

MA148 - 1S 2019 - Exame Final

Nome: _____ RA: _____ 11/07/2019

1. (1,5pt) Questão sobre conjuntos a ser anunciada na hora da prova.
2. (1,2pt) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: Para todo $X \subseteq A$, vale $f^{-1}(f(X)) = X$.
3. (1,6pt) Suponha que $m \in \mathbb{N}$ e que A_1, \dots, A_m seja uma família de conjuntos finitos disjuntos, isto é, A_i é finito para todo $1 \leq i \leq m$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. Mostre que¹

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) = \sum_{i=1}^m \#A_i.$$

4. (1,5pt) Seja i número complexo tal que $i^2 = -1$ e, dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere

$$a_n = i^n \quad \text{e} \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Calcule s_n para todo $n \geq 1$.

5. (1,2pt) Mostre que todo corpo ordenado tem infinitos elementos.
6. (1,5pt) Seja A um conjunto totalmente ordenado, $B \subseteq A$ e $b \in B$. Mostre que $b = \sup_A B$ se, e somente se, $b = \max B$.
7. (1,5pt) Seja r um número real e considere a sequência $a_n = r^n, n \geq 1$. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se $r > 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ se $|r| < 1$.

¹Esse exercício foi feito em aula. Especial atenção deve ser dada ao caso $m = 2$ que foi feito antes da P1.