Álgebra Linear Avançada
Multilinearidade

Adriano Moura

Unicamp

2020

Funções Multilineares

Funções Multilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W, considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$$

das funções definidas em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a valores em W.

Funções Multilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W, considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$$

das funções definidas em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a valores em W. Uma função $\phi \in \mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ é dita k-linear se for linear em cada entrada separadamente.

Funções Multilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W, considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$$

das funções definidas em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a valores em W. Uma função $\phi \in \mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ é dita k-linear se for linear em cada entrada separadamente. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v + \lambda v', v_{i_0+1}, \ldots, v_k) = \\ \phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v, v_{i_0+1}, \ldots, v_k) + \\ \lambda\, \phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v', v_{i_0+1}, \ldots, v_k)\end{aligned}$$

para quaisquer $1 \leq i_0 \leq k, v_i \in V_i, i \neq i_0, v, v' \in V_{i_0}, \lambda \in \mathbb{F}$.

Funções Multilineares

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W, considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$$

das funções definidas em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a valores em W. Uma função $\phi \in \mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ é dita k-linear se for linear em cada entrada separadamente. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v + \lambda v', v_{i_0+1}, \ldots, v_k) = \\ \phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v, v_{i_0+1}, \ldots, v_k) + \\ \lambda\, \phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v', v_{i_0+1}, \ldots, v_k)\end{aligned}$$

para quaisquer $1 \le i_0 \le k, v_i \in V_i, i \ne i_0, v, v' \in V_{i_0}, \lambda \in \mathbb{F}$.

Denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}\left(V_1, \ldots, V_k, W\right)$$

o subconjunto de $\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ formados pelas funções k-lineares.

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_k$ e W, considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$$

das funções definidas em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a valores em W. Uma função $\phi \in \mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ é dita k-linear se for linear em cada entrada separadamente. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v + \lambda v', &v_{i_0+1}, \ldots, v_k) = \\ &\phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v, v_{i_0+1}, \ldots, v_k) + \\ &\lambda\ \phi(v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v', v_{i_0+1}, \ldots, v_k)\end{aligned}$$

para quaisquer $1 \leq i_0 \leq k, v_i \in V_i, i \neq i_0, v, v' \in V_{i_0}, \lambda \in \mathbb{F}$.

Denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}\left(V_1, \ldots, V_k, W\right)$$

o subconjunto de $\mathcal{F}\left(V_1 \times \cdots \times V_k, W\right)$ formados pelas funções k-lineares. Não confundir com $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k, W\right)$.

Exemplos

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Se $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq k$, simplificaremos a notação escrevendo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \ldots, V, W)$.

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Se $V_i = V$ para todo $1 \le i \le k$, simplificaremos a notação escrevendo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \ldots, V, W)$. Se $W = \mathbb{F}$, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \mathbb{F})$ é chamado de uma forma k-linear em V.

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Se $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq k$, simplificaremos a notação escrevendo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \ldots, V, W)$. Se $W = \mathbb{F}$, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \mathbb{F})$ é chamado de uma forma k-linear em V. Por exemplo, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, um produto interno em V é uma forma bilinear em V, isto é, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{2}(V, \mathbb{R})$.

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Se $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq k$, simplificaremos a notação escrevendo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \ldots, V, W)$. Se $W = \mathbb{F}$, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \mathbb{F})$ é chamado de uma forma k-linear em V. Por exemplo, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, um produto interno em V é uma forma bilinear em V, isto é, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{2}(V, \mathbb{R})$.

Se $V_1, \ldots, V_k = M_{k,1}(\mathbb{F})$

Exemplos

Exercício: Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1, \ldots, V_k, W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Se $V_i = V$ para todo $1 \leq i \leq k$, simplificaremos a notação escrevendo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \ldots, V, W)$. Se $W = \mathbb{F}$, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V, \mathbb{F})$ é chamado de uma forma k-linear em V. Por exemplo, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, um produto interno em V é uma forma bilinear em V, isto é, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{2}(V, \mathbb{R})$.

Se $V_1, \ldots, V_k = M_{k,1}(\mathbb{F})$, a função

$$\phi : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{F}, \quad (A_1, \ldots, A_k) \mapsto \det([A_1 | \cdots | A_k])$$

é uma forma k-linear em $M_{k,1}(\mathbb{F})$.

Não Fechamento da Imagem

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata.

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.
Se $a_1 = 0$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.
Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$.

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$. No primeiro caso, escolhendo $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (a_3, a_4)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$. No primeiro caso, escolhendo $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (a_3, a_4)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. No segundo, escolha $v_1 = (a_2, a_4)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$. No primeiro caso, escolhendo $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (a_3, a_4)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. No segundo, escolha $v_1 = (a_2, a_4)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Considere então os vetores $w = (2, 2, 1, 1)$ e $w' = (1, 0, 1, 0)$.

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$. No primeiro caso, escolhendo $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (a_3, a_4)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. No segundo, escolha $v_1 = (a_2, a_4)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Considere então os vetores $w = (2, 2, 1, 1)$ e $w' = (1, 0, 1, 0)$. Pelo parágrafo anterior, $w, w' \in Im(\phi)$

Não Fechamento da Imagem

Considere $V = \mathbb{F}^2$, $W = \mathbb{F}^4$ e $\phi \in \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V, W)$ dada por

$$\phi(v_1, v_2) = (x_1x_2, x_1y_2, y_1x_2, y_1y_2) \quad \text{para} \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2).$$

Observe que

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in Im(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1a_4 = a_2a_3.$$

A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Reciprocamente, Se $a_1 \neq 0$, escolhendo $v_1 = (1, a_3/a_1)$ e $v_2 = (a_1, a_2)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Se $a_1 = 0$, então ou $a_2 = 0$ ou $a_3 = 0$. No primeiro caso, escolhendo $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (a_3, a_4)$, temos $\phi(v_1, v_2) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. No segundo, escolha $v_1 = (a_2, a_4)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Considere então os vetores $w = (2, 2, 1, 1)$ e $w' = (1, 0, 1, 0)$. Pelo parágrafo anterior, $w, w' \in Im(\phi)$ e $w + w' = (3, 2, 2, 1) \notin Im(\phi)$.

Bases e Multilinearidade

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$

Bases e Multilinearidade

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\ !\ \phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q.

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i\in I_j}$ é base para V_j, $1 \le j \le k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i\in I_j}$ é base para V_j, $1 \le j \le k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^{k}(V_1,\ldots,V_k,W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1},\ldots,v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \le j \le k$, I e W como no Teorema 9.1.3

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\, !\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W.

Bases e Multilinearidade

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$, defina $\mathbf{v_i} = (v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k})$

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\, !\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$, defina $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = (v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k})$ e, dado $(\mathbf{i}, s) \in I \times S$

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i\in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s\in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$, defina $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = (v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k})$ e, dado $(\mathbf{i}, s) \in I \times S$, seja $\phi_{\mathbf{i},s} \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$ o elemento satisfazendo

$$\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{i}' \in I.$$

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$, defina $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = (v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k})$ e, dado $(\mathbf{i}, s) \in I \times S$, seja $\phi_{\mathbf{i},s} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ o elemento satisfazendo

$$\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{i}' \in I.$$

Então, $(\phi_{\mathbf{i},s})_{(\mathbf{i},s) \in I \times S}$ é uma família l.i. em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ é base para V_j, $1 \leq j \leq k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\, !\ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \leq j \leq k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$, defina $\mathbf{v_i} = (v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_k,k})$ e, dado $(\mathbf{i}, s) \in I \times S$, seja $\phi_{\mathbf{i},s} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ o elemento satisfazendo

$$\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{i}' \in I.$$

Então, $(\phi_{\mathbf{i},s})_{(\mathbf{i},s) \in I \times S}$ é uma família l.i. em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$ e é uma base se $\dim(V_j) < \infty\ \forall\ 1 \leq j \leq k$.

Teorema 9.1.3

Se $\alpha_j = (v_{i,j})_{i\in I_j}$ é base para V_j, $1 \le j \le k$, $I = I_1 \times \cdots \times I_k$ e $(w_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in I}$ é uma família num espaço vetorial W, $\exists\,!\ \phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1,\ldots,V_k,W)$ t.q. $\phi(v_{i_1,1},\ldots,v_{i_k,k}) = w_{\mathbf{i}}\ \forall\ \mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_k) \in I$.

Proposição 9.1.4

Sejam $V_j, \alpha_j, 1 \le j \le k$, I e W como no Teorema 9.1.3 e $\beta = (w_s)_{s\in S}$ uma base de W. Dado $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_k) \in I$, defina $\mathbf{v_i} = (v_{i_1,1},\ldots,v_{i_k,k})$ e, dado $(\mathbf{i},s) \in I \times S$, seja $\phi_{\mathbf{i},s} \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1,\ldots,V_k,W)$ o elemento satisfazendo

$$\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{i}' \in I.$$

Então, $(\phi_{\mathbf{i},s})_{(\mathbf{i},s)\in I\times S}$ é uma família l.i. em $\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1,\ldots,V_k,W)$ e é uma base se $\dim(V_j) < \infty\ \forall\ 1 \le j \le k$. Neste caso,

$$\dim\left(\mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1,\ldots,V_k,W)\right) = \dim(W)\prod_{j=1}^{k}\dim(V_j).$$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Veja que, como $\gamma_l \neq \gamma_{l'}$ se $l \neq l'$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Veja que, como $\gamma_l \neq \gamma_{l'}$ se $l \neq l'$ e $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_{l'}$ se $l, l' \in \Omega_j$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Veja que, como $\gamma_l \neq \gamma_{l'}$ se $l \neq l'$ e $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_{l'}$ se $l, l' \in \Omega_j$, devemos ter

$$s_l \neq s_{l'} \quad \text{para todo} \quad l, l' \in \Omega_j,\ l \neq l'.$$

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Veja que, como $\gamma_l \neq \gamma_{l'}$ se $l \neq l'$ e $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_{l'}$ se $l, l' \in \Omega_j$, devemos ter

$$s_l \neq s_{l'} \quad \text{para todo} \quad l, l' \in \Omega_j,\ l \neq l'.$$

Assim, a família $(w_{s_l})_{l \in \Omega_j}$ é uma subfamília de β e, portanto, é l.i..

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \leq l \leq m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dados $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Veja que, como $\gamma_l \neq \gamma_{l'}$ se $l \neq l'$ e $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_{l'}$ se $l, l' \in \Omega_j$, devemos ter

$$s_l \neq s_{l'} \quad \text{para todo} \quad l, l' \in \Omega_j,\ l \neq l'.$$

Assim, a família $(w_{s_l})_{l \in \Omega_j}$ é uma subfamília de β e, portanto, é l.i.. Logo, $\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = 0$ só se $a_l = 0$ para todo $l \in \Omega_j$.

Dem.: Para cada subconjunto finito $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subseteq I \times S$, precisamos mostrar que

$$(1) \qquad a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m} = 0 \qquad \text{só se} \qquad a_1 = \cdots = a_m = 0.$$

Lembre: $\phi_{\mathbf{i},s}(\mathbf{v}_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}\ w_s$ para todo $\mathbf{i}' \in I$.

Escreva $\gamma_j = (\mathbf{i}_j, s_j)$ e defina

$$\Omega_j = \{l \in \mathbb{Z} : 1 \le l \le m, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_j\} \qquad \text{para cada} \qquad 1 \le j \le m.$$

Dados $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, se $\phi = a_1\phi_{\gamma_1} + \cdots + a_m\phi_{\gamma_m}$, temos

$$\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = \sum_{l \in \Omega_j} a_l\ w_{s_l} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \le j \le m.$$

Veja que, como $\gamma_l \ne \gamma_{l'}$ se $l \ne l'$ e $\mathbf{i}_l = \mathbf{i}_{l'}$ se $l, l' \in \Omega_j$, devemos ter

$$s_l \ne s_{l'} \quad \text{para todo} \quad l, l' \in \Omega_j,\ l \ne l'.$$

Assim, a família $(w_{s_l})_{l \in \Omega_j}$ é uma subfamília de β e, portanto, é l.i.. Logo, $\phi(\mathbf{v}_{\mathbf{i}_j}) = 0$ só se $a_l = 0$ para todo $l \in \Omega_j$. Variando j, (1) segue.

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall \ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito.

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \; \forall \; 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall \ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall \ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathbb{F}}(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ.

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall\ 1 \le j \le k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ. Além disso, para cada $\mathbf{i} \in I$, temos

$$\left(\sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma \right) (\mathbf{v_i})$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \; \forall \; 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ. Além disso, para cada $\mathbf{i} \in I$, temos

$$\left(\sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma \right) (\mathbf{v_i}) = \sum_{\substack{\gamma = (\mathbf{i}, s): \\ s \in S}} a_\gamma \phi_\gamma(\mathbf{v_i})$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ. Além disso, para cada $\mathbf{i} \in I$, temos

$$\left(\sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma \right)(\mathbf{v_i}) = \sum_{\substack{\gamma = (\mathbf{i}, s): \\ s \in S}} a_\gamma \phi_\gamma(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ. Além disso, para cada $\mathbf{i} \in I$, temos

$$\left(\sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma \right) (\mathbf{v_i}) = \sum_{\substack{\gamma = (\mathbf{i}, s): \\ s \in S}} a_\gamma \phi_\gamma (\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s = \phi(\mathbf{v_i}),$$

Suponha agora que $\dim(V_j) < \infty \; \forall \; 1 \leq j \leq k$ e, portanto, I é finito. Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V_1, \ldots, V_k, W)$, precisamos encontrar família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ tal que $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ e

$$\phi = \sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma.$$

Para definir tal família, veja que, para cada $\mathbf{i} \in I$, existe família de escalares $(a_{\mathbf{i},s})_{s \in S}$ com $a_{\mathbf{i},s} \neq 0$ para finitos valores de s e

$$\phi(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s.$$

Fica assim definida família de escalares $(a_\gamma)_{\gamma \in I \times S}$ e, como I é finito, $a_\gamma \neq 0$ para finitos valores de γ. Além disso, para cada $\mathbf{i} \in I$, temos

$$\left(\sum_{\gamma \in I \times S} a_\gamma \phi_\gamma \right) (\mathbf{v_i}) = \sum_{\substack{\gamma = (\mathbf{i}, s): \\ s \in S}} a_\gamma \phi_\gamma(\mathbf{v_i}) = \sum_{s \in S} a_{\mathbf{i},s} w_s = \phi(\mathbf{v_i}),$$

completando a demonstração.