

MA148 - 1S 2019 - Prova 2 - Instruções

A prova conterà 5 exercícios, sendo que 3 deles estão listados abaixo. No início da prova, cada aluno receberá um conjunto de 4 folhas, sendo 1 folha de perguntas (com os 5 exercícios) e 3 folhas em branco.

A prova será individual, sendo vedada a utilização de consultas a qualquer fonte, além de seus conhecimentos e sua memória. Todas as páginas em branco, incluindo as costas da folha de perguntas, podem ser usadas para escrever as respostas.

O aluno pode responder os exercícios na ordem que desejar, identificando claramente o exercício que está sendo respondido em cada momento. As respostas podem ser deixadas a lápis.

1. (1,5pt) Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$. Mostre que existe único $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$0 \leq r < n \quad \text{e} \quad m = qn + r.$$

2. Uma loja vende cartões de presente nos valores de 3 e 5 reais.

- (a) (1,5pt) Mostre que qualquer valor inteiro maior ou igual a 8 reais pode ser formado utilizando-se tais cartões.
- (b) (1pt) Encontre a quantidade mínima de cartões de 3 reais que a loja precisa ter para formar qualquer valor entre 8 e 1000 reais, supondo que ela possua 200 cartões de 5 reais.

3. Dado um conjunto finito A com $\#A = n \geq 2$, considere $X = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b\}$.

- (a) (1,5pt) Considere a função $\pi : X \rightarrow A$ dada por $\pi(a, b) = b$. Calcule $\#\pi^{-1}(\{a\})$ para cada $a \in A$ e use o resultado para mostrar que $\#X = n(n - 1)$.
- (b) (0,5pt) Mostre que a relação binária em X dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se $\{a, b\} = \{c, d\}$ é uma relação de equivalência.
- (c) (1,5pt) Sejam Y o conjunto cujos elementos são as classes de equivalência da relação do item (b) e $Z = \{B \in \mathcal{P}(A) : \#B = 2\}$. Mostre que $\#Y = \#Z = \frac{n(n-1)}{2}$.