma aplicação à propagação da raiva em raposas e o resultado obtido aqui é a propagação da doença em forma de onda viajante.

Seguindo as idéias apresentadas nestes trabalhos estudamos a doença, o mal das cadeiras, que afeta as capivaras que habitam no Estero del Iberá, Corrientes, Argentina. Estudamos o modelo simplificado do proposto em [4]. Desconsideramos as morte, por causas diferentes da enfermidade, das capivaras e dos insetos. Isto acarretara a colonização total da área pelos insetos portadores do protozoário causador da enfermidade. O modelo é o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_1 SP - \gamma I, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \alpha_N \Delta N + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha_N \Delta P + \beta_2 NI,\end{aligned}$$

onde  $\alpha_S, \alpha_I, \alpha_N$  são os coeficientes de difusão das capivaras sadias, infetadas e dos insetos respetivamente,  $\lambda_S, \lambda_N$  são as taxas de reprodução para capivaras e insetos respetivamente.

<sup>1</sup>Supported by PhD grant from CAPES. e-mail: nmaidana@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>e-mail: wilson@ime.unicamp.br

$\beta_1$  e  $\beta_2$  as taxas de transmissão da doença.  $\gamma$  é a taxa de mortalidade por doença nas capivaras infetadas.

Calculamos a velocidade de propagação da doença e realizamos gráficos para determinar a influência nesta propagação de cada parâmetro.

Utilizamos o modelo simplificado pois nele conseguimos realizar todos os cálculos analíticos em forma geral e não necessitamos calcular para parâmetros específicos. O método utilizado é primeiro reduzir a quantidade de parâmetros para uma melhor compreensão dos efeitos destes nas simulações. Obter soluções invariantes no espaço e no tempo, isto nos dá pontos de equilíbrio. Analisar a estabilidade linear destes pontos, pois estados instáveis podem ser modificados por pequenas perturbações e tender a um estado estável.

Analizamos a possibilidade de existência de soluções do tipo onda viajante, realizando a análise linear da EDO associada à EDP original. Desta análise determinamos a velocidade de propagação da doença, calculado no ponto de equilíbrio trivial, e as possibilidades de existência da onda, calculada no ponto não trivial. Utilizamos os Softwares Mathematica e Matlab para a simulação numérica das soluções.

## 2 Modelo

No modelo consideramos duas espécies: as capivaras e os insetos, onde cada uma se divide em duas categorias. As capivaras em sadias  $S$  e infectadas  $I$ , e os insetos em portadores  $P$  e não portadores  $N$ .

As espécies interagem da seguinte maneira:

- i) Uma capivara sadia torna-se infetada quando é picada por um inseto portador;
- ii) Um inseto não portador, torna-se portador quando pica uma capivara infetada. Estes dois itens caracterizam a *transmissão indireta*.
- iii) A difusão é a mesma nas duas classes de insetos. Nas capivaras não é considerada por ser muito menor que a dos insetos. Não consideramos transporte para nenhum dos compartimentos.
- iv) A dinâmica vital é dada, tanto nos insetos, como nas capivaras, por uma função logística.
- v) Consideramos somente  $\gamma$  morte devida à infecção.

O modelo matemático é dado pelo seguinte sistema de EDPs:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_1 SP - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_2 NI. \quad (4)$$

onde:

S  $\equiv$  Densidade populacional de Capivaras Sadias

I  $\equiv$  Densidade populacional de Capivaras Infetadas

N  $\equiv$  Densidade populacional de Insetos Não Portadores

P  $\equiv$  Densidade populacional de Insetos Portadores

Este modelo é uma simplificação do proposto em [4], em dimensão 1.

### Adimensionalização

Realizamos a seguinte adimensionalização: as populações são divididas por sua capacidade de suporte, o tempo é medido em função da taxa de crescimento da população de capivaras e no espaço consideramos como o parâmetro da difusão dos insetos.

$$N^* = \frac{N}{K_2}, P^* = \frac{P}{K_2}, S^* = \frac{S}{K_1}, I^* = \frac{I}{K_1},$$

$$t^* = \lambda_S t, \quad x^* = x \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}, \quad a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}, \quad b = \frac{K_1 \beta_2}{\lambda_S},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_N}{\lambda_S}, \quad \eta = \frac{\gamma}{\lambda_S}.$$

### Modelo adimensionalizado

Retirando os asteriscos para simplificar a notação, da mudança proposta acima obtemos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S(1 - (S + I)) - aSP \quad (5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = aSP - \eta I \quad (6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + bNI \quad (8)$$

### 3 Dinâmica do sistema homogêneo

Analizamos aqui a dinâmica do sistema homogêneo, procurando soluções que não dependem do espaço e tempo (pontos críticos). Resolvemos o seguinte sistema de equações para obtermos os pontos estacionários do modelo adimensionalizado:

$$S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (9)$$

$$aSP - \eta I = 0 \quad (10)$$

$$\lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (11)$$

$$bNI = 0 \quad (12)$$

e obtemos os seguintes pontos de estabilidade:

$$E_0 = (S_0, I_0, 0, 1),$$

$$E_1 = (1, 0, 0, 0),$$

$$E_2 = (1, 0, 1, 0),$$

$$E_3 = (0, 0, 0, 0),$$

$$E_k = (0, 0, k, 1 - k), \quad k < 1,$$

onde,

$$S_0 = \frac{(1 - a)}{(1 + \frac{a}{\eta})}, \quad I_0 = \frac{a(1 - a)}{\eta(1 + \frac{a}{\eta})}. \quad (13)$$

A condição necessária para termos  $S_0, I_0 > 0$ , já que são populações, é que  $a < 1$ . Logo, em função das variáveis originais temos a seguinte estimativa em tempos:

$$\frac{1}{\lambda_S} < \frac{1}{K_2 \beta_2}$$

Notemos que esta condição não depende do parâmetro  $b$ , que é taxa de contágio dos insetos, dependendo somente do parâmetro  $a$ , taxa de contágio das capivaras. No Modelo geral teremos dependência de  $b$ .

Observemos que quanto mais perto o valor de  $a$  se encontra de 1, valor máximo para a transmissão de infecção, menos capivaras sobrevivem à frente, até atingir o valor  $a = 1$ , onde ocorre a extinção. Temos um estado endêmico quando  $a \ll 1$ , sobrevivendo a maioria delas.

Como  $a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}$  isto acontece se a taxa de reprodução das capivaras sadias é alta, ou se a capacidade de suporte dos insetos e a taxa de infecção das capivaras são baixas. Logicamente estes fatos favorecem a não propagação da doença.

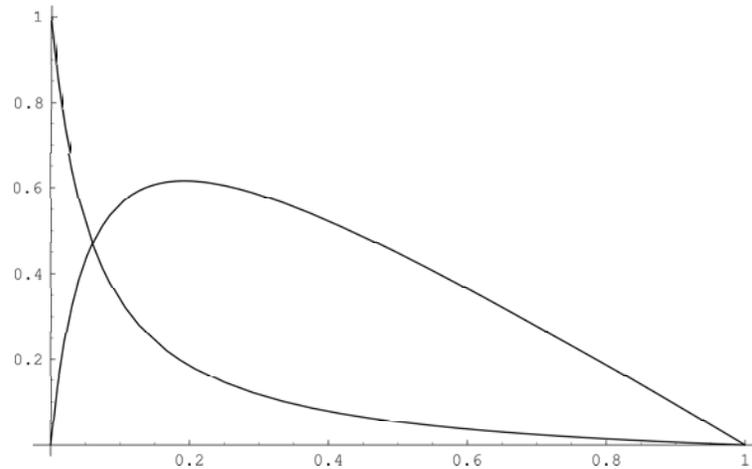


Figura 1: Gráfico dos estados de equilíbrio  $S_0, I_0$  em função da taxa de infecção das capivaras  $a$  para o valor fixo  $\eta = 0.06$

Podemos ver no gráfico 1 a variação dos pontos de estabilidade  $S_0, I_0$ , para diferentes valores da taxa de contágio das capivaras  $a$ , tomando  $\eta = 0.06$ . Notemos que quando  $a = 1$  temos zeros para cada compartimento, ou seja, a extinção. Quando  $a = 0$  não temos propagação da doença, obtendo então  $S_0 = 1, I_0 = 0$ . O ponto de máximo se dá para  $a = 0.19$ . Para essa taxa de contágio temos a máxima quantidade de infetados  $I_0 = 0.615$ .

## Estabilidade do sistema homogêneo

**Estabilidade do ponto**  $E_2 = (1, 0, 1, 0)$

Os autovalores da linearização neste ponto são:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 < 0 \\x_2 &= -\lambda < 0 \\x_{3,4} &= -\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4ab}\end{aligned}$$

Como  $x_2 > 0$  este ponto é sempre instável (veremos que no modelo geral temos a condição de estabilidade).

**Estabilidade do ponto**  $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned}x_1 &= -bI_0 < 0 \\x_2 &= -\lambda < 0\end{aligned}$$

e as raízes do polinômio:

$$x^2 + (-1 + 2S_0 - I_0 + a + \eta)x + (-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + aS_0).$$

Então as condições necessárias e suficientes para que  $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$  seja estável, são:

$$-(-1 + 2s_0 - I_0 + a + \eta) < 0$$

e

$$(-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + a S_0) > 0.$$

Logo, se

$$\eta << 1 \tag{14}$$

é necessário e suficiente que

$$\eta > a \tag{15}$$

para obtermos a estabilidade de  $E_0$ .

Como o ponto  $E_2$  é instável, e com as condições encontradas acima, o ponto  $E_0$  é estável, logo procuramos solução de onda viajante que vai do ponto  $E_2$  ao  $E_0$ .

**Estabilidade do ponto  $E_k = (0, 0, k, 1 - k)$**

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \\ x_3 &= -\eta < 0 \\ x_4 &= 1 - a(1 - k) \end{aligned}$$

Sabemos que  $k < 1$ , agora se  $a < 1$  temos que

$$1 - a(1 - k) > 0$$

com o qual  $E_k$  é instável. Isto significa que no caso de existir ponto de coexistência é o único estável.

Se  $a \geq 1$  então  $E_k$  vai deixar de ser instável se  $a(1 - k) > 1$ . Em  $a = 1$  temos um ponto de bifurcação. Notemos que quando  $a = 1$  temos a igualdade entre os pontos críticos  $E_0 = E_k = (0, 0, 0, 1)$ , para  $k = 0$  e além disso, coincidindo também os autovalores e tornado-se estável, já que  $x_4 = 0$  deixando de ser positivo. Este ponto,  $(0, 0, 0, 1)$  é da extinção das capivaras. Encontramos também ondas viajantes neste caso onde  $E_2 = (1, 0, 1, 0)$  é instável e  $E_0 = (0, 0, 0, 1)$  estável.

**Estabilidade do ponto  $(0, 0, 0, 0)$**

Os autovalores no ponto trivial  $(0, 0, 0, 0)$  são:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= \lambda < 0 \\x_3 &= -\eta < 0 \\x_4 &= 1\end{aligned}$$

sendo então sempre instável. Se tivermos as capivaras e insetos com densidade no valor das capacidades de suporte, podemos esperar que não se extingam as duas espécies no caso de invasão.

## 4 Ondas viajantes

Nesta seção procuramos as soluções do tipo onda viajante. Fazemos a mudança:

$$S(x, t) = S(z)$$

$$I(x, t) = I(z)$$

$$N(x, t) = N(z)$$

$$P(x, t) = P(z)$$

$$z = x + ct$$

Com esta mudança, o sistema de EDPs ((5) - (8)) se transforma no seguinte sistema de EDOs associado:

$$-cS' + S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (16)$$

$$-cI' + aSP - \eta I = 0 \quad (17)$$

$$N'' - cN' + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (18)$$

$$P'' - cP' + bNI = 0 \quad (19)$$

Escrevendo o sistema anterior como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem temos:

$$S' = \frac{1}{c}S(1 - (S + I)) - \frac{a}{c}SP \quad (20)$$

$$I' = \frac{a}{c}SP - \frac{\eta}{c}I \quad (21)$$

$$N' = X \quad (22)$$

$$P' = Y \quad (23)$$

$$X' = cX - \lambda(P + N)(1 - (P + N)) + bNI \quad (24)$$

$$Y' = cY - bNI \quad (25)$$

Os pontos críticos que consideramos neste caso são  $P_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$  e  $P_1 = (S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ . Procuramos, no diagrama de fase dado pela equação acima, uma trajetória saindo do ponto  $P_0$ , e ligando este ao ponto  $P_1$ . Não podemos permitir aqui oscilações entorno de qualquer um dos pontos, pois ambos tem coordenadas zero, e isto implicaria em populações negativas. Estamos procurando então ondas viajantes que obedeçam as condições:

$$S(-\infty) = 1, \quad S(\infty) = S_0$$

$$I(-\infty) = 0, \quad I(\infty) = I_0$$

$$N(-\infty) = 1, \quad N(\infty) = 0$$

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = 1$$

vide fig (7).

Analizamos a estabilidade linear do sistema nos pontos críticos de nosso interesse, para determinar as condições de ondas viajantes. A matriz no ponto:  $(1, 0, 1, 0, 0, 0)$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 & -\frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & \lambda & \lambda & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_1 = -\frac{1}{c}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

e as raízes do polinômio

$$p(x) := x^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right)x^2 - \eta x + \frac{ab}{c}$$

Este polinômio tem valores máximo e mínimo em

$$x_{min,max} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} \pm \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}$$

Como  $P(0) = \frac{ab}{c} > 0$  e  $P'(0) = -\eta < 0$  os gráficos possíveis do polinômio são os que temos nas figuras (2), (3), (4).

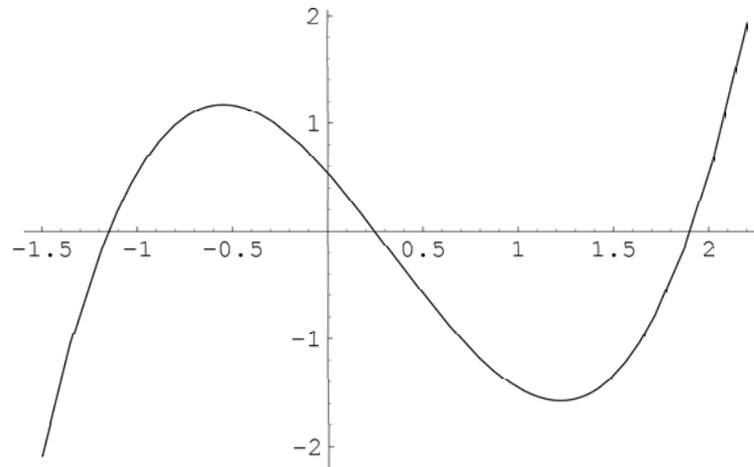


Figura 2: Gráfico do polinômio sem nenhuma raiz complexa

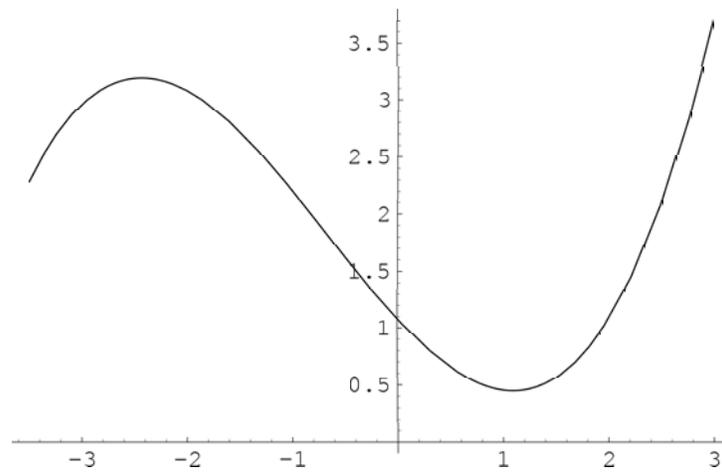


Figura 3: Gráfico do polinômio com duas raízes complexas

No diagrama de fase não podemos ter autovalores complexos pois estes implicam soluções espiraladas em torno de  $E_2$ , que atingiriam valores negativos, o que não é permitido, uma vez que as variáveis são populações. Então o polinômio não pode ter soluções complexas.

Isto nos dá a condição de velocidade mínima, que de acordo com o argumento de Fisher é o que nos fornece a solução estável. O mínimo é dado quando temos uma raiz dupla como no gráfico da figura 4.

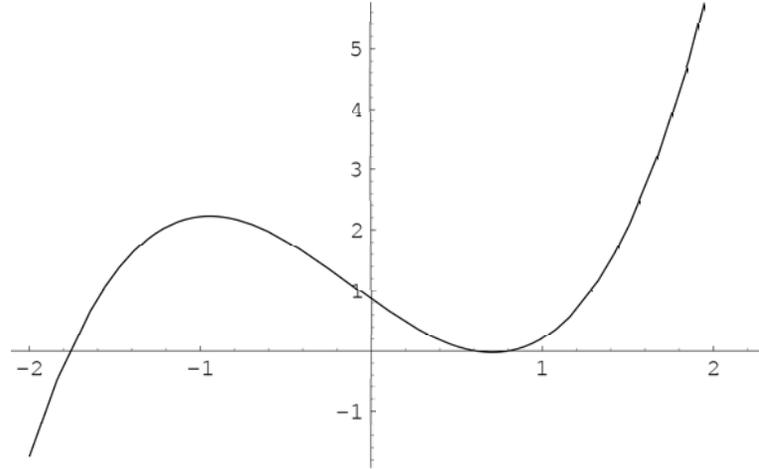


Figura 4: Gráfico do polinômio com raiz dupla. Nestas condições obtemos a velocidade mínima

Por ser necessária a existência de raiz dupla obtemos a equação:

$$P(x_{min}) = P'(x_{min}) = 0$$

$$p(x_{min}) = x_{min}^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right)x_{min}^2 - \eta x_{min} + \frac{ab}{c} = 0$$

$$x_{min} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} + \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}$$

Esta é equação que determina  $c_{min}$ . Podemos encontrar, por exemplo, a velocidade da propagação da doença em função de  $a$  ou  $b$ . Notemos que temos para eles o mesmo comportamento, pois a equação é simétrica quando mudamos  $a$  por  $b$ . Isto significa que as taxas de contágio tem o mesmo peso na propagação da doença ( gráfico na figura 5). Este gráfico é importante, pois determina o peso da taxa de contágio na velocidade de propagação da doença.

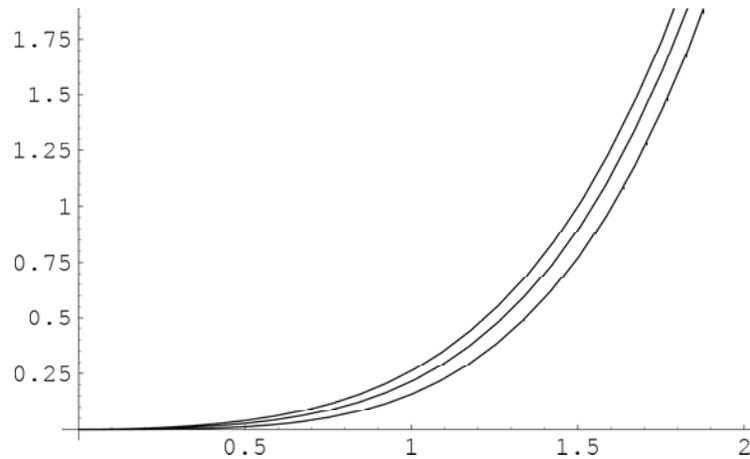


Figura 5: Gráfico da relação entre o produto das taxas de infecção e a velocidade para distintos valores de  $\eta$ . No sentido crescente  $\eta = 0.06, 0.3, 0.6$ .  $a = 1$  ou  $b = 1$

A matriz no ponto:  $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-2S_0-I_0-a}{c} & -\frac{S_0}{c} & 0 & -\frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + bI_0 & \lambda & c & 0 \\ 0 & 0 & -bI_0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4bI_0}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{1 - \eta - 2S_0 - a - I_0 \pm \sqrt{(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0)}}{2c}.$$

Não temos neste ponto nenhuma condição para a velocidade pois  $c^2 + 4bI_0 > 0$  e  $c^2 + 4\lambda > 0$

Temos a condição:

$$(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0) > 0. \quad (26)$$

que ocorre para  $a \ll 1$ , pois não podemos permitir neste ponto possíveis soluções oscilatorias, o que implicaria na existência de populações negativas, neste caso só para os insetos não portadores. Na figura (6) podemos observar a variação desta condição para diferentes valores de  $a$  com  $\eta = 0.06$  fixo.

Na figura 7 mostramos a simulação numerica com o Software Matlab para os seguintes parâmetros:

$$a = 0.03, \eta = 0.06, b = 0.1, \lambda = 0.05, c = 12.$$

Notemos que para estes parâmetros temos,

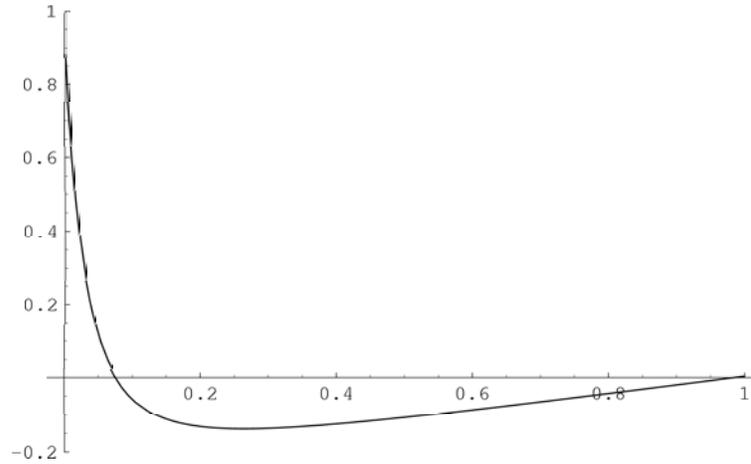


Figura 6: Gráfico da condição de oscilação em função da taxa de contágio das capivaras  $a$ , para  $\eta = 0.06$

$$S_0 = 0.6466, I_0 = 0.3233, \quad (27)$$

calculados com (13). Neste caso vemos que a frente de onda de insetos portadores vai na frente das capivaras infetadas. Quando a frente de portadores atinge os não portadores, a densidade destes últimos começa a diminuir até se extinguir (o modelo é simples).

Quando a frente de onda das capivaras infetadas atinge as sadias, vemos que acontece o mesmo fenômeno: a densidade das sadias começa a diminuir até ficar no valor  $S_0 = 0.6466$ , e as infetadas ficam no valor  $I_0 = 0.3233$ . Estes valores que aparecem na simulação numérica são os correspondentes aos calculados (27) para estes parâmetros. O valor de  $c$  alto é para melhorar o desenho na simulação pois a curva fica muito estreita para valores mais baixos, mas mantém o comportamento.

Na figura (8) os parâmetros são os mesmos que na figura anterior, com exceção do valor de  $a$ , na figura anterior era  $a = 0.03 < 0.07$ , e agora  $a = 0.4$ . Este valor é maior que  $a_{critico} = 0.07$ , onde muda de sinal a condição (26), sendo neste caso negativa. Ver também o gráfico (6) onde se pode observar a negatividade.

Isto implica que a solução oscila em torno do ponto de chegada, provocando a solução cíclica nas proximidades de zero para os não portadores, o qual não podemos permitir neste modelo simples, mas sim no modelo geral, no próximo capítulo. A vantagem aqui é que podemos calcular o valor da taxa de infecção a partir do qual esta oscilação começa.

Na figura (9) vemos o caso extremo quando  $a = 1$ . Neste caso, dos pontos de coexistência calculados anteriormente, (13), temos  $S_0 = I_0 = 0$ , o que implica a extinção das capivaras. Na simulação numérica vemos como a frente das capivaras infetadas atinge as sadias, a densidade populacional destas últimas começa a decrescer até a extinção.

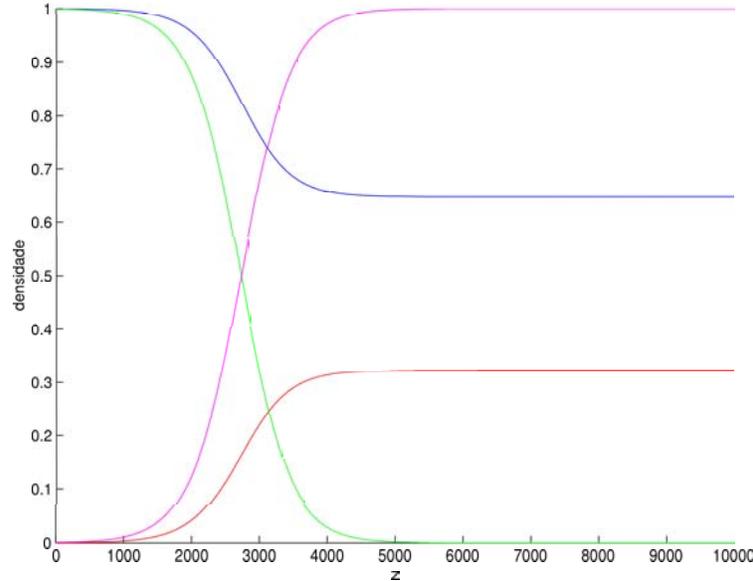


Figura 7: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros:  $a = 0.03$ ,  $\eta = 0.06$ ,  $b = 0.1$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $c = 12$ . A onda liga os pontos de equilíbrio  $(1, 0, 1, 0)$  e  $(0.6466, 0.3233, 0, 1)$

Quando as capivaras sadias são extintas, a densidade populacional das infetadas, começa a decrescer também até a extinção. Só ficam os insetos portadores neste caso.

Neste trabalho estudamos um modelo para a propagação de uma doença de transmissão indireta. A velocidade de propagação da doença foi determinada em função dos parâmetros essenciais. Neste modelo simples utilizamos como parâmetros a taxa de contágio das capivaras  $a$ , e dos insetos  $b$ . A equação que determina a velocidade mínima de propagação é simétrica com respeito às taxas. Isto significa que a influencia de ambas é a mesma.

No gráfico 5 temos a variação de qualquer uma destas duas taxas em função da propagação, para três valores diferentes de  $\eta$ . Quanto maior a mortalidade  $\eta$ , das capivaras infetadas, mais lenta a propagação. As capivaras morrem mais rápido e não se propaga rapidamente a doença.

A vantagem deste modelo simples é que podemos fazer todos os cálculos analíticos no ponto de equilíbrio não trivial,  $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$  e obtemos, por exemplo, a condição de oscilação (26). O gráfico desta condição em função de  $a$  para o valor  $\eta = 0.06$  pode ser observado na figura 6, o que facilita a interpretação. Na região onde a função é negativa indica valores de  $a$  onde a onda oscila em torno de  $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ , mas como aqui  $N = 0$ , teremos população negativa.

No gráfico 7 vemos que isto acontece para o valor  $a = 0.4$ , e não é uma onda biologicamente aceitável. Na região onde a função é positiva podemos admitir onda viajante,

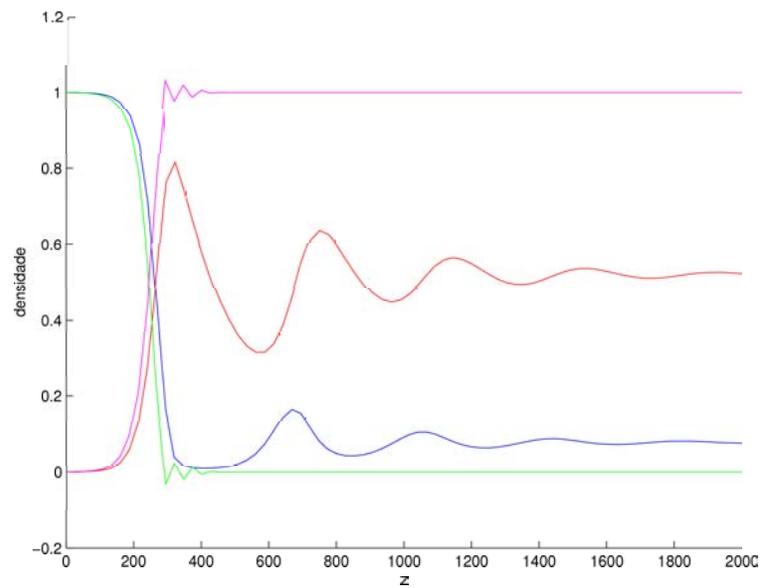


Figura 8: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros:  $a = 0.4$ ,  $\eta = 0.06$ ,  $b = 0.1$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $c = 12$ . Aqui o valor de  $a > 0.07$ , então a condição (26) fica menor que zero, vide (fig 6), gerando ondas cíclicas. Não podemos admitir, neste modelo simples, este tipo de solução, pois a curva da população de insetos não portadores gira em torno do zero.

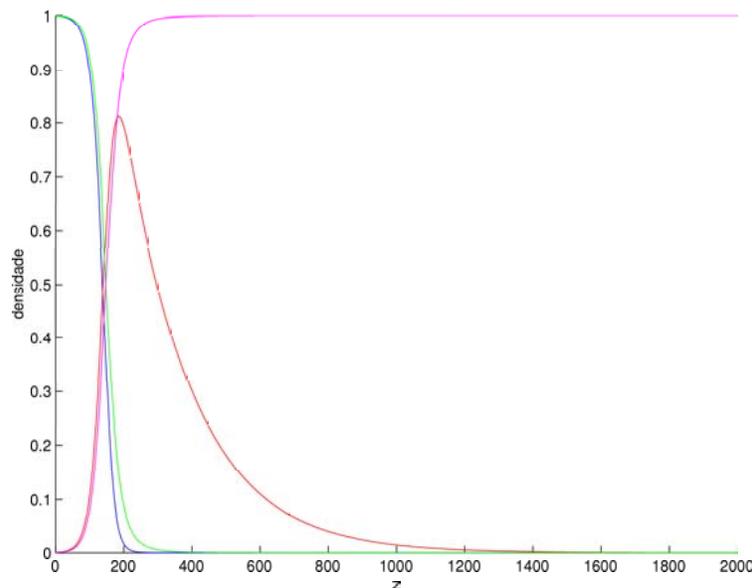


Figura 9: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros:  $a = 1$ ,  $\eta = 0.06$ ,  $b = 0.5$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $c = 12$ . Observamos aqui a extinção das capivaras

por exemplo para  $a = 0.03$ , vide 8 para a onda viajante. Para o caso extremo  $a = 1$  temos de (13):  $S_0 = I_0 = 0$ , a extinção das capivaras. A onda viajante correspondente a este caso pode ser observada na figura 9.

Este modelo simples tem então a vantagem de ser muito didático, onde tudo pode ser calculado analiticamente. Mas o modelo geral, vide [5], a pesar de não possibilitar o cálculo em forma analítica no ponto não trivial, reflete melhor a realidade. Nele podemos considerar as ondas cíclicas de propagação da doença, que é como ocorre na realidade.

## Referências

- [1] Fisher, R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics* **7**, 353-369.
- [2] Murray, J.D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Murray, J.D., Stanley, E.A., Brown, D.L. (1986). On the Spatial Spread of Rabies Foxes. *Proc.R.Soc.Lond.* **B229**, 111-150.
- [4] Pregolato, S. de A. (2002). O mal-das-cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e simulação de um caso. Tese de doutorado em biomatemática, BAE-UNICAMP.
- [5] Maidana, N.A. (2004). Algumas aplicações das ondas viajantes a fenômenos biológicos. Tese de doutorado em biomatemática, IMECC-UNICAMP.