# Álgebra Linear Avançada
# Decomposição Primária

Adriano Moura

Unicamp

2020

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$. (chamado de polinômio mínimo de $T$)

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$. (chamado de polinômio mínimo de $T$)

**Teorema da Decomposição Primária (TDP)**

Suponha que $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e sejam $p_1, \ldots, p_m$ os fatores irredutíveis distintos de $m_T$ em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

## Teorema

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$. (chamado de polinômio mínimo de $T$)

## Teorema da Decomposição Primária (TDP)

Suponha que $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e sejam $p_1, \ldots, p_m$ os fatores irredutíveis distintos de $m_T$ em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Se $k_j$ é a multiplicidade de $p_j$ em $m_T$,

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$. (chamado de polinômio mínimo de $T$)

**Teorema da Decomposição Primária (TDP)**

Suponha que $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e sejam $p_1, \ldots, p_m$ os fatores irredutíveis distintos de $m_T$ em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Se $k_j$ é a multiplicidade de $p_j$ em $m_T$, temos

$$V = V_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus V_{p_m^{k_m}}.$$

# Polinômio Mínimo e Teor. da Decomposição Primária

Contexto: $V$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Lembre: Dado polinômio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p := \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$.

$(p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \rightsquigarrow p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_n T^n(v))$

Defina $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$. (conjunto aniquilador de $T$)

**Teorema**

1. Se $\dim(V)$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.
2. Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, existe único polinômio mônico $m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ que divide todos os elementos de $\mathcal{A}_T$. (chamado de polinômio mínimo de $T$)

**Teorema da Decomposição Primária (TDP)**

Suponha que $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e sejam $p_1, \ldots, p_m$ os fatores irredutíveis distintos de $m_T$ em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Se $k_j$ é a multiplicidade de $p_j$ em $m_T$, temos

$$V = V_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus V_{p_m^{k_m}}.$$

Os polinômios $p_j^{k_j}$ são chamados de fatores primários (fp) de $T$ e $V_{p_j^{k_j}}$ é dito um subespaço $T$-primário de $V$.

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$.

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

# Diagonalização e Subespaços Invariantes

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$.

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

# Diagonalização e Subespaços Invariantes

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

# Diagonalização e Subespaços Invariantes

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e o TDP diz que $V$ é soma de autoespaços:

$$V = V_{t-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{t-\lambda_m}$$

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e o TDP diz que $V$ é soma de autoespaços:

$$V = V_{t-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{t-\lambda_m}$$

Um subespaço $W$ de $V$ é dito $T$-invariante se $T(W) \subseteq W$.

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e o TDP diz que $V$ é soma de autoespaços:

$$V = V_{t-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{t-\lambda_m}$$

Um subespaço $W$ de $V$ é dito $T$-invariante se $T(W) \subseteq W$.
Em particular, a restrição de $T$ a $W$ induz um operador linear em $W$ dado por $w \mapsto T(w)$ para todo $w \in W$.

# Diagonalização e Subespaços Invariantes

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e o TDP diz que $V$ é soma de autoespaços:

$$V = V_{t-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{t-\lambda_m}$$

Um subespaço $W$ de $V$ é dito $T$-invariante se $T(W) \subseteq W$.
Em particular, a restrição de $T$ a $W$ induz um operador linear em $W$ dado por $w \mapsto T(w)$ para todo $w \in W$.

**Lema 8.1.1**

Se $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ satisfaz $S \circ T = T \circ S$, $V_S$ é $T$-invariante.

# Diagonalização e Subespaços Invariantes

Se $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T$ é o operador $f(t) \mapsto tf(t)$, $\mathcal{A}_T = \{0\}$. (Ex. 8.1.5)

Se $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T = 0$. Segue que $V = V_{m_T}$.

**Corolário**

$T$ é diagonalizável se, e só se, seus fatores primários tiverem grau 1.

**Dem. de $\Leftarrow$:** Se os fp tiverem grau 1, temos $m_T = \prod_{j=1}^{m}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, e o TDP diz que $V$ é soma de autoespaços:

$$V = V_{t-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{t-\lambda_m}$$

Um subespaço $W$ de $V$ é dito $T$-invariante se $T(W) \subseteq W$.
Em particular, a restrição de $T$ a $W$ induz um operador linear em $W$ dado por $w \mapsto T(w)$ para todo $w \in W$.

**Lema 8.1.1**

Se $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ satisfaz $S \circ T = T \circ S$, $V_S$ é $T$-invariante.
Em particular, $V_p$ é $T$-invariante para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

# Generalizando a Noção de Autoespaço

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$.

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \quad \text{para quaisquer} \quad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$.

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1]$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \quad \text{para quaisquer} \quad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \quad \text{para qualquer} \quad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^{\infty} := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^{\infty}$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \quad \text{e} \quad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$.

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x, y) = q(T)(T(x, y)) + r(x, y)$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x, y) = q(T)(T(x, y)) + r(x, y) = q(T)(y, 0) + r(x, y)$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x, y) = q(T)(T(x, y)) + r(x, y) = q(T)(y, 0) + r(x, y)$$

$$= (\ q(0)y + rx\ ,\ ry\ )$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x, y) = q(T)(T(x, y)) + r(x, y) = q(T)(y, 0) + r(x, y)$$
$$= (\ q(0)y + rx\ ,\ ry\ ) \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} f(T)(x, y) = (0, 0)$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $$V_p \subseteq V_{fp} \qquad \text{para quaisquer} \qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x, y) = (y, 0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x, y) = q(T)(T(x, y)) + r(x, y) = q(T)(y, 0) + r(x, y)$$

$$= (\ q(0)y + rx\ ,\ ry\ ) \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} f(T)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow 0 = y$$

# Generalizando a Noção de Autoespaço

Objetivo – descrever o conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$. Observe que

(1) $\qquad V_p \subseteq V_{fp} \qquad$ para quaisquer $\qquad f, p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Em particular,

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}} \qquad \text{para qualquer} \qquad k \geq 0.$$

Isso implica que o conjunto

$$V_p^\infty := \bigcup_{k>0} V_{p^k}$$

é um subespaço ($T$-invariante) de $V$. Para $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o espaço $V_p^\infty$ é chamado de autoespaço generalizado associado a $\lambda$.

Se $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ é dado por $T(x,y) = (y,0)$ e $p(t) = t$ temos

$$V_p = V_T = [e_1] \qquad \text{e} \qquad V_{p^2} = \mathbb{F}^2 \quad (\text{pois } T^2 = 0).$$

Além disso, se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \nmid f$, temos $V_f = \{0\}$. De fato, se $f = pq + r$ é a divisão de $f$ por $p$, temos $r \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ e

$$f(T)(x,y) = q(T)(T(x,y)) + r(x,y) = q(T)(y,0) + r(x,y)$$

$$= (\ q(0)y + rx\ ,\ ry\ ) \overset{r\neq 0}{\Longrightarrow}\ f(T)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 0 = y = x.$$

# Existência do Polinômio Mínimo

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\ p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r \ (\mathrm{gr}(r) < m)$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\ p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r\ (\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

Segue que qualquer polinômio não constante de grau mínimo em $\mathcal{A}_T$ divide qualquer polinômio de $\mathcal{A}_T$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

Segue que qualquer polinômio não constante de grau mínimo em $\mathcal{A}_T$ divide qualquer polinômio de $\mathcal{A}_T$. Um polinômio divide outro com o mesmo grau apenas se for múltiplo escalar do outro. $\square$

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

Segue que qualquer polinômio não constante de grau mínimo em $\mathcal{A}_T$ divide qualquer polinômio de $\mathcal{A}_T$. Um polinômio divide outro com o mesmo grau apenas se for múltiplo escalar do outro. $\square$

A descrição do conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}, \exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\ p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

Segue que qualquer polinômio não constante de grau mínimo em $\mathcal{A}_T$ divide qualquer polinômio de $\mathcal{A}_T$. Um polinômio divide outro com o mesmo grau apenas se for múltiplo escalar do outro. $\square$

A descrição do conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$ segue de:

**Proposição 8.1.7**

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível, $V_p \neq \{0\}$ se, e somente se, $p|m_T$.

# Existência do Polinômio Mínimo

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$, $\exists\,!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathcal{A}_T$.

**Dem.:** Seja $m = \min\{k : \exists\, p \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}, \mathrm{gr}(p) = k\} > 0$.
Tome $f, p \in \mathcal{A}_T$ com $\mathrm{gr}(p) = m$. Escreva a divisão de $f$ por $p$:
$f = qp + r$ $(\mathrm{gr}(r) < m)$. Note que $r = f - qp \in \mathcal{A}_T$
e, pela minimalidade de $m$, devemos ter $r = 0$ mostrando que $p|f$.

Segue que qualquer polinômio não constante de grau mínimo em $\mathcal{A}_T$ divide qualquer polinômio de $\mathcal{A}_T$. Um polinômio divide outro com o mesmo grau apenas se for múltiplo escalar do outro. □

A descrição do conjunto $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq \{0\}\}$ segue de:

**Proposição 8.1.7**

Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível, $V_p \neq \{0\}$ se, e somente se, $p|m_T$.

**Lema 8.1.6**

Se $\mathrm{mdc}(f, g) = 1$, a restrição de $f(T)$ a $V_g$ é injetora.

# Demonstração da Prop. 8.1.7

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$.

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v)$$

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$.

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:**

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p | m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$.

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p|m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p | m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v)$$

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p|m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v) = p(T)(f(T)(v)) \qquad \text{para qualquer} \qquad v \in V.$$

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p | m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v) = p(T)(f(T)(v)) \qquad \text{para qualquer} \qquad v \in V.$$

Como $p(T)(f(T)(v)) \neq 0$ se $f(T)(v) \neq 0$, segue que $f \in \mathcal{A}_T$, gerando uma contradição pois $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(m_T)$.

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p|m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v) = p(T)(f(T)(v)) \qquad \text{para qualquer} \qquad v \in V.$$

Como $p(T)(f(T)(v)) \neq 0$ se $f(T)(v) \neq 0$, segue que $f \in \mathcal{A}_T$, gerando uma contradição pois $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(m_T)$.

Reciprocamente, se $p \nmid m_T$, então $\mathrm{mdc}(p, m_T) = 1$ (pois $p$ é irredutível)

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p | m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v) = p(T)(f(T)(v)) \qquad \text{para qualquer} \qquad v \in V.$$

Como $p(T)(f(T)(v)) \neq 0$ se $f(T)(v) \neq 0$, segue que $f \in \mathcal{A}_T$, gerando uma contradição pois $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(m_T)$.

Reciprocamente, se $p \nmid m_T$, então $\mathrm{mdc}(p, m_T) = 1$ (pois $p$ é irredutível) e segue do Lema que a restrição de $m_T(T)$ a $V_p$ é injetora.

# Demonstração da Prop. 8.1.7

**Dem. do Lema:** Sejam $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $pf + qg = 1$. Então, para todo $v \in V_g$ temos

$$v = (p(T)f(T) + q(T)g(T))(v) = p(T)(f(T)(v))$$

já que $g(T)(v) = 0$. Segue que a restrição de $p(T) \circ f(T)$ a $V_g$ é a função identidade, de onde segue o lema. $\square$

**Dem. da Prop.:** Suponha que $p|m_T$ e $V_p = \{0\}$, isto é, $p(T)(u) \neq 0$ para todo $u \in V \setminus \{0\}$. Considere $f = \frac{m_T}{p}$ e observe que

$$0 = m_T(T)(v) = p(T)(f(T)(v)) \qquad \text{para qualquer} \qquad v \in V.$$

Como $p(T)(f(T)(v)) \neq 0$ se $f(T)(v) \neq 0$, segue que $f \in \mathcal{A}_T$, gerando uma contradição pois $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(m_T)$.

Reciprocamente, se $p \nmid m_T$, então $\mathrm{mdc}(p, m_T) = 1$ (pois $p$ é irredutível) e segue do Lema que a restrição de $m_T(T)$ a $V_p$ é injetora. Como $m_T(T) = 0$, concluímos que $V_p = \{0\}$.

# Dimensão Finita - Como calcular $m_T$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

# Dimensão Finita - Como calcular $m_T$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.

# Dimensão Finita - Como calcular $m_T$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i.

# Dimensão Finita - Como calcular $m_T$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\ldots,m}$ seja l.d..

# Dimensão Finita - Como calcular $m_T$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\ldots,m}$ seja l.d..
Sejam então $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m = a_0\mathrm{Id}_V + \cdots + a_{m-1}T^{m-1}$$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\dots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\dots,m}$ seja l.d..
Sejam então $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m = a_0 \mathrm{Id}_V + \cdots + a_{m-1} T^{m-1} \qquad \text{e} \qquad f(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k.$$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\ldots,m}$ seja l.d..
Sejam então $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m = a_0 \mathrm{Id}_V + \cdots + a_{m-1} T^{m-1} \qquad \text{e} \qquad f(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k.$$

Segue que $f(T) = 0$ e, portanto, $f \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}$. $\square$

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\dots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\dots,m}$ seja l.d..
Sejam então $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m = a_0\mathrm{Id}_V + \cdots + a_{m-1}T^{m-1} \qquad \text{e} \qquad f(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k.$$

Segue que $f(T) = 0$ e, portanto, $f \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}$. $\square$

**Exercício:** Mostre que $m_T = f$ sendo $f$ como na demonstração.

Se $\dim(V) = n$ é finita, $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

**Dem.:** Se $T = 0$, então $\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(0) = 0\} \neq \{0\}$.
Suponha então que $T \neq 0$ e lembre que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$.
Logo, a família $(T^k)_{k=0,\ldots,n^2}$ é l.d..
Como a subfamília formada por $T^0 = \mathrm{Id}_V$ é l.i., existe $1 \leq m \leq n^2$ mínimo tal que a subfamília $(T^k)_{k=0,\ldots,m}$ seja l.d..
Sejam então $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m = a_0\mathrm{Id}_V + \cdots + a_{m-1}T^{m-1} \qquad \text{e} \qquad f(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k.$$

Segue que $f(T) = 0$ e, portanto, $f \in \mathcal{A}_T \setminus \{0\}$. $\square$

**Exercício:** Mostre que $m_T = f$ sendo $f$ como na demonstração. Como usar este fato e representações matriciais de $T$ para calcular $m_T$?

# Subespaços Cíclicos

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k \geq 0}$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^{\infty}(v) = (v_k)_{k \geq 0}$, $\mathscr{C}_T^{m}(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$.

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k \geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d..

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^{\infty}(v) = (v_k)_{k \geq 0}$, $\mathscr{C}_T^{m}(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^{\infty}(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$.

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

Definindo $m_{T,v}(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

Definindo $m_{T,v}(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$,
(polinômio mínimo de $v$ com respeito a $T$)

# Subespaços Cíclicos

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

Definindo $m_{T,v}(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$,
temos

$$m_{T,v}(T)(v) = v_m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v) = 0,$$

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

Definindo $m_{T,v}(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$,
temos

$$m_{T,v}(T)(v) = v_m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v) = 0,$$

mostrando que $v \in V_{m_{T,v}}$.

Dado $v \in V$, considere a sequência de vetores
$v_0 = v, v_1 = T(v), \ldots, v_k = T^k(v), \ldots$ chamada $T$-ciclo gerado por $v$.
Notação: $\mathscr{C}_T^\infty(v) = (v_k)_{k\geq 0}$, $\mathscr{C}_T^m(v) = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$. Defina

$$C_T(v) = [\mathscr{C}_T^\infty(v)] \qquad \text{subespaço } T\text{-cíclico gerado por } v$$

Se $\dim(V)$ é finita, existe $m \geq 0$ mínimo tal que $\mathscr{C}_T^{m+1}(v)$ é l.d.. Note que $m \geq 1$ se $v \neq 0$. Em particular, $\mathscr{C}_T(v) := \mathscr{C}_T^m(v)$ é base de $C_T(v)$ e $v_m$ é combinação linear dos vetores l.i. $v_0, \ldots, v_{m-1}$, digamos

$$v_m = a_0 v_0 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v).$$

Definindo $m_{T,v}(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_1 t - a_0$,
temos

$$m_{T,v}(T)(v) = v_m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(v) = 0,$$

mostrando que $v \in V_{m_{T,v}}$. Como $V_{m_{T,v}}$ é $T$-invariante, segue que

$$C_T(v) \subseteq V_{m_{T,v}}.$$

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$ e, portanto, $m_S | m_v$.

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$ e, portanto, $m_S | m_v$.
De fato, $m_v = m_S$ pois, se fosse $\mathrm{gr}(m_S) = m' < m$, seguiria que $v_0, \ldots, v_{m'}$ seria l.d.

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$ e, portanto, $m_S | m_v$.
De fato, $m_v = m_S$ pois, se fosse $\mathrm{gr}(m_S) = m' < m$, seguiria que $v_0, \ldots, v_{m'}$ seria l.d., contradizendo a minimalidade de $m$.

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$ e, portanto, $m_S | m_v$.
De fato, $m_v = m_S$ pois, se fosse $\mathrm{gr}(m_S) = m' < m$, seguiria que $v_0, \ldots, v_{m'}$ seria l.d., contradizendo a minimalidade de $m$.
A proposição segue pois, obviamente $m_T \in \mathcal{A}_S$. $\square$

# Subespaços Cíclicos e Divisores de $m_T$

Simplificando a notação: $m_v$ ao invés de $m_{T,v}$.

**Proposição**

Para todo $v \in V$, $m_v | m_T$.

**Dem.:** Sendo $V_{m_v}$ $T$-invariante, podemos considerar o operador induzido

$$S : V_{m_v} \to V_{m_v}, \quad v \mapsto T(v).$$

Note que $m_v \in \mathcal{A}_S$ e, portanto, $m_S | m_v$.
De fato, $m_v = m_S$ pois, se fosse $\mathrm{gr}(m_S) = m' < m$, seguiria que $v_0, \ldots, v_{m'}$ seria l.d., contradizendo a minimalidade de $m$.
A proposição segue pois, obviamente $m_T \in \mathcal{A}_S$. $\square$

Estudar Exemplo 8.1.10.

# Pausa

Este é um momento ideal para uma pausa no desenvolvimento da teoria.

O material estudado já fornece ao aluno informação suficiente para trabalhar nos exercícios 8.1.1 a 8.1.13. É fortemente recomendável que isso seja feito antes de prosseguir com a teoria. Os demais exercícios da Seção 8.1 dependem da noção de polinômio característico, que é o ponto culminante da próxima sequência de slides.

Para as próximas demonstrações, é crucial que o aluno esteja confortável com as noções de soma direta e correspondentes projeções. Assim, recomenda-se revisar a Seção 5.3 bem como os Exercícios 6.3.6 e 6.3.7.

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$.

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i..

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$.

# Coprimalidade ⇒ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i..

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$

# Coprimalidade ⇒ Soma Direta

## Proposição 8.1.11

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$, considere

$$p = \prod_{j=1}^{m-1} p_j^{k_j}$$

## Proposição 8.1.11

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^\infty + \cdots + V_{p_m}^\infty$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^\infty \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$, considere

$$p = \prod_{j=1}^{m-1} p_j^{k_j}$$

e observe que

$$0 = p(T)(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = a_m p(T)(v_m).$$

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

## Proposição 8.1.11

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$, considere

$$p = \prod_{j=1}^{m-1} p_j^{k_j}$$

e observe que

$$0 = p(T)(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_m p(T)(v_m).$$

Como a restrição de $p_j^{k_j}(T)$ a $V_{p_m^{k_m}}$ é injetora para $j \neq m$, segue que $p(T)(v_m) \neq 0$

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

**Proposição 8.1.11**

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$, considere

$$p = \prod_{j=1}^{m-1} p_j^{k_j}$$

e observe que

$$0 = p(T)(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_m p(T)(v_m).$$

Como a restrição de $p_j^{k_j}(T)$ a $V_{p_m^{k_m}}$ é injetora para $j \neq m$, segue que $p(T)(v_m) \neq 0$ e, portanto, $a_m = 0$.

# Coprimalidade $\Rightarrow$ Soma Direta

## Proposição 8.1.11

Se $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ são dois a dois relativamente primos, a soma $V_{p_1}^{\infty} + \cdots + V_{p_m}^{\infty}$ é direta.

**Dem.:** Tome $v_j \in V_{p_j}^{\infty} \setminus \{0\}, 1 \leq j \leq m$. Objetivo: mostrar que $v_1, \ldots, v_m$ é l.i.. Faremos por indução em $m$ que obviamente começa quando $m = 1$. Suponha então que $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ satisfazem $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ e, por hip. de indução, que $v_1, \ldots, v_{m-1}$ seja l.i.. Para cada $1 \leq j \leq m$, escolha $k_j$ tal que $p_j^{k_j}(T)(v_j) = 0$, considere

$$p = \prod_{j=1}^{m-1} p_j^{k_j}$$

e observe que

$$0 = p(T)(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_m p(T)(v_m).$$

Como a restrição de $p_j^{k_j}(T)$ a $V_{p_m^{k_m}}$ é injetora para $j \neq m$, segue que $p(T)(v_m) \neq 0$ e, portanto, $a_m = 0$. A hipótese de indução agora implica que $a_j = 0$ para todo $j$.

# Decompondo $V$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$.

# Decompondo $V$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$.

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$.

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$.
Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$.

# Decompondo $V$

### Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

# Decompondo $V$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta. Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$.

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$.

Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$

# Decompondo $V$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$.

Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$.
Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$.

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta. Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$. Pelo Exercício 6.3.7, $V_f = Im(P_2) \oplus Im(P_1)$

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$. Pelo Exercício 6.3.7, $V_f = Im(P_2) \oplus Im(P_1) \subseteq V_{f_1} \oplus V_{f_2}$

# Decompondo $V$

## Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$. Pelo Exercício 6.3.7, $V_f = Im(P_2) \oplus Im(P_1) \subseteq V_{f_1} \oplus V_{f_2} \subseteq V_f$. $\square$

### Proposição 8.1.12

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$. Pelo Exercício 6.3.7, $V_f = Im(P_2) \oplus Im(P_1) \subseteq V_{f_1} \oplus V_{f_2} \subseteq V_f$. $\square$

O TDP segue desta proposição com $f_j = p_j^{k_j}$ pois $V = V_{m_T}$.

# Decompondo $V$

**Proposição 8.1.12**

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos e $f = f_1 \cdots f_m$. Então, $V_f = V_{f_1} \oplus \cdots \oplus V_{f_m}$.

**Dem.:** Faremos para $m = 2$. O caso geral segue por indução em $m$. Segue de (1) que $V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$. Acabamos de ver que a soma é direta.

Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ e defina $h_j = g_j f_j$ e $P_j = h_j(S)$, sendo $S$ o operador linear induzido por $T$ em $V_f$. Então $f \in \mathcal{A}_S$, $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_{V_f}$ e

$$P_1 P_2 = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S) = g_1(S) g_2(S) f_1(S) f_2(S) = 0 = P_2 P_1.$$

Em particular, $P_j^2 = P_j - P_i P_j = P_j$ se $\{i, j\} = \{1, 2\}$ e $Im(P_j) \subseteq V_{f_i}$. Pelo Exercício 6.3.7, $V_f = Im(P_2) \oplus Im(P_1) \subseteq V_{f_1} \oplus V_{f_2} \subseteq V_f$. $\square$

O TDP segue desta proposição com $f_j = p_j^{k_j}$ pois $V = V_{m_T}$.

Estudar o Exemplo 8.1.15

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

$$C_T(u) = C_T(v)$$

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

$$C_T(u) = C_T(v) \quad \text{ou} \quad C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}.$$

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

$$C_T(u) = C_T(v) \quad \text{ou} \quad C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}.$$

**Dem. do Lema:** Exercício.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

$$C_T(u) = C_T(v) \quad \text{ou} \quad C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}.$$

**Dem. do Lema:** Exercício.

**Exercício (8.1.10):** Mostre que $C_T(v) = \{p(T)(v) : p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}$.

**Proposição 8.1.17**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p)$ é finita, existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

O principal Teorema da Seção 8.2 (Teorema da Decomposição Cíclica) é uma forte generalização desta proposição.

**Lema 8.1.16**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem $m_u = m_v = p$, exatamente uma das duas opções ocorre:

$$C_T(u) = C_T(v) \quad \text{ou} \quad C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}.$$

**Dem. do Lema:** Exercício.

**Exercício (8.1.10):** Mostre que $C_T(v) = \{p(T)(v) : p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}$.

Um subespaço $W$ é dito $T$-cíclico se $W = C_T(v)$ para algum $v \in V$.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$

$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$

$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$
$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$

$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo. Então, existem $w_j \in C_T(v_j)$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_k$.

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$
$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo. Então, existem $w_j \in C_T(v_j)$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_k$. Pelo lema anterior, $C_T(w) = C_T(v)$ e, portanto, existe $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $v = f(T)(w)$ (Exercício 8.1.10).

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$

$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo. Então, existem $w_j \in C_T(v_j)$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_k$. Pelo lema anterior, $C_T(w) = C_T(v)$ e, portanto, existe $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $v = f(T)(w)$ (Exercício 8.1.10). Mas então,

$$v = f(T)(w_1) + \cdots + f(T)(w_k)$$

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$
$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo. Então, existem $w_j \in C_T(v_j)$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_k$. Pelo lema anterior, $C_T(w) = C_T(v)$ e, portanto, existe $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $v = f(T)(w)$ (Exercício 8.1.10). Mas então,

$$v = f(T)(w_1) + \cdots + f(T)(w_k) \in C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k),$$

# Quebras em Soma de Subespaços Cíclicos

$p$ irredutível e $\dim(V_p) < \infty \Rightarrow$ existem $l \geq 0$ e $v_1, \ldots, v_l \in V_p$ t.q. $V_p = C_T(v_1) \oplus \cdots \oplus C_T(v_l)$.

**Dem.:** Suponha que tenhamos encontrado vetores $v_1, \ldots, v_k \in V_p$, t.q. a soma $C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)$ seja direta. Mostraremos que

$$(*) \qquad C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k)) = \{0\}$$

$$\text{para todo} \quad v \in V_p \setminus C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k).$$

Supondo que isto é verdade, como $\dim(V_p)$ é finita, fica claro como escolher tal sequência de vetores começando com $v_1 \in V_p$ arbitrário.

Para demonstrar (*), suponha que $w \in C_T(v) \cap (C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k))$ seja não nulo. Então, existem $w_j \in C_T(v_j)$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_k$. Pelo lema anterior, $C_T(w) = C_T(v)$ e, portanto, existe $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $v = f(T)(w)$ (Exercício 8.1.10). Mas então,

$$v = f(T)(w_1) + \cdots + f(T)(w_k) \in C_T(v_1) + \cdots + C_T(v_k),$$

contradizendo nossa hipótese sobre $v$. $\square$

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) \mid \dim(V_p^\infty)$.

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) \,|\, \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$.

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$.

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$.

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\,\mathrm{gr}(p)$

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\, \mathrm{gr}(p) \Rightarrow$ $\square$.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\,\mathrm{gr}(p) \Rightarrow$ $\square$.
Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$.

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\ \mathrm{gr}(p) \Rightarrow \quad \square$.
Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$. Para $n = 1$ é claro.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

## Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,
$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$
valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\ \mathrm{gr}(p) \Rightarrow \quad \square$.
Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$. Para $n = 1$ é claro.
Suponha $n > 1$ e enunciemos a hip. de indução precisamente:

Proposição 8.1.18

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\,\mathrm{gr}(p) \Rightarrow \quad \square$.
Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$. Para $n = 1$ é claro.
Suponha $n > 1$ e enunciemos a hip. de indução precisamente:
Se $S$ é um operador linear num espaço vetorial $W$ t.q. $\dim(W_{p(S)}^\infty) < n$

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\ \mathrm{gr}(p) \Rightarrow \quad \square$.
Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$. Para $n = 1$ é claro.
Suponha $n > 1$ e enunciemos a hip. de indução precisamente:
Se $S$ é um operador linear num espaço vetorial $W$ t.q. $\dim(W_{p(S)}^\infty) < n$,

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W_{p(S)}^\infty) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W_{p(S)}^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : W_{p(S)}^\infty = W_{p^k}\}.$$

**Proposição 8.1.18**

Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $\dim(V_p^\infty)$ é finita, $\mathrm{gr}(p) | \dim(V_p^\infty)$. Além disso,

$$\frac{\dim(V_p^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $V_p^\infty$ for $T$-cíclico.

**Dem.:** Defina $m = \min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}$. Comecemos com o caso que $V_p^\infty$ é $T$-cíclico. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $V_p^\infty = V_{p^m}$ e note que $m_S = p^m$. Além disso, se $v$ satisfaz $V_p^\infty = C_T(v)$, segue que $m_v = m_S = p^m$. Como $\dim(C_T(v)) = \mathrm{gr}(m_v) = m\ \mathrm{gr}(p) \Rightarrow \quad \square$.

Agora procedemos por indução em $n = \dim(V_p^\infty)$. Para $n = 1$ é claro. Suponha $n > 1$ e enunciemos a hip. de indução precisamente:

Se $S$ é um operador linear num espaço vetorial $W$ t.q. $\dim(W_{p(S)}^\infty) < n$,

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W_{p(S)}^\infty) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W_{p(S)}^\infty)}{\mathrm{gr}(p)} \geq \min\{k : W_{p(S)}^\infty = W_{p^k}\}.$$

Para $m = 1$, o caso cíclico junto com a Prop. 8.1.17 completam a dem.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante

## Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio

## Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^{\infty}$.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$.

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

Logo, nos resta mostrar que $\mathrm{gr}(p) | \dim(Im(R))$.

# Subespaços Primários e o Grau do seu Polinômio Primo

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) \,|\, \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

Logo, nos resta mostrar que $\mathrm{gr}(p) \,|\, \dim(Im(R))$. Note que $Im(R)$ é $T$-invariante pois, se $w = R(v)$ com $v \in V_p^\infty$, como $R \circ T = T \circ R$, vale

$$T(w) = T(R(v)) = R(T(v)) \in Im(R).$$

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m - 1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

Logo, nos resta mostrar que $\mathrm{gr}(p) | \dim(Im(R))$. Note que $Im(R)$ é $T$-invariante pois, se $w = R(v)$ com $v \in V_p^\infty$, como $R \circ T = T \circ R$, vale

$$T(w) = T(R(v)) = R(T(v)) \in Im(R).$$

Além disso, $Im(R) \subseteq V_p$

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m-1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

Logo, nos resta mostrar que $\mathrm{gr}(p) | \dim(Im(R))$. Note que $Im(R)$ é $T$-invariante pois, se $w = R(v)$ com $v \in V_p^\infty$, como $R \circ T = T \circ R$, vale

$$T(w) = T(R(v)) = R(T(v)) \in Im(R).$$

Além disso, $Im(R) \subseteq V_p$ pois, se $v \in V_p^\infty$, $p(T)(R(v)) = p^m(T)(v) = 0$.

Se $m > 1$, considere $W = V_{p^{m-1}}$ que é um subespaço $T$-invariante, próprio e não trivial de $V_p^\infty$. Seja $S$ o operador induzido por $T$ em $W$ e note que $W = W_{p(S)}^\infty = V_{p^{m-1}}$. Logo a hip. de indução nos diz que

$$\mathrm{gr}(p) | \dim(W) \quad \text{e} \quad \frac{\dim(W)}{\mathrm{gr}(p)} \geq m-1.$$

Por fim, seja $R$ o operador em $V_p^\infty$ induzido por $p^{m-1}(T) = p(T)^{m-1}$. Observe que $W = \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 6.3.6,

$$\dim(V_p^\infty) = \dim(W) + \dim(Im(R)).$$

Logo, nos resta mostrar que $\mathrm{gr}(p) | \dim(Im(R))$. Note que $Im(R)$ é $T$-invariante pois, se $w = R(v)$ com $v \in V_p^\infty$, como $R \circ T = T \circ R$, vale

$$T(w) = T(R(v)) = R(T(v)) \in Im(R).$$

Além disso, $Im(R) \subseteq V_p$ pois, se $v \in V_p^\infty$, $p(T)(R(v)) = p^m(T)(v) = 0$. Assim, pode-se concluir a demonstração usando-se hipótese de indução com $Im(R)$ no lugar de $W$. $\square$

# Polinômio Característico

# Polinômio Característico

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\mathrm{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \ \mathrm{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\operatorname{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \operatorname{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\operatorname{gr}(p_j)} \geq k_j$$

# Polinômio Característico

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\mathrm{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \ \mathrm{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\mathrm{gr}(p_j)} \geq k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}.$$

# Polinômio Característico

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \le j \le m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\mathrm{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \ \mathrm{gr}(p_j) \le \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\mathrm{gr}(p_j)} \ge k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}.$$

Este polinômio é chamado de o polinômio característico de $T$.

# Polinômio Característico

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\mathrm{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \ \mathrm{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\mathrm{gr}(p_j)} \geq k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}.$$

Este polinômio é chamado de o polinômio característico de $T$.
Por definição, $\mathrm{gr}(c_T) = n$ e $c_T \in \mathcal{A}_T$

# Polinômio Característico

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\operatorname{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \operatorname{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\operatorname{gr}(p_j)} \geq k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}.$$

Este polinômio é chamado de o polinômio característico de $T$.
Por definição, $\operatorname{gr}(c_T) = n$ e $c_T \in \mathcal{A}_T$ (Teor. de Cayley-Hamilton!).

Se $\dim(V) = n$ é finita e $p_j^{k_j}, 1 \leq j \leq m$, são os fatores primários de $T$, segue que

$$\mathrm{gr}(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \ \mathrm{gr}(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \dim(V_{p_j^{k_j}}) = n.$$

pois

$$k_j = \min\{k : V_{p_j^k} = V_{p_j^{k+1}}\}.$$

Considere o número inteiro

$$n_j = \frac{\dim(V_{p_j^{k_j}})}{\mathrm{gr}(p_j)} \geq k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}.$$

Este polinômio é chamado de o polinômio característico de $T$.
Por definição, $\mathrm{gr}(c_T) = n$ e $c_T \in \mathcal{A}_T$ (Teor. de Cayley-Hamilton!).
Chame de $T_j$ o operador induzido por $T$ em $V_{p_j^{k_j}}$ e note que

$$c_T = \prod_{j=1}^{m} c_{T_j}.$$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.
Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

$$(*) \qquad c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$.

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.
Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

$$(*) \qquad c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.
Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\mathrm{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

$$(*) \qquad c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$ e, dado $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m$ com $k_j \leq n_j$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \ t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

$$(*) \qquad c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$ e, dado $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m$ com $k_j \leq n_j$, seja $p_{\boldsymbol{k}} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j}$.

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

$$(*) \qquad c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$ e, dado $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m$ com $k_j \leq n_j$, seja $p_{\boldsymbol{k}} = \prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$. Entre todos os polinômios da forma $p_{\boldsymbol{k}}$ t.q. $p_{\boldsymbol{k}}(A) = 0$

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.

Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$ e, dado $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m$ com $k_j \leq n_j$, seja $p_{\boldsymbol{k}} = \prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$. Entre todos os polinômios da forma $p_{\boldsymbol{k}}$ t.q. $p_{\boldsymbol{k}}(A) = 0$, aquele que tiver mínimo $k_j$ para todo $j$ é $m_T$.

# Determinante, Traço e Cálculo de $c_T$ e $m_T$

Sejam $c_k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$, tais que

$$c_T(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k \; t^{n-k}$$

e defina $\det(T) = c_n$ e $\operatorname{tr}(T) = c_1$.
Veremos que $\det(T) = \det([T]_\alpha^\alpha)$ para toda base $\alpha$ de $V$ e

(*) $$c_T(t) = \det([T]_\alpha^\alpha - tI).$$

Ganhamos assim um novo método para encontrar $m_T$:

1. Calcule $c_T$ via (*) e encontre seus fatores irredutíveis, digamos $p_1, \ldots, p_m$. Seja $n_j$ a multiplicidade de $p_j$ na fatoração de $c_T$.
2. Seja $A = [T]_\alpha^\alpha$ e, dado $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in (\mathbb{Z}_{>0})^m$ com $k_j \leq n_j$, seja $p_{\boldsymbol{k}} = \prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$. Entre todos os polinômios da forma $p_{\boldsymbol{k}}$ t.q. $p_{\boldsymbol{k}}(A) = 0$, aquele que tiver mínimo $k_j$ para todo $j$ é $m_T$. Para calcular cada $k_j$ mínimo, pode-se calcular a sequência de núcleos $V_{p_j} \subseteq V_{p_j^2} \subseteq \cdots \subseteq V_{p_j^{n_j}} = V_{p_j^{n_j+1}}$.