Álgebra Linear Avançada
Transformações Ortogonais e Simpléticas

Adriano Moura

Unicamp

2020

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ)

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \;\; \forall \;\; u, v \in V. \tag{1}$$

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$(1) \qquad \psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \;\; \forall \;\; u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

1. T é compatível com (ϕ, ψ).

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) T é compatível com (ϕ, ψ).
- (ii) Para toda base α de V, $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1}$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) T é compatível com (ϕ, ψ).

(ii) Para toda base α de V, $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.

(iii) Existe base α de V tal que $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$(1) \qquad \psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

1. (i) T é compatível com (ϕ, ψ).
2. (ii) Para toda base α de V, $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.
3. (iii) Existe base α de V tal que $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.

Note que (1) não impõe nenhuma condição em $\psi(w_1, w_2)$ se w_1 ou w_2 não está em $Im(T)$.

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$(1) \qquad \psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

1. (i) T é compatível com (ϕ, ψ).
2. (ii) Para toda base α de V, $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.
3. (iii) Existe base α de V tal que $[\phi]_\alpha = [\psi]_{T(\alpha)}$.

Note que (1) não impõe nenhuma condição em $\psi(w_1, w_2)$ se w_1 ou w_2 não está em $Im(T)$. Assim, podemos supor que T é sobrejetora.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,

$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,

$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos

$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,

$$v \in \; V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos

$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in \ V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in \ V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3)

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,

$$v \in \ V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos

$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora.

Com estes fatos em mente, a demonstração da seguinte proposição fica de exercício.

Proposição 9.5.2

Se $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$ com ϕ não degenerada

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora.

Com estes fatos em mente, a demonstração da seguinte proposição fica de exercício.

Proposição 9.5.2

Se $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$ com ϕ não degenerada, $\exists\ T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ sobrejetora e compatível com (ϕ, ψ) se, e só se,

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora.

Com estes fatos em mente, a demonstração da seguinte proposição fica de exercício.

Proposição 9.5.2

Se $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$ com ϕ não degenerada, $\exists\ T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ sobrejetora e compatível com (ϕ, ψ) se, e só se, $\dim(V) = \dim(W)$ e existirem bases α de V e β de W t.q. $[\phi]_\alpha = [\psi]_\beta$.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,
$$v \in \ V^{\perp_\phi} \quad \Rightarrow \quad T(v) \in W^{\perp_\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos
$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp_\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V. Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora.

Com estes fatos em mente, a demonstração da seguinte proposição fica de exercício.

Proposição 9.5.2

Se $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$ com ϕ não degenerada, $\exists\ T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ sobrejetora e compatível com (ϕ, ψ) se, e só se, $\dim(V) = \dim(W)$ e existirem bases α de V e β de W t.q. $[\phi]_\alpha = [\psi]_\beta$. Neste caso, T é necessariamente um isomorfismo.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V, temos $[\phi]_\alpha = [\phi]_\beta$ e segue que $[\phi]_\alpha = ([I]^{\beta}_{\alpha})^t\ [\phi]_\alpha\ [I]^{\beta}_{\alpha}$.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V, temos $[\phi]_\alpha = [\phi]_\beta$ e segue que $[\phi]_\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^t\ [\phi]_\alpha\ [I]_\alpha^\beta$. Por definição de β temos $[I]_\alpha^\beta = [T]_\alpha^\alpha$

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V, temos $[\phi]_\alpha = [\phi]_\beta$ e segue que $[\phi]_\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^t\ [\phi]_\alpha\ [I]_\alpha^\beta$. Por definição de β temos $[I]_\alpha^\beta = [T]_\alpha^\alpha$ e, portanto, $\det([\phi]_\alpha) = \det(([T]_\alpha^\alpha)^t) \det([\phi]_\alpha) \det([T]_\alpha^\alpha)$.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V, temos $[\phi]_\alpha = [\phi]_\beta$ e segue que $[\phi]_\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^t\ [\phi]_\alpha\ [I]_\alpha^\beta$. Por definição de β temos $[I]_\alpha^\beta = [T]_\alpha^\alpha$ e, portanto, $\det([\phi]_\alpha) = \det(([T]_\alpha^\alpha)^t) \det([\phi]_\alpha) \det([T]_\alpha^\alpha)$. Como $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ, isto é, com (ϕ, ϕ), no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v),\ u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer} \quad T, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo} \quad T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V, tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V, temos $[\phi]_\alpha = [\phi]_\beta$ e segue que $[\phi]_\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^t\ [\phi]_\alpha\ [I]_\alpha^\beta$. Por definição de β temos $[I]_\alpha^\beta = [T]_\alpha^\alpha$ e, portanto, $\det([\phi]_\alpha) = \det(([T]_\alpha^\alpha)^t)\det([\phi]_\alpha)\det([T]_\alpha^\alpha)$. Como $\det([\phi]_\alpha) \neq 0$, concluímos que $\det(T) = \pm 1$.

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W, isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W, isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função. Verificaremos a seguir que R_W^{ϕ} é uma reflexão.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W, isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função. Verificaremos a seguir que R_W^{ϕ} é uma reflexão. Por isso, ela é chamada de a reflexão simples associada a W (com respeito a ϕ).

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W, isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função. Verificaremos a seguir que R_W^{ϕ} é uma reflexão. Por isso, ela é chamada de a reflexão simples associada a W (com respeito a ϕ). Precisamos verificar que R_W^{ϕ} é compatível com ϕ e $\det(R_W^{\phi}) = -1$.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \to V, \qquad R_W^{\phi}(v) = v - 2\frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\, w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W, isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função. Verificaremos a seguir que R_W^{ϕ} é uma reflexão. Por isso, ela é chamada de a reflexão simples associada a W (com respeito a ϕ). Precisamos verificar que R_W^{ϕ} é compatível com ϕ e $\det(R_W^{\phi}) = -1$. Comece observando que

$$R_W^{\phi}(v) = \begin{cases} -v, & \text{se } v \in W, \\ v, & \text{se } v \in W^{\perp_\phi}. \end{cases} \tag{2}$$

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$.

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$ assim como

$$\phi(R_W^\phi(v_i), R_W^\phi(v_j)) = (-1)^{\delta_{i,1}+\delta_{j,1}}\ \phi(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j)\ \ \forall\ \ 1 \le i \le j \le n.$$

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$ assim como

$$\phi(R_W^\phi(v_i), R_W^\phi(v_j)) = (-1)^{\delta_{i,1}+\delta_{j,1}}\ \phi(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j) \ \ \forall \ \ 1 \le i \le j \le n.$$

Logo, $[\phi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$ e segue da Proposição 9.5.1 que R_W^ϕ é compatível com ϕ.

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$ assim como

$$\phi(R_W^\phi(v_i), R_W^\phi(v_j)) = (-1)^{\delta_{i,1}+\delta_{j,1}}\ \phi(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j) \ \ \forall \ \ 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Logo, $[\phi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$ e segue da Proposição 9.5.1 que R_W^ϕ é compatível com ϕ. Observe que (2) também mostra que

$$R_W^\phi \circ R_W^\phi = \mathrm{Id}_V. \tag{3}$$

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$ assim como

$$\phi(R_W^\phi(v_i), R_W^\phi(v_j)) = (-1)^{\delta_{i,1}+\delta_{j,1}}\ \phi(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j) \ \ \forall \ \ 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Logo, $[\phi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$ e segue da Proposição 9.5.1 que R_W^ϕ é compatível com ϕ. Observe que (2) também mostra que

$$R_W^\phi \circ R_W^\phi = \mathrm{Id}_V. \tag{3}$$

Se ϕ é um produto interno, o conjunto das reflexões simples coincide com o das reflexões ortogonais com respeito a hiperplanos (revisar a Seção 7.3).

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$.

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$,

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u,u) = \phi(v,v) \neq 0$.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u,u) = \phi(v,v) \neq 0$. Então, existe reflexão simples R tal que $R(v) \in \{u, -u\}$.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u,u) = \phi(v,v) \neq 0$. Então, existe reflexão simples R tal que $R(v) \in \{u, -u\}$.

Dem.: Considere $w_\pm = v \pm u$ e $W_\pm = [w_\pm]$.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u,u) = \phi(v,v) \neq 0$. Então, existe reflexão simples R tal que $R(v) \in \{u, -u\}$.

Dem.: Considere $w_\pm = v \pm u$ e $W_\pm = [w_\pm]$. Mostremos que pelo menos um dos dois vetores w_+ e w_- não é isotrópico.

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V), T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T-invariante, $W^{\perp_\phi}$ também é T-invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\operatorname{car}(\mathbb{F}) \neq 2, \phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u,u) = \phi(v,v) \neq 0$. Então, existe reflexão simples R tal que $R(v) \in \{u, -u\}$.

Dem.: Considere $w_\pm = v \pm u$ e $W_\pm = [w_\pm]$. Mostremos que pelo menos um dos dois vetores w_+ e w_- não é isotrópico. De fato,

$$\phi(w_\pm, w_\pm) = 2(\phi(u,u) \pm \phi(u,v)).$$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u.

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$.

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-)$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+)$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u.$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. □

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u.$
Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u.$ $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais.

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$.

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u.$

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u.$ □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$.

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$. Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \mathrm{Id}_V$.

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.
Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^{\phi}_{V}$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^\phi_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^\phi_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^\phi_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.
Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^\phi_{W_-}(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^\phi_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm\mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^\phi_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^\phi_V)^2$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$. Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm\mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^{\phi}_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^{\phi}_V)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$. Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^{\phi}_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^{\phi}_V)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada).

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^{\phi}_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^{\phi}_V)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v = T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q. $R(v) = \pm u$

Logo, se fosse $\phi(w_+,w_+)=\phi(w_-,w_-)=0$, teríamos $\phi(u,u)=\pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u)=0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+,w_-)=0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm)=\mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v)=\frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_++w_-)=\frac{1}{2}(w_--w_+)=-u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v)=u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n=\dim(V)\geq 1$. Se $n=1$, então $V=[v]$ para todo $v\in V\setminus\{0\}$ e temos $T(v)=\lambda v$. Como $\det(T)=\pm 1$, segue que $T=\pm\mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V=R^{\phi}_{V}$ e $\mathrm{Id}_V=(R^{\phi}_{V})^2$, fica demonstrado o caso $n=1$.

Se $n>1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F})\neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v=T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q. $R(v)=\pm u$, que existe pelo Lema 9.5.6.

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^{\phi}_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^{\phi}_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^{\phi}_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$. Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^{\phi}_{W_-}(v) = u$. $\square$

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^{\phi}_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^{\phi}_{V}$ e $\mathrm{Id}_V = (R^{\phi}_{V})^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v = T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q. $R(v) = \pm u$, que existe pelo Lema 9.5.6. Em particular, $U = [u]$ é $(R \circ T)$-invariante

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^\phi_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^\phi_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\ R^\phi_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$. Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^\phi_{W_-}(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^\phi_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm\mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^\phi_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^\phi_V)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v = T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q. $R(v) = \pm u$, que existe pelo Lema 9.5.6. Em particular, $U = [u]$ é $(R \circ T)$-invariante e, como $U^{\perp_\phi}$ é não degenerado

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u,u) = \pm\phi(u,v)$ e, portanto, $\phi(u,u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u. Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R^\phi_{W_+}(w_\pm) = \mp\, w_\pm$$

e, portanto, $R^\phi_{W_+}(v) = \frac{1}{2}\, R^\phi_{W_+}(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R^\phi_{W_-}(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\mathrm{End}^\phi_{\mathbb{F}}(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm\mathrm{Id}_V$. Como $-\mathrm{Id}_V = R^\phi_V$ e $\mathrm{Id}_V = (R^\phi_V)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v = T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q. $R(v) = \pm u$, que existe pelo Lema 9.5.6. Em particular, $U = [u]$ é $(R \circ T)$-invariante e, como $U^{\perp_\phi}$ é não degenerado, segue do Lema 9.5.3 que $U^{\perp_\phi}$ também é $(R \circ T)$-invariante.

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$.

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples.

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \le j \le m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

(4) $$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

(4) $$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

(5) $$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

(4) $$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

(5) $$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

(4) $$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

(5) $$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases} \tag{4}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m \tag{5}$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$.

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases} \tag{4}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m \tag{5}$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

(4) $$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

(5) $$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$, temos

$$(R_0 \circ \cdots \circ R_m)(u) = R_0(u)$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases} \tag{4}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m \tag{5}$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$, temos

$$(R_0 \circ \cdots \circ R_m)(u) = R_0(u) \overset{(4)}{=} R(T(u)).$$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases} \tag{4}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m \tag{5}$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$, temos

$$(R_0 \circ \cdots \circ R_m)(u) = R_0(u) \overset{(4)}{=} R(T(u)).$$

Como $V = U \oplus U^{\perp_\phi}$, segue que $R \circ T = R_0 \circ \cdots \circ R_m$

Seja S o operador linear em $U^{\perp_\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \qquad \text{e} \qquad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo} \quad w \in U^{\perp_\phi}.$$

Considere também

$$R_0 = \begin{cases} \mathrm{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases} \tag{4}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m \tag{5}$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp_\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp_\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$, temos

$$(R_0 \circ \cdots \circ R_m)(u) = R_0(u) \stackrel{(4)}{=} R(T(u)).$$

Como $V = U \oplus U^{\perp_\phi}$, segue que $R \circ T = R_0 \circ \cdots \circ R_m$, de onde conclui-se (5) já que $R^{-1} = R$ por (3).

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$.

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos

$R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$.

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j$$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j = w - 2\ \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\ w_j$$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\,\frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\,w_j = w - 2\,\frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\,w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\,\frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\,w_j = w - 2\,\frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\,w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j = w - 2\ \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\ w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. $\square$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\,\frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\,w_j = w - 2\,\frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\,w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j = w - 2\ \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\ w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. $\square$

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\,\frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\,w_j = w - 2\,\frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\,w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual e $T = \mathrm{Rot}^{w}_{\theta}$ com $\|w\| = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j = w - 2\ \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\ w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual e $T = \mathrm{Rot}^{w}_{\theta}$ com $\|w\| = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Escolha $w_1, w_2 \in V$ t.q. $\beta = w_1, w_2, w$ seja uma base ortonormal e $w = w_1 \times w_2$.

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\,\frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\,w_j = w - 2\,\frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\,w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual e $T = \mathrm{Rot}^w_\theta$ com $\|w\| = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Escolha $w_1, w_2 \in V$ t.q. $\beta = w_1, w_2, w$ seja uma base ortonormal e $w = w_1 \times w_2$. Assim

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a = \cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad b = \mathrm{sen}(\theta).$$

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp_\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R^{\psi}_{W_j} \qquad \text{com} \qquad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R^{\phi}_{W_j}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos $R^{\phi}_{W_j}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp_\phi}$, temos

$$R^{\phi}_{W_j}(w) = w - 2\ \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)}\ w_j = w - 2\ \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)}\ w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R^{\phi}_{W_j}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp_\phi}$, segue que $R^{\phi}_{W_j} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual e $T = \mathrm{Rot}^w_\theta$ com $\|w\| = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Escolha $w_1, w_2 \in V$ t.q. $\beta = w_1, w_2, w$ seja uma base ortonormal e $w = w_1 \times w_2$. Assim

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a = \cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad b = \mathrm{sen}(\theta).$$

Se $b = 0$ e $a = 1$, temos $T = \mathrm{Id}_V = (R^{\phi}_W)^2$ para qualquer de reta W.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^\perp = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^\perp = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.).

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u))$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^\perp = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^\perp = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R^{\phi}_{[w_2]}$.

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R^{\phi}_{[w_2]}$. Note que esta conclusão segue dos seguintes fatos verificados acima:

$$R(T(w_1)) = w_1,$$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R^{\phi}_{[w_2]}$. Note que esta conclusão segue dos seguintes fatos verificados acima:

$$R(T(w_1)) = w_1, \quad R(T(w)) = w$$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R^{\phi}_{[w_2]}$. Note que esta conclusão segue dos seguintes fatos verificados acima:

$$R(T(w_1)) = w_1, \quad R(T(w)) = w \quad \text{e} \quad R(T(w_2)) = -w_2.$$

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a-1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R^{\phi}_{W_-}$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^{\perp} = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$-invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w, temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ, $[w]^{\perp_\psi} = [w_2]$ também é S_1-invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ. Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u)), R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1, \det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R^{\phi}_{[w_2]}$. Note que esta conclusão segue dos seguintes fatos verificados acima:

$$R(T(w_1)) = w_1, \quad R(T(w)) = w \quad \text{e} \quad R(T(w_2)) = -w_2.$$

Assim, $\mathrm{Rot}^w_\theta = R^{\phi}_{W_-} \circ R^{\phi}_{[w_2]}$.

Transvecções Simpléticas

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v, w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v, w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ )$$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) = \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1,w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2,w)\ w\ )$$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned}\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1,w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2,w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1,v_2) + a\ \phi(v_2,w)\ \phi(v_1,w) \\ &+ a\ \phi(v_1,w)\ \phi(w,v_2)\end{aligned}$$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned}\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1,w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2,w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1,v_2) + a\ \phi(v_2,w)\ \phi(v_1,w) \\ &+ a\ \phi(v_1,w)\ \phi(w,v_2) = \phi(v_1,v_2).\end{aligned}$$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned}\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1,w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2,w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1,v_2) + a\ \phi(v_2,w)\ \phi(v_1,w) \\ &+ a\ \phi(v_1,w)\ \phi(w,v_2) = \phi(v_1,v_2).\end{aligned}$$

Teorema 9.5.11

Suponha que que $0 \neq \dim(V) < \infty$

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v, w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned}\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1, w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2, w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1, v_2) + a\ \phi(v_2, w)\ \phi(v_1, w) \\ &+ a\ \phi(v_1, w)\ \phi(w, v_2) = \phi(v_1, v_2).\end{aligned}$$

Teorema 9.5.11

Suponha que que $0 \neq \dim(V) < \infty$ e sejam $\phi \in B_a(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v,w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned}\phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1,w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2,w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1,v_2) + a\ \phi(v_2,w)\ \phi(v_1,w) \\ &+ a\ \phi(v_1,w)\ \phi(w,v_2) = \phi(v_1,v_2).\end{aligned}$$

Teorema 9.5.11

Suponha que que $0 \neq \dim(V) < \infty$ e sejam $\phi \in B_a(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é simplética se, e somente se, T for uma composição de transvecções simpléticas.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \to V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a\ \phi(v, w)\ w \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned} \phi(\ T_{w,a}(v_1)\ ,\ T_{w,a}(v_2)\ ) &= \phi(\ v_1 + a\ \phi(v_1, w)\ w\ ,\ v_2 + a\ \phi(v_2, w)\ w\ ) \\ &= \phi(v_1, v_2) + a\ \phi(v_2, w)\ \phi(v_1, w) \\ &+ a\ \phi(v_1, w)\ \phi(w, v_2) = \phi(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Teorema 9.5.11

Suponha que que $0 \neq \dim(V) < \infty$ e sejam $\phi \in B_a(V)$ não degenerada e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é simplética se, e somente se, T for uma composição de transvecções simpléticas.

Dem.: Exercício de leitura.