

# Uma Caricatura da Equação de Ludwig

Lucy T. Takahashi\*,  
Wilson C. Ferreira Jr†

IMECC – Unicamp, Cx.Postal 6065, 13083-970, Campinas/SP.

## Resumo

Em [1], a distribuição espacial e temporal de uma praga é modelada por uma equação de conservação com difusão simples e dinâmica não linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - B \frac{u^2}{A^2 + u^2}, \quad (1)$$

onde,  $u$  é a densidade dos insetos e ao crescimento logístico é acrescentado a predação por um inimigo natural, na forma de Holling. Murray [3], analisou no caso unidimensional como esta praga se propaga, encontrou condições para a existência de Onda Viajante e para a sua velocidade e desta análise determinou estratégias de controle para prevenir uma infestação, vinda desta propagação. Apresentamos uma caricatura, da dinâmica não linear (McKean[2]), onde as características essenciais não são perdidas, mas que nos possibilita o cálculo explícito de propriedades das Ondas Viajantes.

## 1 Introdução

A equação diferencial parcial não linear, proposta por Ludwig [1], é uma descrição matemática de uma interação, praga e seu inimigo natural, onde a dispersão é puramente difusiva. Sua complexidade, que podemos ver na equação (1), adimensionalizada,

---

\*Bolsista do PICDT-UFV/CAPES. ltiemi@ime.unicamp.br

†wilson@ime.unicamp.br

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (2)$$

onde,

$$f(u) = r_0 u \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \quad (3)$$

nos levou a simplificá-la, através da substituição de  $f(u)$ , pela função de McKean,

$$f(u) = \begin{cases} -u + u_1, & u \leq a \\ -u + u_3, & u > a, \end{cases} \quad (4)$$

sendo  $u_1$  e  $u_3$  os estados estacionários instáveis de (2), veja o esboço do gráfico de  $f$  na figura 1. Considerando o caso unidimensional determinamos todas as soluções Onda Viajante, bem como sua velocidade de propagação.

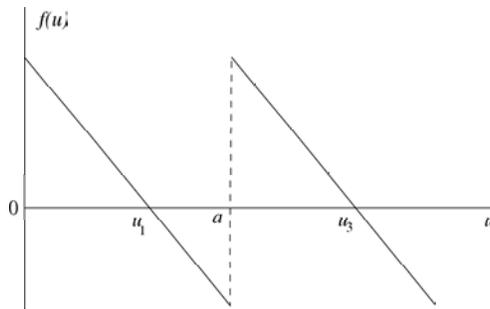


Figura 1: Função de McKean

A solução Onda Viajante, da equação (2), é a função  $U(z) = u(x, t)$ , onde  $z = x - ct$ , logo  $U$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$U'' - cU' + f(U) = 0, \quad (5)$$

com  $f$  dada pela equação (4) e onde “linha” representa a derivada em relação a variável  $z$ .

## 2 A Caricatura

Por conveniência, vamos repetir a equação (1),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - B \frac{u^2}{A^2 + u^2},$$

que representa a variação da densidade  $u$  da praga em relação ao tempo, primeiro membro, é dada pela difusão, crescimento logístico e pela predação do tipo Holling, por um inimigo natural, primeiro, segundo e terceiro termos, respectivamente no segundo membro, onde  $D$  é o coeficiente de difusão o qual mede como rápido é a difusão dos insetos,  $r$  é a taxa de crescimento intrínscico da praga,  $K$  é a chamada capacidade suporte,  $A$  tem dimensão de  $u$ , é a densidade limiar da praga na qual a predação é "ligada" (começa a tomar lugar) e  $B$  tem dimensão de  $u(\text{tempo})^{-1}$ , representa o nível de saturação para a taxa de consumo dos insetos pelo inimigo,  $D$ ,  $r$ ,  $K$ ,  $B$  e  $A$  são constantes positivas. Para a adimensionalização da equação (1), tomamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\tau = \frac{t}{A/B}, \quad d = \frac{DA}{B}, \quad r_0 = \frac{Ar}{B},$$

$$q = \frac{K}{A}, \quad \rho = \frac{u}{A}, \quad \chi = \frac{x}{d},$$

e assim, obtemos a equação (2),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_0 u \left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

onde, por simplicidade retornamos a  $t = \tau$ ,  $u = \rho$ ,  $x = \chi$ .

Em Murray [3], vemos que na ausência de difusão, que é a situação espacialmente homogênea, podemos ter três estados estacionários positivos, de fato, pois uma vez fixado o meio  $q$  depende das propriedades da praga e de seu predador, assim para  $q$  suficientemente grande é possível encontrarmos valores convenientes de  $r_0$  e assim determiná-los, veja esquema na figura 2. Dois estados estacionários são linearmente estáveis  $u_1$  e  $u_3$ , e um instável  $u_2$ . O estado estacionário  $u_0 = 0$  é também instável. O menor estado estacionário positivo  $u_1$  corresponde ao refúgio para a praga, enquanto que  $u_3$ , o maior, corresponde a infestação, quando tomarmos  $f'(u_0) > 0$ , intuitivamente, deve existir uma trajetória,  $T$ , no plano de fase que ligue  $(u_3, 0)$  a  $(u_1, 0)$ , veja figura 3, que tem

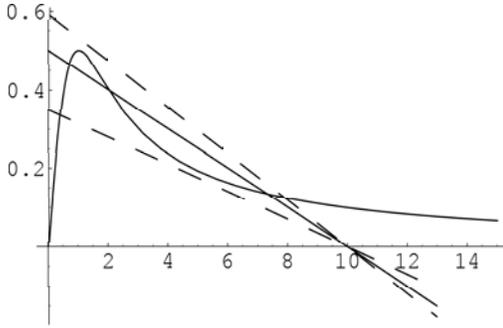


Figura 2: Os pontos de equilíbrio positivos são dados pela intersecção da reta  $r_0(1 + u/q)$  com  $u/(1 + u^2)$ , para exemplificar, fixamos  $q = 10$  e tomando diferentes valores para  $r_0$ , de cima para baixo  $r_0 = 0.6$  (tracejado),  $r_0 = 0.5$  (contínua) e  $r_0 = 0.35$  (tracejado). A intersecção da reta contínua com a curva nos dá os três pontos estacionários positivos.

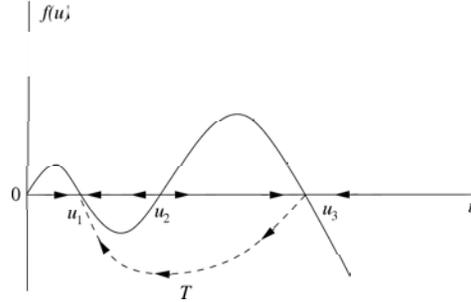


Figura 3: Interação-crescimento da praga com seu inimigo natural,  $f(u)$  dado em (3),  $u_1$  corresponde ao refúgio,  $u_3$  corresponde a infestação e  $T$  é a trajetória no plano de fase ligando o ponto  $(u_3, 0)$  ao ponto  $(u_1, 0)$ .

uma correspondente solução Onda Viajante,  $U(z) = u(x, t)$ , onde  $z = x - ct$ . A solução  $U(z)$  neste caso satisfaz:

$$U(-\infty) = u_3 \text{ e } U(\infty) = u_1. \quad (6)$$

Esta é a situação que estamos interessados para o problema.

Para tanto, substituímos  $f(u)$  na equação (2) pela função (4) conhecida como função de serra, veja figura 4, obtendo o sistema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + u_1, & u \leq a \\ u_t = u_{xx} - u + u_3, & u > a, \end{cases} \quad (7)$$

e assim, trabalhamos com essa nova classe de equações, que tem uma forma similar e que preserva as características essenciais da equação (2), além do importante fato, esta é tratável matematicamente.

Encontramos então soluções Onda Viajante,

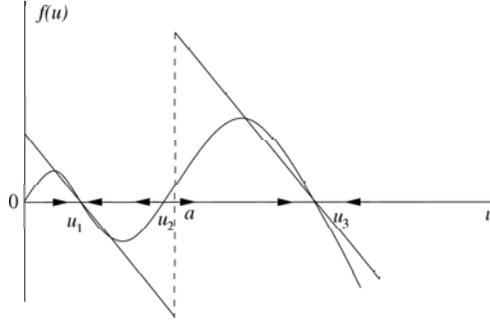


Figura 4: Esquema da substituição.

$$U(z) = \begin{cases} U_1(z) = u_1 + \frac{\lambda_1(u_1 - u_3)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 z), & U \leq a \\ U_2(z) = u_3 + \frac{\lambda_2(u_1 - u_3)}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 z), & U > a, \end{cases} \quad (8)$$

para o sistema,

$$\begin{cases} U_1'' + cU_1' - U_1 + u_1 = 0, & U \leq a \\ U_2'' + cU_2' - U_2 + u_3 = 0, & U > a, \end{cases}$$

que satisfaz as condições de contorno (6) e como queremos que a densidade da população seja contínua e tenha um crescimento suave, ou seja, que não haja brusca mudança no comportamento da população, impomos que ela seja diferenciável, ou seja, a menos de uma translação horizontal

$$\begin{cases} U_1(0) = U_2(0) \\ U_1'(0) = U_2'(0), \end{cases}$$

e assim obtemos (8), veja figura 5, onde

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2}.$$

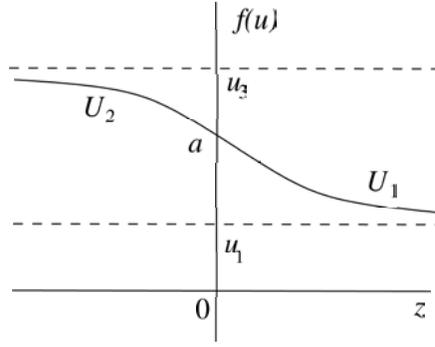


Figura 5: Típica solução Onda Viajante vindo de  $u_3$  para  $u_1$ .

Note que

$$U_1(0) = U_2(0) = a = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (9)$$

onde por construção  $u_1 < a < u_3$ . De fato,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4}} \right) (u_1 - u_3) + \frac{1}{2} (u_1 + u_3) \end{aligned}$$

logo,

$$u_1 = \frac{1}{2} (u_1 - u_3) + \frac{1}{2} (u_1 + u_3) < a < \frac{1}{2} (u_1 + u_3) < u_3.$$

De (9), temos que

$$\frac{u_3 - a}{a - u_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{2c}{-c + \sqrt{c^2 + 4}} \quad (10)$$

logo,

$$c > 0 \Leftrightarrow \frac{u_3 - a}{a - u_1} > 1$$

$$c < 0 \Leftrightarrow \frac{u_3 - a}{a - u_1} < 1$$

$$c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{u_3 + u_1}{2}.$$

Geometricamente,

(i) a velocidade  $c$  é positiva (negativa) se, e somente se, o ponto de conexão  $a$ , está mais próximo de  $u_1$  ( $u_3$ ), que de  $u_3$  ( $u_1$ ),

(ii) a velocidade  $c$  é nula se, e somente se, o ponto de conexão  $a$  é o ponto médio entre  $u_1$  e  $u_3$ .

Como o nosso objetivo é encontrar uma Onda Viajante, que caminhe da infestação para o refúgio, devemos tomar a velocidade  $c$  negativa, ou seja,  $a$  mais próximo de  $u_3$ .

Através da equação (10) é possível estabelecer uma relação entre a velocidade  $c$  e  $-\lambda_2/\lambda_1$ , que é esboçada na figura 6.

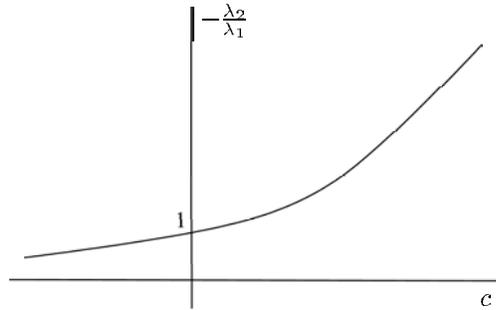


Figura 6: Gráfico da velocidade  $c$  com relação a  $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ .

Do ponto de vista de controle da praga, se uma infestação ocorre e se espalha, nos queremos saber como alterar as condições locais para que a Onda de infestação seja contida. Pelos resultados obtidos acima devemos mudar localmente a dinâmica de crescimento da praga, para que  $a$  fique mais próximo de  $u_3$  que de  $u_1$ . Por exemplo, conhecida a praga e o meio ambiente é possível estimar os valores de refúgio  $u_1$  e de infestação  $u_3$  já  $a$  representa a densidade a partir da qual, apesar da presença do predador, a praga passa a ter uma taxa

de natalidade maior que a taxa de mortalidade e desta forma tem "forças" para atingir a densidade  $u_3$ , então devemos definir estratégias que impliquem numa prolongação da parte negativa da sua dinâmica vital antes que ocorra o "salto" em  $a$ , o que pode ser feito diminuindo as áreas favoráveis à praga, com isso a Onda Viajante terá velocidade negativa e o sistema sozinho leva a densidade da praga à  $u_1$ . Assim, basta que  $a$  ultrapasse o ponto médio  $(u_1 + u_3)/2$ . Mas se quisermos uma maior rapidez, pela equação (10), basta aproximar mais  $a$  de  $u_3$ . Veja o comportamento da Onda Viajante com velocidades negativas distintas, figura 7 para  $a$  à direita de  $(u_1 + u_3)/2$  mas próxima e figura 8 para  $a$  próxima de  $u_3$ .

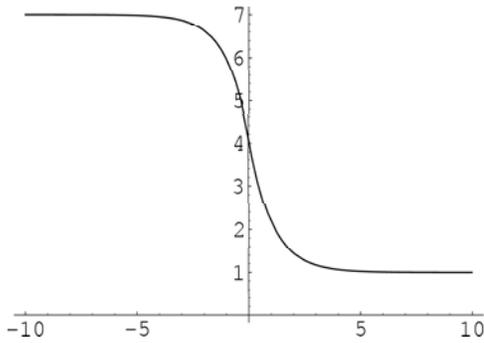


Figura 7: Esboço da Onda Viajante para  $u_1=1$ ,  $u_3=7$  e  $a=4,1$ ; logo  $c=-0,07$ .

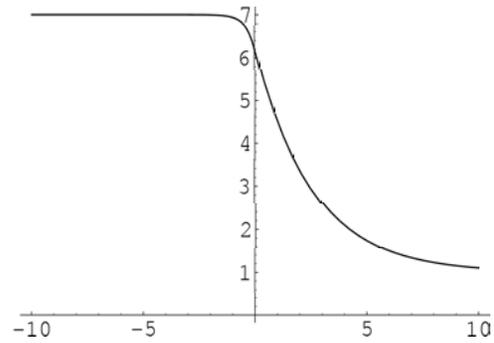


Figura 8: Esboço da Onda Viajante para  $u_1=1$ ,  $u_3=7$  e  $a=6$ ; logo  $c=-2,16$ .

## Referências

- [1] Ludwig, D., Aronson, D. G. and Weinberger, H. F., Spatial Patterning of the Spruce Budworm, *J. Math. Biology*, vol. 8, pp. 217–258 (1979).
- [2] McKean H. P., Nagumo's equation, *Adv. Math.*, vol. 4, pp. 209–223 (1970).
- [3] Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin (1993).