Álgebra Linear Avançada
Bases Cíclicas

Adriano Moura

Unicamp

2020

Blocos e Ciclos de Jordan

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$.

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t - \lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$.

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t - \lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t - \lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T-\lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \dots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$ e, portanto,

$$[S]_\beta^\beta = J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(C_T(v))$ é dado por $S(w) = T(w)$ $\forall\ w \in C_T(v)$.

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T-\lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$ e, portanto,

$$[S]_\beta^\beta = J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(C_T(v))$ é dado por $S(w) = T(w)$ $\forall\ w \in C_T(v)$. A matriz $J_k(\lambda)$ é dita um bloco de Jordan de tamanho k e autovalor λ.

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \dots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$ e, portanto,

$$[S]_\beta^\beta = J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(C_T(v))$ é dado por $S(w) = T(w)$ $\forall\ w \in C_T(v)$. A matriz $J_k(\lambda)$ é dita um bloco de Jordan de tamanho k e autovalor λ.

Já uma sequência como β é dita um T-ciclo de Jordan de comprimento k e autovalor λ.

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T-\lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \dots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$ e, portanto,

$$[S]_\beta^\beta = J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(C_T(v))$ é dado por $S(w) = T(w)$ $\forall\ w \in C_T(v)$. A matriz $J_k(\lambda)$ é dita um bloco de Jordan de tamanho k e autovalor λ.

Já uma sequência como β é dita um T-ciclo de Jordan de comprimento k e autovalor λ. Uma base formada por união de T-ciclos de Jordan é dita uma base de Jordan (com respeito a T).

Decomposição de Jordan

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1.

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Se os subespaços T-primários de V forem T-cíclicos e escolhermos um gerador para cada T-ciclo

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Se os subespaços T-primários de V forem T-cíclicos e escolhermos um gerador para cada T-ciclo, o TDP junto com a página anterior nos diz como encontrar uma base de Jordan.

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Se os subespaços T-primários de V forem T-cíclicos e escolhermos um gerador para cada T-ciclo, o TDP junto com a página anterior nos diz como encontrar uma base de Jordan.

O que fazer se algum subespaço T-primário não for T-cíclico?

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Se os subespaços T-primários de V forem T-cíclicos e escolhermos um gerador para cada T-ciclo, o TDP junto com a página anterior nos diz como encontrar uma base de Jordan.

O que fazer se algum subespaço T-primário não for T-cíclico?

O que fazer se algum fator primo de m_T tiver grau maior que 1?

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$.

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^m C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^l C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$.

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^m C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^l C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$, temos

$$[S]_{\mathscr{C}_T(v)}^{\mathscr{C}_T(v)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$, temos

$$[S]_{\mathscr{C}_T(v)}^{\mathscr{C}_T(v)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de a matriz de Frobenius do polinômio m_v.

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$, temos

$$[S]_{\mathscr{C}_T(v)}^{\mathscr{C}_T(v)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de a matriz de Frobenius do polinômio m_v. (companion matrix)

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^m C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\, 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^l C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\, 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\, 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$, temos

$$[S]_{\mathscr{C}_T(v)}^{\mathscr{C}_T(v)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de a matriz de Frobenius do polinômio m_v. (companion matrix)

Uma base formada por união de conjuntos da forma $\mathscr{C}_T(v)$ é dita uma base racional (ou de Frobenius) de V com respeito a T.

Note que $m_T = m_{v_1}$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0\ \forall j$.

Bases Cíclicas e os Polinômios Mínimo e Característico

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j}|m_{v_1} \ \forall j$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1} \ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1} \ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus\limits_{j\,=\,1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \le j \le m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0\ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1}\ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0\ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j}|m_{v_1}\ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^{m} c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1} \ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^{m} c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1} \ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^{m} c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j, temos $c_T = \prod_{j=1}^{l} (t - \lambda_j)^{k_j}$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1} | m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0 \ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j} | m_{v_1} \ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j, temos $c_T = \prod_{j=1}^l (t - \lambda_j)^{k_j}$.

A quantidade de blocos de Jordan com autovalor λ é igual a $\dim(V_{t-\lambda})$.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0\ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j}|m_{v_1}\ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j, temos
$c_T = \prod_{j=1}^l (t - \lambda_j)^{k_j}$.

A quantidade de blocos de Jordan com autovalor λ é igual a $\dim(V_{t-\lambda})$. O exercício 8.2.4 diz como calcular a quantidade de blocos de cada tamanho sabendo-se $\dim(V_{(t-\lambda)^k})\ \forall\ k$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S-\lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan?

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S-\lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S-\lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S-\lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$. Defina também

$$v_i = v_{1,i} + \cdots + v_{l,i}.$$

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$. Defina também

$$v_i = v_{1,i} + \cdots + v_{l,i}.$$

Exercício: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} C_T(v_i)$ e $m_{v_{i+1}} | m_{v_i}$ $\forall\ 1 \leq i \leq m$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$. Defina também

$$v_i = v_{1,i} + \cdots + v_{l,i}.$$

Exercício: $V = \bigoplus_{i=1}^{m} C_T(v_i)$ e $m_{v_{i+1}} | m_{v_i}\ \forall\ 1 \leq i \leq m$.

Exercício: Reverta o processo, isto é, descreva como encontrar a FCJ a partir da FCR, se exisitr FCJ.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S-\lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$. Defina também

$$v_i = v_{1,i} + \cdots + v_{l,i}.$$

Exercício: $V = \bigoplus_{i=1}^{m} C_T(v_i)$ e $m_{v_{i+1}} | m_{v_i}$ $\forall\ 1 \leq i \leq m$.

Exercício: Reverta o processo, isto é, descreva como encontrar a FCJ a partir da FCR, se exisitr FCJ.

Tentem fazer o Exercício 8.3.1.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial. De fato, se w é um tal vetor, $\mathscr{C}_T(w)$ tem no máximo 2 vetores e o vetor final é múltiplo de e_3.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial. De fato, se w é um tal vetor, $\mathscr{C}_T(w)$ tem no máximo 2 vetores e o vetor final é múltiplo de e_3. Para justificar estas afirmações, encontre bases para V_t e V_{t^2}.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial. De fato, se w é um tal vetor, $\mathscr{C}_T(w)$ tem no máximo 2 vetores e o vetor final é múltiplo de e_3. Para justificar estas afirmações, encontre bases para V_t e V_{t^2}.
Isso mostra que não existe subespaço T-invariante W satisfazendo $\mathbb{R}^3 = C_T(w) \oplus W$.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial. De fato, se w é um tal vetor, $\mathscr{C}_T(w)$ tem no máximo 2 vetores e o vetor final é múltiplo de e_3. Para justificar estas afirmações, encontre bases para V_t e V_{t^2}.
Isso mostra que não existe subespaço T-invariante W satisfazendo $\mathbb{R}^3 = C_T(w) \oplus W$. Ou seja, $C_T(w)$ não admite subespaço complementar T-invariante!

Subespaços T-admissíveis

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC. Em particular, o TDC é óbvio se $\dim(V) = 1$.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC. Em particular, o TDC é óbvio se $\dim(V) = 1$. Assim, para demonstrar a existência de uma decomposição em soma direta de ciclos, podemos supor que V não é T-cíclico

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC. Em particular, o TDC é óbvio se $\dim(V) = 1$. Assim, para demonstrar a existência de uma decomposição em soma direta de ciclos, podemos supor que V não é T-cíclico e mostrar que existe subespaço T-cíclico W que é T-admissível.

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC. Em particular, o TDC é óbvio se $\dim(V) = 1$. Assim, para demonstrar a existência de uma decomposição em soma direta de ciclos, podemos supor que V não é T-cíclico e mostrar que existe subespaço T-cíclico W que é T-admissível. Por HI, o TDC vale para W e W', completando a demonstração.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto

$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$

é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto

$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$

é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

Exercício: $\exists!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathscr{C}_{T,v}(W)$.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

Exercício: $\exists!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathscr{C}_{T,v}(W)$. Este polinômio será denotado por $c_{v,W}$.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

Exercício: $\exists!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathscr{C}_{T,v}(W)$. Este polinômio será denotado por $c_{v,W}$.

Segue que $c_{v,W} | c_{v,W'}$ se $W' \subseteq W$ e, portanto, $c_{v,W} | m_v$.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

Exercício: $\exists!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathscr{C}_{T,v}(W)$. Este polinômio será denotado por $c_{v,W}$.

Segue que $c_{v,W} | c_{v,W'}$ se $W' \subseteq W$ e, portanto, $c_{v,W} | m_v$. Além disso, $c_{v,W} = 1$ se $v \in W$.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

a. Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

a. Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

(a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.

(b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

a. Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
b. $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

- a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
- b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\text{gr}(m_v) = \max\{\text{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

- (a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
- (b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\mathrm{gr}(m_v) = \max\{\mathrm{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

- (a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
- (b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\mathrm{gr}(m_v) = \max\{\mathrm{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5. Então, para todo vetor $u \in V$ satisfazendo $C_T(u) \cap (W \oplus C_T(v)) = \{0\}$

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

a. Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
b. $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\mathrm{gr}(m_v) = \max\{\mathrm{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5. Então, para todo vetor $u \in V$ satisfazendo $C_T(u) \cap (W \oplus C_T(v)) = \{0\}$, vale $m_u | m_v$.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

(a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.

(b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\text{gr}(m_v) = \max\{\text{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5. Então, para todo vetor $u \in V$ satisfazendo $C_T(u) \cap (W \oplus C_T(v)) = \{0\}$, vale $m_u | m_v$.

Para demonstrar a Prop., precisaremos da seguinte caracterização técnica do conceito de T-admissibilidade em termos do de condutor.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

a. Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
b. $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\mathrm{gr}(m_v) = \max\{\mathrm{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5. Então, para todo vetor $u \in V$ satisfazendo $C_T(u) \cap (W \oplus C_T(v)) = \{0\}$, vale $m_u | m_v$.

Para demonstrar a Prop., precisaremos da seguinte caracterização técnica do conceito de T-admissibilidade em termos do de condutor.

Se W é T-invariante, então W é T-admissível se, e só se, para todo $v \in V$ e $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$, existir $w \in W$ satisfazendo $f(T)(w) = f(T)(v)$.

Mais Observações Técnicas

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$. Então, $\mathscr{C}_{T,v}(W) = \mathscr{C}_{T,u}(W)$.

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$. Então, $\mathscr{C}_{T,v}(W) = \mathscr{C}_{T,u}(W)$.

Dem.: Seja $w = v - u$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$. Então, $\mathscr{C}_{T,v}(W) = \mathscr{C}_{T,u}(W)$.

Dem.: Seja $w = v - u$ e note que

$$f(T)(v) - f(T)(u) = f(T)(w) \in W \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$. Então, $\mathscr{C}_{T,v}(W) = \mathscr{C}_{T,u}(W)$.

Dem.: Seja $w = v - u$ e note que

$$f(T)(v) - f(T)(u) = f(T)(w) \in W \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Logo, $f \in \mathscr{C}_{T,u}(W)$ se, e somente se, $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. $\square$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$.

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$.

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'}$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$.

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$.

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer.

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v). \tag{1}$$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $\quad c_{u,W'} | p \qquad$ e $\qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad$ para algum $\quad w' \in W.$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $\quad c_{u,W'} | p \quad$ e $\quad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad$ para algum $\quad w' \in W$.

Supondo que isto é válido

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $$c_{u,W'} | p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W.$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = qc_{u,W'}$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $$c_{u,W'} | p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W.$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = qc_{u,W'}$ e $w'' = w' + q(T)(v) \in W'$

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $$c_{u,W'} | p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W.$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = qc_{u,W'}$ e $w'' = w' + q(T)(v) \in W'$, temos

$$c_{u,W'}(T)(u) = c_{u,W'}(T)(w') + c_{u,W'}(T)(q(T)(v))$$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v). \tag{1}$$

Mostraremos que

$$c_{u,W'} | p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W. \tag{2}$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = q c_{u,W'}$ e $w'' = w' + q(T)(v) \in W'$, temos

$$c_{u,W'}(T)(u) = c_{u,W'}(T)(w') + c_{u,W'}(T)(q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(w'')$$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

(1) $$c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

(2) $$c_{u,W'}|p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W.$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = qc_{u,W'}$ e $w'' = w' + q(T)(v) \in W'$, temos

$$c_{u,W'}(T)(u) = c_{u,W'}(T)(w') + c_{u,W'}(T)(q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(w''),$$

mostrando que W' é T-admissível.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$.
Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\operatorname{gr}(m_v) \geq \operatorname{gr}(c_{u',W}) \tag{3}$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\operatorname{gr}(m_v) \geq \operatorname{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{gr}(m_v) \geq \operatorname{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'}$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\stackrel{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\, h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

(3) $$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{gr}(m_v) \geq \text{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\stackrel{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{gr}(m_v) \geq \operatorname{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\operatorname{gr}(h) + \operatorname{gr}(r)$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \quad \text{e} \tag{3}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\stackrel{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W})$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{gr}(m_v) \geq \text{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\text{gr}(h) + \text{gr}(r) \geq \text{gr}(c_{v,W}) = \text{gr}(m_v)$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W})$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{gr}(m_v) \geq \text{gr}(c_{u',W}) \quad \text{e} \tag{3}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\text{gr}(h) + \text{gr}(r) \geq \text{gr}(c_{v,W}) = \text{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \text{gr}(c_{u',W}) = \text{gr}(h) + \text{gr}(c_{u,W'})$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W}) = \mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

(3) $$\operatorname{gr}(m_v) \geq \operatorname{gr}(c_{u',W}) \quad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u'))) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\operatorname{gr}(h) + \operatorname{gr}(r) \geq \operatorname{gr}(c_{v,W}) = \operatorname{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \operatorname{gr}(c_{u',W}) = \operatorname{gr}(h) + \operatorname{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\operatorname{gr}(r) \geq \operatorname{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2).

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

(3) $$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W}) = \mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2). A segunda agora segue pois

$$c_{u,W'}(T)(u') = w + r(T)(v) = w \in W,$$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W}) = \mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2). A segunda agora segue pois

$$c_{u,W'}(T)(u') = w + r(T)(v) = w \in W,$$

mostrando que $c_{u,W'} \in \mathscr{C}_{T,u'}(W)$.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

(3) $$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \quad \text{e}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\stackrel{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \stackrel{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W}) = \mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2). A segunda agora segue pois

$$c_{u,W'}(T)(u') = w + r(T)(v) = w \in W,$$

mostrando que $c_{u,W'} \in \mathscr{C}_{T,u'}(W)$. Sendo W T-adm., $\exists\ w' \in W$ t.q. $c_{u,W'}(T)(w') = c_{u,W'}(T)(u')$

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\text{gr}(m_v) \geq \text{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$c_{u,W'}(T)(u') = c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v)$$
$$\stackrel{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v).$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\text{gr}(h) + \text{gr}(r) \geq \text{gr}(c_{v,W}) = \text{gr}(m_v) \stackrel{(3)}{\geq} \text{gr}(c_{u',W}) = \text{gr}(h) + \text{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\text{gr}(r) \geq \text{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2). A segunda agora segue pois

$$c_{u,W'}(T)(u') = w + r(T)(v) = w \in W,$$

mostrando que $c_{u,W'} \in \mathscr{C}_{T,u'}(W)$. Sendo W T-adm., $\exists\ w' \in W$ t.q. $c_{u,W'}(T)(w') = c_{u,W'}(T)(u') = w$. $\square$

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall \ 1 \leq j < m$.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall$ $1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a).

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall$ $1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b)

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \dots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a))

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a)) e seja $U = W \oplus C_T(v_1)$

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \dots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall$ $1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a)) e seja $U = W \oplus C_T(v_1)$ que satisfaz a hipótese de indução.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\, 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a)) e seja $U = W \oplus C_T(v_1)$ que satisfaz a hipótese de indução. Logo, existem vetores $v_2, \ldots, v_m$ t.q. $V = U \oplus C_T(v_2) \oplus \cdots \oplus C_T(v_m)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\, 2 \leq j < m$.

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a)) e seja $U = W \oplus C_T(v_1)$ que satisfaz a hipótese de indução. Logo, existem vetores $v_2, \ldots, v_m$ t.q. $V = U \oplus C_T(v_2) \oplus \cdots \oplus C_T(v_m)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 2 \leq j < m$. O Lema 8.2.6 garante que $m_{v_2} | m_{v_1}$. $\square$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado,
$m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7).

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u))$$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u))$$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\ m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)}|m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\ m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$).

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$).
Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$). Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos e mostremos que $m_u = m_v$.

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$). Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos e mostremos que $m_u = m_v$. Se $S = f(T)$, então $S \circ T = T \circ S$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$).
Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos e mostremos que $m_u = m_v$. Se $S = f(T)$, então $S \circ T = T \circ S$ e segue do Lema 8.1.6 que S é bijetora (pois $\dim(V) < \infty$).

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\ m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$).
Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos e mostremos que $m_u = m_v$. Se $S = f(T)$, então $S \circ T = T \circ S$ e segue do Lema 8.1.6 que S é bijetora (pois $\dim(V) < \infty$). A conclusão segue do Lema 8.2.7.

Suponha agora que f seja primo.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\text{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \text{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\text{gr}(m_u) < \text{gr}(g) = \text{gr}(m_v) - \text{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\text{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \text{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\text{gr}(m_u) < \text{gr}(g) = \text{gr}(m_v) - \text{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\text{gr}(m_v) \leq \text{gr}(m_u) + \text{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\text{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \text{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\text{gr}(m_u) < \text{gr}(g) = \text{gr}(m_v) - \text{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\text{gr}(m_v) \leq \text{gr}(m_u) + \text{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\text{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\text{gr}(f) > 1$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v)$,

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$ e $r = \mathrm{mdc}(h, m_{u'})$.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$ e $r = \mathrm{mdc}(h, m_{u'})$. Note que $u = h(T)(u')$.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u|g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v|m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$ e $r = \mathrm{mdc}(h, m_{u'})$. Note que $u = h(T)(u')$. Por hipótese de indução, temos

$$m_v = q\ m_{u'} \qquad \text{e} \qquad m_{u'} = r\ m_u.$$

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$ e $r = \mathrm{mdc}(h, m_{u'})$. Note que $u = h(T)(u')$. Por hipótese de indução, temos

$$m_v = q\ m_{u'} \qquad \text{e} \qquad m_{u'} = r\ m_u.$$

As propriedades de mdc implicam que $q\ r = p$. □

Dem. do TDC - Unicidade

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão “mais forte” - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão “mais forte” - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \dots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \dots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$.

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão “mais forte” - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \le j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j} \ \forall\ 1 \le j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \le j \le m$.

Dem.: Suponha $m \le l$

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem.: Suponha $m \leq l$ e note que $l = m$ segue se mostrarmos

$$(4) \qquad m_{u_j} = m_{v_j} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem.: Suponha $m \leq l$ e note que $l = m$ segue se mostrarmos

(4) $$m_{u_j} = m_{v_j} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

De fato, essas igualdades implicam que

$$\dim(V) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(v_j))$$

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem.: Suponha $m \leq l$ e note que $l = m$ segue se mostrarmos

(4) $$m_{u_j} = m_{v_j} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

De fato, essas igualdades implicam que

$$\dim(V) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(v_j)) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(u_j)),$$

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem.: Suponha $m \leq l$ e note que $l = m$ segue se mostrarmos

(4) $$m_{u_j} = m_{v_j} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

De fato, essas igualdades implicam que

$$\dim(V) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(v_j)) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(u_j)),$$

e, portanto, não pode haver mais parcelas na segunda decomposição.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10)

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}}$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \; \forall \; f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}}$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \ \forall \ j \geq 2$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \ \forall\ j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \; \forall \; f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \; \forall \; j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$, mostrando que $m_{u_2}|m_{v_2}$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \; \forall \; f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \; \forall \; j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$, mostrando que $m_{u_2} | m_{v_2}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_2} | m_{u_2}$

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \ \forall \ j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$, mostrando que $m_{u_2} | m_{v_2}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_2} | m_{u_2}$ e, portanto, $m_{u_2} = m_{v_2}$.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1} | m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1} | m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \ \forall\ j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$, mostrando que $m_{u_2} | m_{v_2}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_2} | m_{u_2}$ e, portanto, $m_{u_2} = m_{v_2}$.

Procedendo recursivamente usando os demais S_j, (4) é verificada. $\square$

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T.

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

TDP + TDC ⇒ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall \ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall \ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$.

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall \ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$. Assim, $\mathscr{J} = \cup_{i,j} \mathscr{J}_{i,j}$ é base de Jordan de V com respeito a T.

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall\ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$. Assim, $\mathscr{J} = \cup_{i,j} \mathscr{J}_{i,j}$ é base de Jordan de V com respeito a T.

Reciprocamente, supondo que existe base de Jordan com respeito a T para V

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall\ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$. Assim, $\mathscr{J} = \cup_{i,j} \mathscr{J}_{i,j}$ é base de Jordan de V com respeito a T.

Reciprocamente, supondo que existe base de Jordan com respeito a T para V e utilizando uma tal base para calcular c_T, conclui-se que $\mathrm{gr}(p_i) = 1 \ \forall\ i$.

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall\ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$. Assim, $\mathscr{J} = \cup_{i,j} \mathscr{J}_{i,j}$ é base de Jordan de V com respeito a T.

Reciprocamente, supondo que existe base de Jordan com respeito a T para V e utilizando uma tal base para calcular c_T, conclui-se que $\mathrm{gr}(p_i) = 1 \ \forall\ i$.

Estude a demonstração da Proposição 8.2.11.

Semelhança

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\beta}$.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\beta}$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\beta}$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\beta}$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_{\alpha}^{\alpha} \text{ e } B = [T]_{\beta}^{\beta}.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T. Equivalentemente, $A \sim B$ sobre $\mathbb{F}$ se

$$\exists\ P \in M_n(\mathbb{F}) \text{ t.q. } B = PAP^{-1}.$$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T. Equivalentemente, $A \sim B$ sobre $\mathbb{F}$ se

$$\exists\ P \in M_n(\mathbb{F}) \text{ t.q. } B = PAP^{-1}.$$

Se $\mathbb{K}$ é subcorpo de $\mathbb{F}$

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T. Equivalentemente, $A \sim B$ sobre $\mathbb{F}$ se

$$\exists\ P \in M_n(\mathbb{F}) \text{ t.q. } B = PAP^{-1}.$$

Se $\mathbb{K}$ é subcorpo de $\mathbb{F}$, pode ser que A e B sejam semelhantes sobre $\mathbb{F}$, mas não sobre $\mathbb{K}$.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T. Equivalentemente, $A \sim B$ sobre $\mathbb{F}$ se

$$\exists\ P \in M_n(\mathbb{F}) \text{ t.q. } B = PAP^{-1}.$$

Se $\mathbb{K}$ é subcorpo de $\mathbb{F}$, pode ser que A e B sejam semelhantes sobre $\mathbb{F}$, mas não sobre $\mathbb{K}$.

Exercício: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Determine se é V ou F: A e B são semelhantes sobre $\mathbb{K}$ se, e só se, o forem sobre $\mathbb{F}$.