

# Álgebra Linear Avançada

## Operadores Autoadjuntos

Adriano Moura

Unicamp

2020

# Adjunta de uma Transformação Linear

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ .

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ .

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas



# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas e uma função  $S$  satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de  $T$  à esquerda com respeito a  $(\phi, \psi)$ .

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas e uma função  $S$  satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de  $T$  à esquerda com respeito a  $(\phi, \psi)$ .

## Lema 9.6.2

Suponha que  $\phi$  é não degenerada à direita.

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas e uma função  $S$  satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de  $T$  à esquerda com respeito a  $(\phi, \psi)$ .

## Lema 9.6.2

Suponha que  $\phi$  é não degenerada à direita.

- Se  $S$  é adjunta à direita de  $T$ , então  $S$  é linear.

## Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas e uma função  $S$  satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de  $T$  à esquerda com respeito a  $(\phi, \psi)$ .

### Lema 9.6.2

Suponha que  $\phi$  é não degenerada à direita.

- a** Se  $S$  é adjunta à direita de  $T$ , então  $S$  é linear.
- b** Se  $S_1$  e  $S_2$  forem adjuntas à direita de  $T$ , então  $S_1 = S_2$ .

# Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$  e  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ . Uma função  $S : W \rightarrow V$  é dita uma adjunta de  $T$  à direita com respeito a  $(\phi, \psi)$  se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

Se  $\phi \in B_s(V)$  e  $\psi \in B_s(W)$ , esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \quad \forall v \in V, w \in W$$

e o mesmo ocorre se  $\phi \in B_a(V)$  e  $\psi \in B_a(W)$ . Em geral estas condições são distintas e uma função  $S$  satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de  $T$  à esquerda com respeito a  $(\phi, \psi)$ .

## Lema 9.6.2

Suponha que  $\phi$  é não degenerada à direita.

- a** Se  $S$  é adjunta à direita de  $T$ , então  $S$  é linear.
- b** Se  $S_1$  e  $S_2$  forem adjuntas à direita de  $T$ , então  $S_1 = S_2$ .

Denotaremos por  $T_\psi^\phi$  a adjunta à direita de  $T$  com respeito a  $(\phi, \psi)$  quando ela existir e  $\phi$  for não degenerada à direita.

# Demonstração do Lema 9.6.2

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall \quad w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$



## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) = \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2)$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) = \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2)$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) \end{aligned}$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$ :

$$\phi(v, S_1(w) - S_2(w))$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$ :

$$\phi(v, S_1(w) - S_2(w)) = \phi(v, S_1(w)) - \phi(v, S_2(w))$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$ :

$$\begin{aligned} \phi(v, S_1(w) - S_2(w)) &= \phi(v, S_1(w)) - \phi(v, S_2(w)) \\ &= \psi(T(v), w) - \psi(T(v), w) \end{aligned}$$



## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$ :

$$\begin{aligned} \phi(v, S_1(w) - S_2(w)) &= \phi(v, S_1(w)) - \phi(v, S_2(w)) \\ &= \psi(T(v), w) - \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall v \in V, w \in W. \quad \square \end{aligned}$$

## Demonstração do Lema 9.6.2

Como  $\phi$  é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \quad \forall v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que  $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi) \quad \forall w \in W$ :

$$\begin{aligned} \phi(v, S_1(w) - S_2(w)) &= \phi(v, S_1(w)) - \phi(v, S_2(w)) \\ &= \psi(T(v), w) - \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall v \in V, w \in W. \quad \square \end{aligned}$$

**Exercício:** Se  $\alpha$  for base de  $V$  e  $\beta$  de  $W$ ,  $[T_\psi]_\alpha^\beta = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\beta^\alpha)^t [\psi]_\beta$ .



# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora.

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$



## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow$$

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

Assim,

$$\phi(v, S(w))$$

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

Assim,

$$\phi(v, S(w)) = \phi\left(v, D_\phi^{-1}(T^t(D_\psi(w)))\right)$$

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

Assim,

$$\phi(v, S(w)) = \phi\left(v, D_\phi^{-1}(T^t(D_\psi(w)))\right) = (T^t(D_\psi(w)))(v)$$

# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w)) &= \phi\left(v, D_\phi^{-1}(T^t(D_\psi(w)))\right) = (T^t(D_\psi(w)))(v) \\ &= (D_\psi(w))(T(v)) \end{aligned}$$

# Existência

## Proposição 9.6.3

Se  $\dim(V) < \infty$  e  $\phi$  é não degenerada, existe adjunta à direita de  $T$ .

**Dem.:** As hipóteses garantem que  $D_\phi$  é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$
$$\begin{array}{ccc} W & \overset{S}{\dashrightarrow} & V \\ D_\psi \downarrow & & \uparrow D_\phi^{-1} \\ W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \end{array}$$

Verifiquemos que  $S$  é adjunta de  $T$ .

Por definição de  $D_\phi$ , dada  $f \in V^*$ , temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \phi(v, u) \quad \forall v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \quad \forall v \in V, f \in V^*.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w)) &= \phi\left(v, D_\phi^{-1}(T^t(D_\psi(w)))\right) = (T^t(D_\psi(w)))(v) \\ &= (D_\psi(w))(T(v)) = \psi(T(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W. \quad \square \end{aligned}$$



# Algumas Propriedades

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas.

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  é  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .



# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  é  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp_{\phi}}$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  é  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi}$ . Em particular,  $T$  é injetora se, e só se,  $T_{\psi}^{\phi}$  for sobrejetora.

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  e  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi}$ . Em particular,  $T$  é injetora se, e só se,  $T_{\psi}^{\phi}$  for sobrejetora. Além disso, se  $\mathcal{N}(T)$  for não degenerado,  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  e  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi}$ . Em particular,  $T$  é injetora se, e só se,  $T_{\psi}^{\phi}$  for sobrejetora. Além disso, se  $\mathcal{N}(T)$  for não degenerado,  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})$ .
- b  $\mathcal{N}(T_{\psi}^{\phi}) = \text{Im}(T)^{\perp\psi}$ .

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  e  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi}$ . Em particular,  $T$  é injetora se, e só se,  $T_{\psi}^{\phi}$  for sobrejetora. Além disso, se  $\mathcal{N}(T)$  for não degenerado,  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})$ .
- b  $\mathcal{N}(T_{\psi}^{\phi}) = \text{Im}(T)^{\perp\psi}$ . Assim, se  $\psi$  é não degenerada,  $T_{\psi}^{\phi}$  é injetora se, e só se,  $T$  for sobrejetora.

# Algumas Propriedades

**Exercício:** Sejam  $\phi \in B(V)$ ,  $\psi \in B(W)$ ,  $\xi \in B(U)$  e suponha que  $V$  e  $W$  têm dimensão finita e  $\phi$  e  $\psi$  sejam não degeneradas. Mostre que:

- a Se  $S, T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ , vale  $(S + \lambda T)_{\xi}^{\psi} = S_{\xi}^{\psi} + \lambda T_{\xi}^{\psi}$ .
- b Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  e  $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ , vale  $(S \circ T)_{\xi}^{\phi} = T_{\psi}^{\phi} \circ S_{\xi}^{\psi}$ .
- c Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  é invertível, então  $(T^{-1})_{\phi}^{\psi} = (T_{\psi}^{\phi})^{-1}$ .
- d Se  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ , vale  $(T_{\psi}^{\phi})_{\phi}^{\psi} = T$ .

Suponha,  $\dim(V) < \infty$ ,  $\phi \in B_{as}(V)$  e  $\phi$  não degenerada e  $\psi \in B_{as}(W)$ .

## Lema 9.6.5

- a Se  $\psi$  é não degenerada,  $\mathcal{N}(T) = \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi}$ . Em particular,  $T$  é injetora se, e só se,  $T_{\psi}^{\phi}$  for sobrejetora. Além disso, se  $\mathcal{N}(T)$  for não degenerado,  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi})$ .
- b  $\mathcal{N}(T_{\psi}^{\phi}) = \text{Im}(T)^{\perp\psi}$ . Assim, se  $\psi$  é não degenerada,  $T_{\psi}^{\phi}$  é injetora se, e só se,  $T$  for sobrejetora. Além disso, se  $\dim(W) < \infty$  e ambos  $W$  e  $\mathcal{N}(T_{\psi}^{\phi})$  forem não degenerados,  $W = \mathcal{N}(T_{\psi}^{\phi}) \oplus \text{Im}(T)$ .

# Demonstração do Lema 9.6.5

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$



## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a).

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ .

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3.

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (\text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi})^{\perp\phi}$$

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (Im(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi})^{\perp\phi} \stackrel{*}{=} \mathcal{N}(T) \oplus Im(T_{\psi}^{\phi}),$$

onde  $*$  segue da Proposição 9.4.1(c).

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (\text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi})^{\perp\phi} \stackrel{*}{=} \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi}),$$

onde  $*$  segue da Proposição 9.4.1(c). Isso demonstra a parte (a).



## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (\text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi})^{\perp\phi} \stackrel{*}{=} \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi}),$$

onde  $*$  segue da Proposição 9.4.1(c). Isso demonstra a parte (a).

A demonstração da parte (b) é idêntica e fica de exercício. □

## Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo  $\psi$  não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T(v), w) = 0 \quad \forall \quad w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(v, T_{\psi}^{\phi}(w)) = 0 \quad \forall \quad w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como  $\phi$  é não degenerada, para um subespaço  $U$  de  $V$  vale:  $U^{\perp\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$ . Para a última afirmação, sendo  $\mathcal{N}(T)$  não degenerado, segue que  $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp\phi}$  pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (\text{Im}(T_{\psi}^{\phi})^{\perp\phi})^{\perp\phi} \stackrel{*}{=} \mathcal{N}(T) \oplus \text{Im}(T_{\psi}^{\phi}),$$

onde  $*$  segue da Proposição 9.4.1(c). Isso demonstra a parte (a).

A demonstração da parte (b) é idêntica e fica de exercício. □

O último objetivo é obter uma versão dos teoremas espectrais estudados na Seção 7.5 no contexto de formas bilineares simétricas.

# Operadores Auto-Adjuntos

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ .

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$



# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ .

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_{\alpha} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_{\alpha} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_{\alpha}^{\alpha} = [\phi]_{\alpha}^{-1} ([T]_{\alpha}^{\alpha})^t [\phi]_{\alpha}$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_{\alpha} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_{\alpha}^{\alpha} = [\phi]_{\alpha}^{-1} ([T]_{\alpha}^{\alpha})^t [\phi]_{\alpha}$ , segue que  $[T^\phi]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_{\alpha} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_{\alpha}^{\alpha} = [\phi]_{\alpha}^{-1} ([T]_{\alpha}^{\alpha})^t [\phi]_{\alpha}$ , segue que  $[T^\phi]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , i.e.,  $T^\phi = T$ .



# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_\alpha = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^t [\phi]_\alpha$ , segue que  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha$ , i.e.,  $T^\phi = T$ .

## Lema 9.6.6

Suponha que  $T$  seja autoadjunto com respeito a  $\phi$ .

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_\alpha = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^t [\phi]_\alpha$ , segue que  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha$ , i.e.,  $T^\phi = T$ .

## Lema 9.6.6

Suponha que  $T$  seja autoadjunto com respeito a  $\phi$ .

- Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.

# Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que  $\phi \in B_s(V)$  e  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . Denotaremos a adjunta de  $T$  com respeito a  $(\phi, \phi)$  simplesmente por  $T^\phi$ .  $T$  é dito auto-adjunto (com respeito a  $\phi$ ) se  $T^\phi = T$ , i.e.,  $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \forall v, w \in V$ .

## Teorema Espectral

Suponha que  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado,  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$  e que  $V$  é anisotrópico com respeito a  $\phi$ . Existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for auto-adjunto.

Suponha que  $\alpha$  seja base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , de modo que

$$[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_\alpha = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Como  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^t [\phi]_\alpha$ , segue que  $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha$ , i.e.,  $T^\phi = T$ .

## Lema 9.6.6

Suponha que  $T$  seja autoadjunto com respeito a  $\phi$ .

- a** Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- b** Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^{\perp_\phi}$  é  $T$ -invariante.

# Demonstração do Teorema Espectral

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto.

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ .

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ .



# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp}$ .

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ .

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido.

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor.



# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos.

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V$$

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Se  $\alpha = v_1, \dots, v_n$  é base de  $V$  e  $[\phi]_{\alpha} = (\phi(v_j, v_i))_{(i,j)}$

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Se  $\alpha = v_1, \dots, v_n$  é base de  $V$  e  $[\phi]_{\alpha} = (\phi(v_j, v_i))_{(i,j)}$ , temos

$$\phi(u, v) = [v]_{\alpha}^* [\psi]_{\alpha} [u]_{\alpha}.$$

# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Se  $\alpha = v_1, \dots, v_n$  é base de  $V$  e  $[\phi]_{\alpha} = (\phi(v_j, v_i))_{(i,j)}$ , temos

$$\phi(u, v) = [v]_{\alpha}^* [\psi]_{\alpha} [u]_{\alpha}. \quad \text{Note que } [\phi]_{\alpha} = ([\phi]_{\alpha})^*$$



# Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que  $T$  é auto-adjunto. Como  $\mathbb{F}$  é algebricamente fechado, existe um autovetor  $w$  para  $T$ . Seja  $W = [w]$ . Como  $V$  é anisotrópico,  $W$  é não degenerado e, portanto,  $V = W \oplus W^{\perp\phi}$ . Como  $\phi$  é não degenerada,  $W^{\perp\phi}$  é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior,  $W^{\perp\phi}$  é  $T$ -invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de  $V$  (que obviamente se inicia), existe base  $\alpha$  de  $W^{\perp\phi}$  ortogonal com respeito a  $\phi$  e formada por autovetores de  $T$ . Logo,  $\beta = \alpha \cup \{w\}$  é uma base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ . □

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  e  $\phi$  é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se  $V$  é  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial,  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  é dita um p.i. em  $V$  se for linear na 1ª entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \quad \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Se  $\alpha = v_1, \dots, v_n$  é base de  $V$  e  $[\phi]_{\alpha} = (\phi(v_j, v_i))_{(i,j)}$ , temos

$$\phi(u, v) = [v]_{\alpha}^* [\psi]_{\alpha} [u]_{\alpha}. \quad \text{Note que } [\phi]_{\alpha} = ([\phi]_{\alpha})^* \text{ e } [\phi]_{\beta} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^* [\phi]_{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}.$$

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma.

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção.

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9.

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ .

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ . Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$



# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ . Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$

$T$  é dito normal se  $T \circ T^\phi = T^\phi \circ T$ .

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ . Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$

$T$  é dito normal se  $T \circ T^\phi = T^\phi \circ T$ . Operadores auto-adjuntos são normais.

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ . Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$

$T$  é dito normal se  $T \circ T^\phi = T^\phi \circ T$ . Operadores auto-adjuntos são normais.

## Teorema Espectral

Se  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e  $\phi$  é produto interno em  $V$

# Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9. Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} ([T]_\alpha^\alpha)^* [\phi]_\alpha$$

Se  $\alpha$  é base ortonormal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$ , temos  $[T]_\alpha^\alpha = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $[\phi]_\alpha = I$ . Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$

$T$  é dito normal se  $T \circ T^\phi = T^\phi \circ T$ . Operadores auto-adjuntos são normais.

## Teorema Espectral

Se  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e  $\phi$  é produto interno em  $V$ , existe base ortogonal de  $V$  com respeito a  $\phi$  formada por autovetores de  $T$  se, e somente se,  $T$  for normal.

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

Ⓐ Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.



# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 = \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$



# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \bar{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a** Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b** Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c** Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \bar{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

Finalmente, se  $w \perp v$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \bar{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

Finalmente, se  $w \perp v$ :  $\langle T(w), v \rangle = \langle w, T^\phi(v) \rangle$



# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \bar{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

Finalmente, se  $w \perp v$ :  $\langle T(w), v \rangle = \langle w, T^\phi(v) \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0$

# Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

## Lema 7.5.3

Suponha que  $T$  seja normal.

- a** Se  $T(v) = \lambda v$ , então  $T^\phi(v) = \bar{\lambda} v$ .
- b** Os auto-espacos de  $T$  são mutuamente ortogonais.
- c** Se  $v \in V_\lambda$ , então  $\{v\}^\perp$  é  $T$ -invariante.

**Dem.:** Escrevendo  $\phi(v, w) = \langle v, w \rangle$  e  $\|v\|^2 = \phi(v, v)$ , temos

$$\begin{aligned}\|T^\phi(v) - \bar{\lambda}v\|^2 &= \langle T^\phi(v), T^\phi(v) \rangle - \lambda \langle T^\phi(v), v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, T^\phi(v) \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T \circ T^\phi)(v) \rangle - \lambda \langle v, T(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle T(v), v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle v, (T^\phi \circ T)(v) \rangle - \lambda \langle v, \lambda v \rangle - \bar{\lambda} \langle \lambda v, v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ &= \langle T(v), T(v) \rangle - |\lambda|^2 \langle v, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Suponha agora que  $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$  e  $\lambda \neq \mu$  e mostremos que  $v \perp w$ :

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^\phi(w) \rangle = \langle v, \bar{\mu}w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle.$$

Segue que  $(\lambda - \bar{\mu}) \langle v, w \rangle = 0$  e, portanto,  $\langle v, w \rangle = 0$ .

Finalmente, se  $w \perp v$ :  $\langle T(w), v \rangle = \langle w, T^\phi(v) \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0 \Rightarrow T(w) \perp v$ .

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ . Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ .



### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ .

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

### Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

### Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S-\lambda I_W)} \setminus \{0\}$ .



## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S-\lambda I_W)} \setminus \{0\}$ . Sendo  $S$  auto-adjunto, temos

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S-\lambda I_W)} \setminus \{0\}$ . Sendo  $S$  auto-adjunto, temos

$$\lambda \langle w, w \rangle = \langle S(w), w \rangle$$

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S - \lambda I_W)} \setminus \{0\}$ . Sendo  $S$  auto-adjunto, temos

$$\lambda \langle w, w \rangle = \langle S(w), w \rangle = \langle w, S(w) \rangle$$

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S-\lambda I_W)} \setminus \{0\}$ . Sendo  $S$  auto-adjunto, temos

$$\lambda \langle w, w \rangle = \langle S(w), w \rangle = \langle w, S(w) \rangle = \bar{\lambda} \langle w, w \rangle.$$

## Corolário 7.5.4

Se  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é normal e  $c_T$  fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .

## Lema 7.5.5

Se  $T$  é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , são números reais.

**Dem.:** Visto como elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , temos  $c_T(t) = \prod_{j=1}^n (t - \lambda_j)$  com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Porém,  $\lambda_j$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\lambda_j \in \mathbb{F}$ .

Seja  $\alpha$  uma base ortonormal de  $V$ . Considere  $W = \mathbb{C}^n$  e seja  $\psi$  o produto interno usual em  $W$ . Considere também o único operador linear  $S$  em  $W$  que satisfaz  $[S]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ , sendo  $\beta$  a base canônica.

Como  $T$  é auto-adjunto e  $\alpha$  é ortonormal, vale  $([T]_{\alpha}^{\alpha})^* = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ . Então, por definição de  $S$  e  $\psi$ , segue que  $([S]_{\beta}^{\beta})^* = [S]_{\beta}^{\beta}$ . Logo,  $S$  é auto-adjunto.

Como  $c_T = c_S$ , segue que  $\lambda_j$  é autovalor de  $S$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $S$  e  $w \in W_{(S - \lambda I_W)} \setminus \{0\}$ . Sendo  $S$  auto-adjunto, temos

$$\lambda \langle w, w \rangle = \langle S(w), w \rangle = \langle w, S(w) \rangle = \bar{\lambda} \langle w, w \rangle.$$

Assim,  $\lambda = \bar{\lambda}$ , mostrando que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

