Álgebra Linear Avançada - Revisão Transformações Lineares

Adriano Moura

Unicamp

2020

Funções Lineares

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de W

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β.

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β. $[T]_\beta^\alpha$ determina T:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall\ v \in V.$$

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β. $[T]_\beta^\alpha$ determina T:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall \ v \in V.$$

Se $W = V$ e $T = I_V$ é a função identidade de V, segue que

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall \ v \in V.$$

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β. $[T]_\beta^\alpha$ determina T:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall\ v \in V.$$

Se $W = V$ e $T = I_V$ é a função identidade de V, segue que

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall\, v \in V. \quad \text{(matriz mudança de base)}$$

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β. $[T]_\beta^\alpha$ determina T:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall\ v \in V.$$

Se $W = V$ e $T = I_V$ é a função identidade de V, segue que

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \ \forall\, v \in V. \quad \text{(matriz mudança de base)}$$

Teorema (Fábrica de Exemplos)

Sejam $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ base de V e $\beta = (w_j)_{j\in J}$ família em W.

Funções Lineares

Uma função $T : V \to W$ entre $\mathbb{F}$-espaços vetoriais é dita linear se

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) \quad \text{para quaisquer} \quad v_1, v_2 \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Segue que $T\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j T(v_j)$.

Dadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ de V e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de W,
a família $[T]_\beta^\alpha := (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, sendo $a_{i,j}$ a coordenada de $T(v_j)$ na direção de w_i com respeito a β, é chamada de a matriz de T com respeito a α e β. $[T]_\beta^\alpha$ determina T:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha \; \forall \; v \in V.$$

Se $W = V$ e $T = I_V$ é a função identidade de V, segue que

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha \, \forall \, v \in V. \quad \text{(matriz mudança de base)}$$

Teorema (Fábrica de Exemplos)

Sejam $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ base de V e $\beta = (w_j)_{j \in J}$ família em W. Existe única $T : V \to W$ linear satisfazendo $T(v_j) = w_j$ para tdo $j \in J$.

Espaço de Transformações Lineares

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$.

Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to M_{\#I, \#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]_{\beta}^{\alpha}$, é linear e injetora.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to M_{\#I,\#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]^{\alpha}_{\beta}$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) := \{T \in \mathcal{F}(V,W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V,W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V,W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\#I,\#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]^{\alpha}_{\beta}$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ e $[T\circ S]^{\gamma}_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}[S]^{\gamma}_{\alpha}$, sendo γ base de U.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T$ é linear$\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to M_{\#I, \#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]^{\alpha}_{\beta}$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ e $[T \circ S]^{\gamma}_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}[S]^{\gamma}_{\alpha}$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) := \{T \in \mathcal{F}(V,W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V,W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V,W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\#I,\#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]_\beta^\alpha$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ e $[T\circ S]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\alpha [S]_\alpha^\gamma$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W,V)$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}$.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) := \{T \in \mathcal{F}(V,W) : T \text{ é linear}\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V,W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V,W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\#I,\#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]_\beta^\alpha$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$, $T\circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ e $[T\circ S]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\alpha [S]_\alpha^\gamma$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W,V)$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}$.

Uma transformação linear bijetora é dita um isomorfismo (linear).

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T$ é linear$\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to M_{\#I, \#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]_\beta^\alpha$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ e $[T \circ S]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\alpha [S]_\alpha^\gamma$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}$.

Uma transformação linear bijetora é dita um isomorfismo (linear).
Os espaços V e W são ditos isomorfos se existir isomorfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T$ é linear$\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V, W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j \in J}$ e $\beta = (w_i)_{i \in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \to M_{\#I, \#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]^\alpha_\beta$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ e $[T \circ S]^\gamma_\beta = [T]^\alpha_\beta [S]^\gamma_\alpha$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ e $[T^{-1}]^\beta_\alpha = ([T]^\alpha_\beta)^{-1}$.

Uma transformação linear bijetora é dita um isomorfismo (linear).
Os espaços V e W são ditos isomorfos se existir isomorfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. (A transf. lin. do item 2 é bijetora se $\#I < \infty$)

Espaço de Transformações Lineares

Notação $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) := \{T \in \mathcal{F}(V,W) : T$ é linear$\}$.
Lembre que $\mathcal{F}(V,W)$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (Revisão 1).

Proposição

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ é subespaço de $\mathcal{F}(V,W)$.
2. Fixadas bases $\alpha = (v_j)_{j\in J}$ e $\beta = (w_i)_{i\in I}$ de V e W, a função $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \to M_{\#I,\#J}(\mathbb{F}), T \mapsto [T]_\beta^\alpha$, é linear e injetora.
3. Se $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)$, $T\circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W)$ e $[T\circ S]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\alpha [S]_\alpha^\gamma$, sendo γ base de U.
4. Se T é invertível, $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W,V)$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}$.

Uma transformação linear bijetora é dita um isomorfismo (linear).
Os espaços V e W são ditos isomorfos se existir isomorfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$. (A transf. lin. do item 2 é bijetora se $\#I < \infty$)

Teorema

V e W são isomorfos se, e somente se, $\dim(V) = \dim(W)$.

Núcleo e Imagem

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T.
O denotaremos por V_T ou $\mathcal{N}(T)$.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T. O denotaremos por V_T ou $\mathcal{N}(T)$. Sua dimensão é chamada de a nulidade de T.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T. O denotaremos por V_T ou $\mathcal{N}(T)$. Sua dimensão é chamada de a nulidade de T. A dimensão da imagem de T, isto é, $T(V)$, que também denotaremos por $Im(T)$, é chamada de o posto de T.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T. O denotaremos por V_T ou $\mathcal{N}(T)$. Sua dimensão é chamada de a nulidade de T. A dimensão da imagem de T, isto é, $T(V)$, que também denotaremos por $Im(T)$, é chamada de o posto de T.

Teorema

A dimensão de V é igual a soma do posto com a nulidade de T.

Núcleo e Imagem

Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Proposição

1. Se U é subespaço de V, $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ é subespaço de W. (imagem de subespaço por transf. linear é subespaço)
2. Se U é subespaço de W, $T^{-1}(U) = \{v \in V : T(v) \in U\}$ é subespaço de V. (pré-imagem de subespaço por t.l. é subespaço)

O subespaço $T^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T. O denotaremos por V_T ou $\mathcal{N}(T)$. Sua dimensão é chamada de a nulidade de T. A dimensão da imagem de T, isto é, $T(V)$, que também denotaremos por $Im(T)$, é chamada de o posto de T.

Teorema

A dimensão de V é igual a soma do posto com a nulidade de T.

Proposição

T é injetora se, e somente se, $V_T = \{0\}$.

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).

Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).

Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.

Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).

Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.

Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.

Convenção: $T^0 := I$.

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).

Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.

Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.

Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Notação:

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Notação: Fixe $T \in \mathrm{End}(V)$.

Operadores Lineares, Autovetores e Autovalores

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Notação: Fixe $T \in \mathrm{End}(V)$. Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, defina

$$V_p := V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\}.$$

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Notação: Fixe $T \in \mathrm{End}(V)$. Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, defina

$$V_p := V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\}.$$

Se $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o subespaço $V_p = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é chamado de o autoespaço de T associado a λ.

Notação: $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$ (endomorfismos de V).
Os elementos de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são ditos operadores lineares em V.
Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, podemos considerar compostas: $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ cópias de } T}$.
Convenção: $T^0 := I$.

Logo, para todo polinômio $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, podemos considerar

$$p(T) := \sum_{k=0}^{m} a_k T^k \in \mathrm{End}(V).$$

Notação: Fixe $T \in \mathrm{End}(V)$. Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, defina

$$V_p := V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\}.$$

Se $p(t) = t - \lambda$ com $\lambda \in \mathbb{F}$, o subespaço $V_p = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ é chamado de o autoespaço de T associado a λ. Neste caso, se $V_p \neq \{0\}$, λ é dito um autovalor de T e os vetores não nulos de V_p são ditos autovetores de T com autovalor λ.

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais."

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais." Numa base de autovetores, é muito fácil compreender o que o operador faz.

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais." Numa base de autovetores, é muito fácil compreender o que o operador faz.
Porém, nem todo operador linear é diagonalizável.

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais." Numa base de autovetores, é muito fácil compreender o que o operador faz. Porém, nem todo operador linear é diagonalizável.

A pergunta que motiva o início deste curso é:

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais." Numa base de autovetores, é muito fácil compreender o que o operador faz. Porém, nem todo operador linear é diagonalizável.

A pergunta que motiva o início deste curso é: Dado um operador qualquer, existe algum tipo de base na qual a correspondente representação matricial seja "simples"?

Operadores Lineares Diagonalizáveis

Se $\beta = v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V formada por autovetores de T e λ_j é autovalor de v_j, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dito um operador diagonalizável se existir base de V formada por autovetores de T.

"Operadores diagonalizáveis são aqueles que possuem representações matriciais mais simples possíveis: diagonais." Numa base de autovetores, é muito fácil compreender o que o operador faz. Porém, nem todo operador linear é diagonalizável.

A pergunta que motiva o início deste curso é: Dado um operador qualquer, existe algum tipo de base na qual a correspondente representação matricial seja "simples"? $\rightsquigarrow$ Formas Canônicas.

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$, temos

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta.$$

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$, temos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Chamando $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}, B = [T]_{\beta}^{\beta}, P = [I]_{\alpha}^{\beta}$, a relação acima se torna

$$B = P^{-1}AP.$$

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$, temos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Chamando $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}, B = [T]_{\beta}^{\beta}, P = [I]_{\alpha}^{\beta}$, a relação acima se torna

$$B = P^{-1}AP.$$

Duas matrizes quadradas A e B quaisquer satisfazendo uma relação desta para alguma matriz invertível P são ditas semelhantes (sobre $\mathbb{F}$).

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$, temos

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta.$$

Chamando $A = [T]_\alpha^\alpha, B = [T]_\beta^\beta, P = [I]_\alpha^\beta$, a relação acima se torna

$$B = P^{-1}AP.$$

Duas matrizes quadradas A e B quaisquer satisfazendo uma relação desta para alguma matriz invertível P são ditas semelhantes (sobre $\mathbb{F}$). Assim, uma matriz é dita diagonalizável (sobre $\mathbb{F}$) se for semelhante a uma matriz diagonal.

Versão Matricial - Semelhança

Se α e β são bases de V e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, como $T = I \circ T \circ I$, temos

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta.$$

Chamando $A = [T]_\alpha^\alpha, B = [T]_\beta^\beta, P = [I]_\alpha^\beta$, a relação acima se torna

$$B = P^{-1}AP.$$

Duas matrizes quadradas A e B quaisquer satisfazendo uma relação desta para alguma matriz invertível P são ditas semelhantes (sobre $\mathbb{F}$). Assim, uma matriz é dita diagonalizável (sobre $\mathbb{F}$) se for semelhante a uma matriz diagonal.

Nem toda matriz é diagonalizável e a pergunta se torna “qual a matriz mais simples à qual ela é semelhante”?

Polinômios

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.

O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.

O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).

Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^{\times} \subseteq \mathrm{Div}(f)$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.

O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).

Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.

Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.

Observe que $\mathbb{F}^{\times} \subseteq \mathrm{Div}(f)$.

Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^{\times}$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^{\times} \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^{\times}$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$. Em alguns casos ele é primo e em outros não.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$. Em alguns casos ele é primo e em outros não. Sobre $\mathbb{R}$ ele é primo

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$. Em alguns casos ele é primo e em outros não. Sobre $\mathbb{R}$ ele é primo, mas não é primo obre $\mathbb{C}$ pois $(t - i)|f$.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.
O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).
Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.
Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$.
Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.
Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$. Em alguns casos ele é primo e em outros não. Sobre $\mathbb{R}$ ele é primo, mas não é primo obre $\mathbb{C}$ pois $(t - i)|f$.
$\mathbb{F}$ é dito algebricamente fechado se todos os primos de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ tiverem grau 1.

Polinômios

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em uma variável (que denotaremos por t em geral) com coeficientes em $\mathbb{F}$.

O corpo $\mathbb{F}$ é naturalmente identificado com o subconjunto dos polinômios constantes (de grau 0).

Um polinômio é dito mônico se o coeficiente do monômio que define o grau for 1.

Dados $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \neq 0$, diz-se que g divide f (e escreve-se $g|f$) se existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = qg$. Notação: $\mathrm{Div}(f) = \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g|f\}$. Observe que $\mathbb{F}^\times \subseteq \mathrm{Div}(f)$.

Diz-se que g é irredutível (ou primo) sobre $\mathbb{F}$ se $g \notin \mathbb{F}^\times$ e seus únicos divisores mônicos forem 1 e g.

Todo polinômio de grau 1 é primo. Para todo corpo $\mathbb{F}$ podemos considerar o polinômio $f = t^2 + 1$. Em alguns casos ele é primo e em outros não. Sobre $\mathbb{R}$ ele é primo, mas não é primo obre $\mathbb{C}$ pois $(t - i)|f$. $\mathbb{F}$ é dito algebricamente fechado se todos os primos de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ tiverem grau 1. $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado (Teor. Fundamental da Álgebra).

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.

A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m | f\}.$$

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.
A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m | f\}.$$

Teorema

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$, seu conjunto de fatores primos é finito.

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.
A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m | f\}.$$

Teorema

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$, seu conjunto de fatores primos é finito.
Se $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ é o conjunto de fatores primos de f, existe único $u \in \mathbb{F}^\times$ tal que $f = u g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_k^{m_k}$ sendo m_j a multiplicidade de g_j como fator primo de f.

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.
A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m | f\}.$$

Teorema

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$, seu conjunto de fatores primos é finito.
Se $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ é o conjunto de fatores primos de f, existe único $u \in \mathbb{F}^\times$ tal que $f = u g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_k^{m_k}$ sendo m_j a multiplicidade de g_j como fator primo de f.

Diz-se que um polinômio mônico g é máximo divisor comum (mdc) de $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.
A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m|f\}.$$

Teorema

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$, seu conjunto de fatores primos é finito.
Se $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ é o conjunto de fatores primos de f, existe único $u \in \mathbb{F}^\times$ tal que $f = ug_1^{m_1}g_2^{m_2}\cdots g_k^{m_k}$ sendo m_j a multiplicidade de g_j como fator primo de f.

Diz-se que um polinômio mônico g é máximo divisor comum (mdc) de $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$ se

$$g \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Div}(f_j) \qquad \text{e} \qquad h|g \ \forall\ h \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Div}(f_j).$$

Fatoração de Polinômios

Se g é primo, mônico e $g|f$, diremos que g é um fator primo de f.
A multiplicidade de g como fator primo de f é definida por

$$\max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : g^m | f\}.$$

Teorema

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$, seu conjunto de fatores primos é finito.
Se $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ é o conjunto de fatores primos de f, existe único $u \in \mathbb{F}^\times$ tal que $f = ug_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_k^{m_k}$ sendo m_j a multiplicidade de g_j como fator primo de f.

Diz-se que um polinômio mônico g é máximo divisor comum (mdc) de $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$ se

$$g \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Div}(f_j) \qquad \text{e} \qquad h|g \ \forall\ h \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Div}(f_j).$$

Teorema

Se $g = \mathrm{mdc}(f_1, \ldots, f_k)$, existem $g_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), 1 \leq j \leq k$, tais que $g = g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k$.

Mais Detalhes

Mais Detalhes

Fizemos uma rápida revisão dos conceitos mais importantes da teoria básica de transformações lineares. Nenhum aspecto computacional prático foi abordado aqui e outros detalhes relevantes não foram mencionados. O aluno deve ler as seções 6.1 a 6.5 do texto base (e procurar visões alternativas em outros livros), além de visitar suas listas de exercícios para suprir essas lacunas.

Aqueles que estiverem se sentindo confortável com essa parte da teoria devem pôr isso à prova fazendo os seguintes exercício teóricos: 6.1.5, 6.3.6, 6.3.7, 6.3.8, 6.3.9, 6.3.10, 6.3.11. Outro bom teste para diagnosticar seu nível de absorção da teoria é estudar a seção 6.6.

Mais Detalhes

Fizemos uma rápida revisão dos conceitos mais importantes da teoria básica de transformações lineares. Nenhum aspecto computacional prático foi abordado aqui e outros detalhes relevantes não foram mencionados. O aluno deve ler as seções 6.1 a 6.5 do texto base (e procurar visões alternativas em outros livros), além de visitar suas listas de exercícios para suprir essas lacunas.

Aqueles que estiverem se sentindo confortável com essa parte da teoria devem pôr isso à prova fazendo os seguintes exercício teóricos: 6.1.5, 6.3.6, 6.3.7, 6.3.8, 6.3.9, 6.3.10, 6.3.11. Outro bom teste para diagnosticar seu nível de absorção da teoria é estudar a seção 6.6.

Também fizemos revisão sobre fatoração de polinômios, algo que será de muita importância para o estudo de formas canônicas. O fato abordado no exercício 1.8.3 (algoritmo de Euclides para divisão), que não foi revisado aqui, também será de alta relevância.