Álgebra Linear Avançada
Potências Tensoriais

Adriano Moura

Unicamp

2020

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V\ \forall\ 1 \le j \le k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall \ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W)$

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall \ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists \ ! \ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall \ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists \ ! \ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade:

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \dots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \dots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \dots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \dots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \dots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade: existe $\varphi \in S^k(V, U)$ tal que

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade: existe $\varphi \in S^k(V, U)$ tal que, para toda $\psi \in S^k(V, W), \exists\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfazendo $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$.

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \dots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \dots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \dots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \dots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \dots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade: existe $\varphi \in S^k(V, U)$ tal que, para toda $\psi \in S^k(V, W), \exists\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfazendo $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$. Um tal espaço U com dimensão mínima será dito uma k-ésima potência simétrica de V.

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade: existe $\varphi \in S^k(V, U)$ tal que, para toda $\psi \in S^k(V, W), \exists\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfazendo $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$. Um tal espaço U com dimensão mínima será dito uma k-ésima potência simétrica de V.

Trocando-se $S^k(V, W)$ por $A^k(V, W)$

Minimalidade da Dimensão do Produto Tensorial

Dados $\mathbb{F}$- espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$, considere o "conjunto" dos pares (φ, U) com $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, U)$ satisfazendo a propriedade: para toda $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ existe $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. O Exercício 10.2.10(b) diz que (φ, U) é produto tensorial para $V_1, \ldots, V_k$ se, e só se, $\dim(U)$ for mínima entre todos estes pares.

Suponha $V_j = V \ \forall\ 1 \leq j \leq k$, e defina $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$. Vimos que o subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ das funções k-lineares simétricas é um subespaço e o mesmo vale para o das alternadas. Denotaremos estes subespaços por $S^k(V, W)$ e $A^k(V, W)$.

Se $\psi \in S^k(V, W), \exists\, !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^{\otimes k}, W)$ que "lineariza" ψ. Porém, $\dim(V^{\otimes k})$ não é mínima entre todos os espaço vetoriais U que satisfazem a seguinte propriedade: existe $\varphi \in S^k(V, U)$ tal que, para toda $\psi \in S^k(V, W), \exists\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfazendo $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi$. Um tal espaço U com dimensão mínima será dito uma k-ésima potência simétrica de V.

Trocando-se $S^k(V, W)$ por $A^k(V, W)$, chega-se ao conceito de k-ésima potência exterior de V.

Potências Exteriores

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V,W)$ é dita alternada se

$$(1) \quad \phi(v_1,\ldots,v_k)=0 \quad \text{se existirem} \quad 1\leq i<j\leq k \quad \text{tais que} \quad v_i=v_j.$$

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$ é dita alternada se

(1) $\quad \phi(v_1,\ldots,v_k) = 0 \quad$ se existirem $\quad 1 \leq i < j \leq k \quad$ tais que $\quad v_i = v_j$.

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

(2) $\qquad \phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k) = -\phi(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$.

Potências Exteriores

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V, W)$ é dita alternada se

$$(1) \quad \phi(v_1, \dots, v_k) = 0 \quad \text{se existirem} \quad 1 \leq i < j \leq k \quad \text{tais que} \quad v_i = v_j.$$

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

$$(2) \qquad \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V, W)$. Se ϕ satisfaz (1) e (2) com $v_j \in \alpha$ para todo $1 \leq j \leq k$, então $\phi \in A^k(V, W)$.

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$ é dita alternada se

$$(1) \quad \phi(v_1,\dots,v_k) = 0 \quad \text{se existirem} \quad 1 \le i < j \le k \quad \text{tais que} \quad v_i = v_j.$$

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

$$(2) \qquad \phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = -\phi(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

para quaisquer $1 \le i < j \le k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$. Se ϕ satisfaz (1) e (2) com $v_j \in \alpha$ para todo $1 \le j \le k$, então $\phi \in A^k(V,W)$.

Dem.: Exercício.

Potências Exteriores

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$ é dita alternada se

(1) $\quad \phi(v_1,\ldots,v_k)=0 \quad$ se existirem $\quad 1\le i<j\le k \quad$ tais que $\quad v_i=v_j$.

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

(2) $\qquad \phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k) = -\phi(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$

para quaisquer $1\le i<j\le k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$. Se ϕ satisfaz (1) e (2) com $v_j\in\alpha$ para todo $1\le j\le k$, então $\phi\in A^k(V,W)$.

Dem.: Exercício.

Uma k-ésima potência exterior para V é um par (ϕ,U) com $\phi\in A^k(V,U)$ que é universal sobre $V^k = V\times\cdots\times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear alternada" e $P_2 =$ "ser linear".

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$ é dita alternada se

(1) $\quad \phi(v_1,\dots,v_k) = 0 \quad$ se existirem $\quad 1 \le i < j \le k \quad$ tais que $\quad v_i = v_j$.

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

(2) $\qquad \phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = -\phi(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$

para quaisquer $1 \le i < j \le k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$. Se ϕ satisfaz (1) e (2) com $v_j \in \alpha$ para todo $1 \le j \le k$, então $\phi \in A^k(V,W)$.

Dem.: Exercício.

Uma k-ésima potência exterior para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in A^k(V,U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear alternada" e $P_2 =$ "ser linear". Ou seja, se para toda $\psi \in A^k(V,W)$

Lembre que $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$ é dita alternada se

(1) $\quad \phi(v_1,\dots,v_k)=0 \quad$ se existirem $\quad 1\le i<j\le k \quad$ tais que $\quad v_i=v_j$.

Vimos que, se ϕ é alternada, ela também é é antissimétrica, isto é,

(2) $\qquad \phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)=-\phi(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$

para quaisquer $1\le i<j\le k$.

Lema 10.4.1

Sejam α uma base de V e $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V,W)$. Se ϕ satisfaz (1) e (2) com $v_j\in\alpha$ para todo $1\le j\le k$, então $\phi\in A^k(V,W)$.

Dem.: Exercício.

Uma k-ésima potência exterior para V é um par (ϕ,U) com $\phi\in A^k(V,U)$ que é universal sobre $V^k=V\times\cdots\times V$ com respeito às propriedades $P_1=$ "ser k-linear alternada" e $P_2=$ "ser linear". Ou seja, se para toda $\psi\in A^k(V,W), \exists\, !\ \tilde\psi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ tal que $\tilde\psi\circ\phi=\psi$.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha_<^k = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$ e seja $\iota : \alpha^k_< \to U$ uma base de U indexada por $\alpha^k_<$.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$ e seja $\iota : \alpha^k_< \to U$ uma base de U indexada por $\alpha^k_<$.

Observe que todo elemento de α^k com entradas distintas é obtido de um único elemento de $\alpha^k_<$ por re-ordenação das entradas.

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha_<^k = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha_<^k)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha_<^k$ e seja $\iota : \alpha_<^k \to U$ uma base de U indexada por $\alpha_<^k$.

Observe que todo elemento de α^k com entradas distintas é obtido de um único elemento de $\alpha_<^k$ por re-ordenação das entradas.

Seja $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V, U)$ dada por $\phi|_{\alpha_<^k} = \iota$

Existência e Base de Potências Exteriores

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$ e seja $\iota : \alpha^k_< \to U$ uma base de U indexada por $\alpha^k_<$.

Observe que todo elemento de α^k com entradas distintas é obtido de um único elemento de $\alpha^k_<$ por re-ordenação das entradas.

Seja $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V, U)$ dada por $\phi|_{\alpha^k_<} = \iota$, $\phi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 0$ se existirem $1 \leq j < l \leq k$ tais que $i_j = i_l$

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$ e seja $\iota : \alpha^k_< \to U$ uma base de U indexada por $\alpha^k_<$.

Observe que todo elemento de α^k com entradas distintas é obtido de um único elemento de $\alpha^k_<$ por re-ordenação das entradas.

Seja $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V, U)$ dada por $\phi|_{\alpha^k_<} = \iota$, $\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) = 0$ se existirem $1 \leq j < l \leq k$ tais que $i_j = i_l$ e

$$\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_j}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_k}) = -\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_j}, \ldots, v_{i_k})$$

para quaisquer $1 \leq j < l \leq k$.

Teorema 10.4.2

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência exterior para V. Sejam $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_< = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \alpha^k : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência exterior para V, $\phi(\alpha^k_<)$ é base para U.

Dem.: Como na demonstração do Teorema 10.2.1, basta provar a segunda afirmação para uma k-ésima potência exterior específica. Considere um espaço vetorial U com $\dim(U) = \#\alpha^k_<$ e seja $\iota : \alpha^k_< \to U$ uma base de U indexada por $\alpha^k_<$.

Observe que todo elemento de α^k com entradas distintas é obtido de um único elemento de $\alpha^k_<$ por re-ordenação das entradas.

Seja $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V, U)$ dada por $\phi|_{\alpha^k_<} = \iota$, $\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) = 0$ se existirem $1 \leq j < l \leq k$ tais que $i_j = i_l$ e

$$\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_j}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_k}) = -\phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_j}, \ldots, v_{i_k})$$

para quaisquer $1 \leq j < l \leq k$. Segue do Lema 10.4.1 que $\phi \in A^k(V, U)$.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$.

Pot. Exterior e Linearização das Funções Alternadas

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\, !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V,W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\, !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$

Pot. Exterior e Linearização das Funções Alternadas

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\, !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. □

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\, !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. $\square$

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\mathit{\Gamma} : A^k(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W),\ \psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. $\square$

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : A^k(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W),\ \psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dem.: Exercício (adaptar do Teor. 10.2.2).

Pot. Exterior e Linearização das Funções Alternadas

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V,W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. □

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : A^k(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W),\ \psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dem.: Exercício (adaptar do Teor. 10.2.2).

Notação: $(\wedge, \bigwedge^k V)$

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. $\square$

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : A^k(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dem.: Exercício (adaptar do Teor. 10.2.2).

Notação: $(\wedge, \bigwedge^k V)$ e $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \wedge(v_1, \ldots, v_k)$.

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V,W)$, como ι é base de U, $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. □

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : A^k(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W),\ \psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dem.: Exercício (adaptar do Teor. 10.2.2).

Notação: $(\wedge, \bigwedge^k V)$ e $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \wedge(v_1, \ldots, v_k)$. Temos

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_k = -\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

para quaisquer $1 \le i < j \le k$

Mostremos que (ϕ, U) satisfaz a propriedade universal requerida. Dada $\psi \in A^k(V, W)$, como ι é base de U, $\exists\ !\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi}(\iota(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k_<$. Assim, como ϕ e ψ são k-lineares alternadas, segue que $\tilde{\psi} \circ \phi$ é alternada e $\tilde{\psi}(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \alpha^k$. Logo, $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$. Além disso, se $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ satisfaz $\xi \circ \phi = \psi$, então, para todo $\mathbf{v} \in \alpha^k$, vale $\xi(\iota(\mathbf{v})) = \xi(\phi(\mathbf{v})) = \psi(\mathbf{v})$ e, portanto, $\xi = \tilde{\psi}$. □

Teorema 10.4.3

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência exterior para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : A^k(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W),\ \psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dem.: Exercício (adaptar do Teor. 10.2.2).

Notação: $(\wedge, \bigwedge^k V)$ e $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \wedge(v_1, \ldots, v_k)$. Temos

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_k = -\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

para quaisquer $1 \le i < j \le k$ e $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ se $v_1, \ldots, v_k$ for l.d. (Exercício 9.1.2(b)).

Dimensão e “Transposição Alternada”

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$.

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \ \text{ se } \ 1 \leq k \leq n.$$

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \ \text{ se } \ 1 \leq k \leq n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k} \dim(W) \ \text{ cc..}$$

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \;\text{ se }\; k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \;\text{ se }\; 1 \leq k \leq n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \;\text{ se }\; k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k} \dim(W) \;\text{ cc..}$$

Seja $A^k(V) = A^k(V,\mathbb{F})$.

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \;\text{ se }\; k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \;\text{ se }\; 1 \le k \le n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \;\text{ se }\; k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k}\dim(W) \;\text{ cc.}.$$

Seja $A^k(V) = A^k(V,\mathbb{F})$. Dada $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$

Dimensão e “Transposição Alternada”

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \ \text{ se } \ 1 \le k \le n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k}\dim(W) \ \text{ cc..}$$

Seja $A^k(V) = A^k(V,\mathbb{F})$. Dada $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, considere

$$T^{\times k} : V^k \to W^k, \quad (v_1,\ldots,v_k) \mapsto (T(v_1),\ldots,T(v_k))$$

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \ \text{ se } \ 1 \le k \le n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k} \dim(W) \ \text{ cc.}.$$

Seja $A^k(V) = A^k(V,\mathbb{F})$. Dada $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, considere

$$T^{\times k} : V^k \to W^k, \quad (v_1,\ldots,v_k) \mapsto (T(v_1),\ldots,T(v_k))$$

e

$$T^{\wedge k} : A^k(W) \to A^k(V), \quad \phi \mapsto \phi \circ T^{\times k}.$$

Dimensão e "Transposição Alternada"

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k}\quad \text{com}\quad i_1<i_2<\cdots<i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V)=n\in\mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\bigwedge^k V)=0\ \text{ se }\ k>n \quad \text{e}\quad \dim(\bigwedge^k V)=\binom{n}{k}\ \text{ se }\ 1\le k\le n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W))=0\ \text{ se }\ k>n\quad \text{e}\quad \dim(A^k(V,W))=\binom{n}{k}\dim(W)\ \text{ cc..}$$

Seja $A^k(V)=A^k(V,\mathbb{F})$. Dada $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, considere

$$T^{\times k}:V^k\to W^k,\quad (v_1,\dots,v_k)\mapsto (T(v_1),\dots,T(v_k))$$

e

$$T^{\wedge k}:A^k(W)\to A^k(V),\quad \phi\mapsto\phi\circ T^{\times k}.$$

Verifica-se facilmente que $T^{\wedge k}(\phi)\in A^k(V)\ \forall\ \phi\in A^k(W)$

Pelo Teorema 10.4.2, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

formam uma base de $\bigwedge^k V$. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(\textstyle\bigwedge^k V) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(\textstyle\bigwedge^k V) = \binom{n}{k} \ \text{ se } \ 1 \le k \le n.$$

Segue então do Teorema 10.4.3 que

$$\dim(A^k(V,W)) = 0 \ \text{ se } \ k > n \quad \text{e} \quad \dim(A^k(V,W)) = \binom{n}{k}\dim(W) \ \text{ cc..}$$

Seja $A^k(V) = A^k(V,\mathbb{F})$. Dada $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$, considere

$$T^{\times k} : V^k \to W^k, \quad (v_1,\ldots,v_k) \mapsto (T(v_1),\ldots,T(v_k))$$

e

$$T^{\wedge k} : A^k(W) \to A^k(V), \quad \phi \mapsto \phi \circ T^{\times k}.$$

Verifica-se facilmente que $T^{\wedge k}(\phi) \in A^k(V)\ \forall\ \phi \in A^k(W)$ e que $T^{\wedge k}$ é linear.

Determinante via “Transposição Alternada”

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo.

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$(3) \qquad T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\, \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V).$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$.

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$(3) \qquad T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V).$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$(3) \qquad T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V).$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$

Determinante via “Transposição Alternada”

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, temos $\delta(T \circ S)$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$(3) \qquad T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V).$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, temos $\delta(T \circ S) =$

$\phi(T(S(v_1)), \ldots, T(S(v_n)))$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, temos $\delta(T \circ S) = \phi(T(S(v_1)), \ldots, T(S(v_n))) \overset{(3)}{=} \delta(T)\ \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n))$

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$(3) \qquad T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V).$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, temos $\delta(T \circ S) = \phi(T(S(v_1)), \ldots, T(S(v_n))) \overset{(3)}{=} \delta(T)\ \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) = \delta(T)\ \delta(S)$.

Determinante via "Transposição Alternada"

Considere o caso particular $W = V$ e $k = n = \dim(V) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Segue que $\dim(A^n(V)) = 1$ e, portanto, todo operador linear em $A^n(V)$ é multiplicação por um escalar fixo. Em particular, como $T^{\wedge n}$ é um operador linear em $A^n(V)$, existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^{\wedge n}(\phi) = \delta(T)\ \phi \qquad \text{para todo} \qquad \phi \in A^n(V). \tag{3}$$

Além disso, para calcularmos $\delta(T)$, precisamos avaliar $T^{\wedge n}$ em um único elemento não nulo de $A^n(V)$. Por exemplo, fixada uma base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V, podemos tomar ϕ como sendo o único elemento de $A^n(V)$ que satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Como $T^{\wedge n}(\phi)$ também fica determinada por seu valor em $(v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$\delta(T) = \delta(T)\ \phi(v_1, \ldots, v_n) = T^{\wedge n}(\phi)(v_1, \ldots, v_n) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)).$$

Em particular, $\delta(\mathrm{Id}_V) = 1$ e, se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, temos $\delta(T \circ S) = \phi(T(S(v_1)), \ldots, T(S(v_n))) \overset{(3)}{=} \delta(T)\ \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) = \delta(T)\ \delta(S)$.

Teorema 10.4.4

Para todo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $\delta(T) = \det(T)$.

Demonstração do Teorema 10.4.4

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2))$$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) = \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2)$$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc.\end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \dots, v_n$ uma base de V

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \; \forall \; 1 \le j \le n$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \le j \le n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j\ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$.

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Considere a base $\beta = E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}$ de W. Os resultados da Seção 2.4 implicam que $\varphi \in A^n(W)$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Considere a base $\beta = E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}$ de W. Os resultados da Seção 2.4 implicam que $\varphi \in A^n(W)$ e, de fato, φ é o único elemento de $A^n(W)$ satisfazendo $\varphi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \det(I_n) = 1$.

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$.
Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Considere a base $\beta = E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}$ de W. Os resultados da Seção 2.4 implicam que $\varphi \in A^n(W)$ e, de fato, φ é o único elemento de $A^n(W)$ satisfazendo $\varphi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \det(I_n) = 1$. Mostraremos que

$$\psi \in A^n(W) \quad \text{e} \quad \psi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = 1, \tag{4}$$

Demonstração do Teorema 10.4.4

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Considere a base $\beta = E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}$ de W. Os resultados da Seção 2.4 implicam que $\varphi \in A^n(W)$ e, de fato, φ é o único elemento de $A^n(W)$ satisfazendo $\varphi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \det(I_n) = 1$. Mostraremos que

$$\psi \in A^n(W) \quad \text{e} \quad \psi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = 1, \tag{4}$$

que implica $\psi = \varphi$.

Suponha que $\dim(V) = 2$, $\alpha = v_1, v_2$ seja base de V e que $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Se $\phi \in A^2(V)$ é o elemento que satisfaz $\phi(v_1, v_2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} \delta(T) = \phi(T(v_1), T(v_2)) &= \phi(av_1 + cv_2, bv_1 + dv_2) \\ &= \phi(av_1, dv_2) + \phi(cv_2, bv_1) = ad - bc. \end{aligned}$$

Sejam $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $W = M_{n,1}(\mathbb{F})$, $\nu : W^n \to M_n(\mathbb{F})$ tal que $C_j(\nu(A_1, \ldots, A_n)) = A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$, $\rho_\alpha : W^n \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ tal que $\rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n) = T$ sendo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $[T]_\alpha^\alpha = \nu(A_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi, \psi : W^n \to \mathbb{F}$ dadas por $\varphi = \det \circ \nu$ e $\psi = \delta \circ \rho_\alpha$. Note que ρ_α e ν são bijetoras.

Considere a base $\beta = E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}$ de W. Os resultados da Seção 2.4 implicam que $\varphi \in A^n(W)$ e, de fato, φ é o único elemento de $A^n(W)$ satisfazendo $\varphi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \det(I_n) = 1$. Mostraremos que

$$\psi \in A^n(W) \quad \text{e} \quad \psi(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = 1, \tag{4}$$

que implica $\psi = \varphi$. Supondo isso, completamos a demonstração do teorema como segue.

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$.

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_\alpha"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$.

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T))$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T))$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T)))$$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T))$$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T)) = \det(T).$$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[rd, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] & \\
W^n \arrow[ru, "\rho_\alpha"] \arrow[rd, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ru, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T)) = \det(T).$$

Provemos (4).

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T)) = \det(T).$$

Provemos (4). Como $\rho_\alpha(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \mathrm{Id}_V$, a segunda afirmação segue pois $\delta(\mathrm{Id}) = 1$.

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
 & M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T)) = \det(T).$$

Provemos (4). Como $\rho_\alpha(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \mathrm{Id}_V$, a segunda afirmação segue pois $\delta(\mathrm{Id}) = 1$. Tome $1 \leq k \leq n$, $A, A_j \in W, 1 \leq j \leq n, \lambda \in \mathbb{F}$

Considere o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\mu_\alpha : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F}), \quad T \mapsto [T]_\alpha^\alpha.$$

Resumindo as definições feitas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \arrow[dd, "\mu_\alpha"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
W^n \arrow[ur, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{F} \\
& M_n(\mathbb{F}) \arrow[ur, "\det"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $\det(T) = \det(\mu_\alpha(T))$. Além disso, por definição de ρ_α, temos $\nu = \mu_\alpha \circ \rho_\alpha$. Assim,

$$\delta(T) = \psi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \varphi(\rho_\alpha^{-1}(T)) = \det(\nu(\rho_\alpha^{-1}(T))) = \det(\mu_\alpha(T)) = \det(T).$$

Provemos (4). Como $\rho_\alpha(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}) = \mathrm{Id}_V$, a segunda afirmação segue pois $\delta(\mathrm{Id}) = 1$. Tome $1 \le k \le n$, $A, A_j \in W, 1 \le j \le n, \lambda \in \mathbb{F}$ e considere

$$T = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n), \quad S = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n),$$
$$\text{e} \quad R = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n).$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$.

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n)$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \delta(R)$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n))$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\ &= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n))\end{aligned}$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n))
\end{aligned}$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear.

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\ &= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\ &= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\ &= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada.

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada. De fato, dadas $A_1, \ldots, A_n \in W$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada. De fato, dadas $A_1, \ldots, A_n \in W$, suponha que existam $1 \leq j < k \leq n$ tais que $A_j = A_k$.

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, &A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\ \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\ \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada. De fato, dadas $A_1, \ldots, A_n \in W$, suponha que existam $1 \leq j < k \leq n$ tais que $A_j = A_k$. Assim, se $T = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n)$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\
&= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\
&= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada. De fato, dadas $A_1, \ldots, A_n \in W$, suponha que existam $1 \leq j < k \leq n$ tais que $A_j = A_k$. Assim, se $T = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n)$, temos $T(v_j) = T(v_k)$

Veja que $R(v_j) = T(v_j) = S(v_j)$ se $j \neq k$ e $R(v_k) = T(v_k) + \lambda S(v_k)$. Então, se $\phi \in A^n(V)$ satisfaz $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + \lambda A, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= \delta(R) = \phi(R(v_1), \ldots, R(v_n)) \\ &= \phi(R(v_1), \ldots R(v_{k-1}), T(v_k) + \lambda S(v_k), R(v_{k+1}), \ldots, R(v_n)) \\ &= \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) + \lambda\, \phi(S(v_1), \ldots, S(v_n)) \\ &= \psi(A_1, \ldots, A_n) + \lambda\, \psi(A_1, \ldots, A_{k-1}, A, A_{k+1}, \ldots, A_n).\end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é n-linear. Finalmente, mostremos que ψ é alternada. De fato, dadas $A_1, \ldots, A_n \in W$, suponha que existam $1 \leq j < k \leq n$ tais que $A_j = A_k$. Assim, se $T = \rho_\alpha(A_1, \ldots, A_n)$, temos $T(v_j) = T(v_k)$ e, portanto,

$$\psi(A_1, \ldots, A_n) = \delta(T) = \phi(T(v_1), \ldots, T(v_n)) = 0,$$

já que ϕ é alternada. □

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".
Ou seja, se para toda $\psi \in S^k(V, W)$ sendo W um espaço vetorial, existir única $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Teorema 10.4.6

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência simétrica para V.

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".
Ou seja, se para toda $\psi \in S^k(V, W)$ sendo W um espaço vetorial, existir única $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Teorema 10.4.6

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência simétrica para V. Seja $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_{\leq} = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in V^k : i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k\}$.

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".
Ou seja, se para toda $\psi \in S^k(V, W)$ sendo W um espaço vetorial, existir única $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Teorema 10.4.6

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência simétrica para V. Seja $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_{\leq} = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in V^k : i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência simétrica para V, $\phi(\alpha^k_{\leq})$ é base para U.

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".
Ou seja, se para toda $\psi \in S^k(V, W)$ sendo W um espaço vetorial, existir única $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Teorema 10.4.6

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência simétrica para V. Seja $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_{\leq} = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in V^k : i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência simétrica para V, $\phi(\alpha^k_{\leq})$ é base para U.

Teorema 10.4.7

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência simétrica para V

Potências Simétricas

Uma k-ésima potência simétrica para V é um par (ϕ, U) com $\phi \in S^k(V, U)$ que é universal sobre $V^k = V \times \cdots \times V$ com respeito às propriedades $P_1 =$ "ser k-linear simétrica" e $P_2 =$ "ser linear".
Ou seja, se para toda $\psi \in S^k(V, W)$ sendo W um espaço vetorial, existir única $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ tal que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$.

Teorema 10.4.6

Para todo $k \geq 1$, existe k-ésima potência simétrica para V. Seja $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V, $\leq$ uma relação de ordem total em I e $\alpha^k_{\leq} = \{(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in V^k : i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k\}$. Então, se (ϕ, U) é k-ésima potência simétrica para V, $\phi(\alpha^k_{\leq})$ é base para U.

Teorema 10.4.7

Se (ϕ, U) é uma k-ésima potência simétrica para V, para todo espaço vetorial W, a função $\Gamma : S^k(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$.

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$.

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Pelo Teorema 10.4.6, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Pelo Teorema 10.4.6, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \odot \cdots \odot v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$$

formam uma base de S^kV.

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Pelo Teorema 10.4.6, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \odot \cdots \odot v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$$

formam uma base de S^kV. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \leq j \leq k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Pelo Teorema 10.4.6, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \odot \cdots \odot v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$$

formam uma base de S^kV. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(S^kV) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1} \quad \text{para todo} \quad k \geq 1.$$

Potências Simétricas – Notação e Dimensão

Denotaremos por S^kV o espaço vetorial do par universal de uma k-ésima potência simétrica para V enquanto que a correspondente função k-linear do par será denotada por $\odot$. Dados $v_j \in V, 1 \le j \le k$, usaremos a notação

$$v_1 \odot \cdots \odot v_k = \odot(v_1, \ldots, v_k).$$

O fato de $\odot$ ser simétrica se expressa nesta notação por

$$v_1 \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_k = v_1 \odot \cdots \odot v_j \odot \cdots \odot v_i \odot \cdots \odot v_k$$

para quaisquer $1 \le i < j \le k$. Pelo Teorema 10.4.6, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e uma relação de ordem total em I, os vetores da forma

$$v_{i_1} \odot \cdots \odot v_{i_k} \quad \text{com} \quad i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k$$

formam uma base de S^kV. Em particular, se $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos

$$\dim(S^kV) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1} \quad \text{para todo} \quad k \ge 1.$$

Segue então do Teorema 10.4.7 que

$$\dim(S^k(V,W)) = \binom{n+k-1}{k} \dim(W) \quad \text{para todo} \quad k \ge 1.$$