MA148 - 1S 2019 - Prova 3

Nome: ____________________ RA: __________ 25/06/2019

1. (2pts) Considere o conjunto $C = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{Z}$. Defina duas operações binárias em C, denotadas por $\oplus$ e $\odot$, por

$$m \circledast n = r \qquad \text{se} \qquad m * n = 3q + r$$

com $q \in \mathbb{Z}, r \in C$ e $* \in \{+, \cdot\}$, sendo $+$ e $\cdot$ a soma e multiplicação de $\mathbb{Z}$. Mostre que, com estas operações, C se torna um corpo. Pode-se definir ordem em C para torná-lo um corpo ordenado?

2. (1,2pt) Mostre que $\mathbb{Z}$ é ilimitado tanto inferior quanto superiormente em $\mathbb{R}$.

3. (1,2pt) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Mostre que A não tem mínimo.

4. (1,2pt) Suponha que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de números racionais e considere a sequência $b_n = a_{n+148}, n \geq 0$. Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e somente se, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir.

5. (1,2pt) Considere a sequência $a_n = \frac{n-1}{n}, n \geq 1$. Encontre $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0,999 < a_n < 1,001$ para todo $n \geq n_0$.

6. (1,2pt) Mostre que a sequência $a_n = \sqrt{\frac{9n^2+3n-2}{4n^2+4n}}, n \geq 1$, converge e encontre seu limite.

7. Considere as seguintes sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$a_n = \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{sendo } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que} \quad 2^k < n \leq 2^{k+1} \qquad \text{e} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   (a) (0,8pt) Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não crescente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

   (b) (1,2pt) Verifique que $a_n \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$ e use este fato para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$