MA148 - 1S 2019 - Segunda Chamada

Nome: ______________________________ RA: __________ 02/07/2019

1. (1,5pt) Questão sobre conjuntos a ser anunciada na hora da prova.

2. Suponha que $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 3$ e que $\#A = m$. Considere o conjunto

$$X = \{(a_1, a_2, a_3) \in A^3 : a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j\}$$

   e a função $f : A^3 \to \mathscr{P}(A)$ dada por $f(a_1, a_2, a_3) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Mostre que:

   (a) (1,5pt) $\#X = m(m-1)(m-2)$.

   (b) (0,5pt) A relação binária em A^3 dada por $a \sim a'$ se $f(a) = f(a')$ é uma relação de equivalência (denote por $[a]$ a classe de equivalência de a).

   (c) (1,5pt) Se $Y = \{[a] : a \in X\}$, então $\#Y = \#f(X) = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$.

3. (1,5pt) Suponha que um país possua notas de 4 e 5 unidades de seu dinheiro e considere o conjunto A de todos os valores possíveis de serem formados utilizando-se apenas tais notas. Encontre o mínimo do seguinte conjunto:

$$B = \{m \in A : m + k \in A \ \forall\ k \geq 0\}.$$

4. (1pt) Mostre que $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{Q}$.

5. Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais definida recursivamente por $a_0 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para todo $n \geq 0$. Mostre que:

   (a) (1,5pt) A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada.

   (b) (1pt) Conclua que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e encontre seu limite.