MA148 - 1S 2019 - Prova 2 - Gabarito

1. (1,5pt) Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$. Mostre que existe único $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$0 \leq r < n \qquad \text{e} \qquad m = qn + r.$$

Mostremos primeiro a unicidade. Assim, suponha que (q, r) e (q', r') satisfazem a propriedade requerida e, sem perda de generalidade, que $r' \geq r$. Segue que

$$qn + r = q'n + r' \quad \text{e, portanto,} \quad (q - q')n = r' - r \geq 0.$$

Mas, como $r' < n$ e $r \geq 0$, segue que $r' - r < n - r \leq n$. Como todo múltiplo positivo de n é estritamente maior que ou igual a n e $r' - r$ é múltiplo não negativo de n como visto acima, segue que $r' - r = 0$, isto é, $r' = r$. Mas então, $(q - q')n = 0$ e, como $n \neq 0$, segue que $q' = q$.

Para mostrar a existência, mostremos primeiro para $m \geq 0$ que existe $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo a propriedade requerida. Isso será feito por indução em m. Para $m = 0$, basta ver que o par $(0, 0)$ satisfaz a propriedade: $0 = 0n + 0$. Agora, suponha que $m = qn + r$, por hipótese de indução, e analisemos o que acontece com $m + 1$. Suponha primeiro que $r < n - 1$. Neste caso temos

$$m + 1 = (qn + r) + 1 = qn + (r + 1) \qquad \text{e} \qquad r + 1 < n.$$

Portanto, o par $(q, r + 1) \in \mathbb{N}^2$ satisfaz a propriedade com respeito a $m + 1$. Por outro lado, se $r = n - 1$, temos

$$m + 1 = (qn + r) + 1 = qn + ((n - 1) + 1) = (q + 1)n$$

e, portanto, o par $(q + 1, 0) \in \mathbb{N}^2$ satisfaz a propriedade.

Finalmente, se $m < 0$, temos $m = -k = (-1)k$ para algum $k \geq 0$. Se (q, r) é o par tal que $k = nq + r$, segue que

$$m = (-q)n - r.$$

Se $r = 0$, concluímos que o par $(-q, 0)$ satisfaz a propriedade com respeito a m. Se $r > 0$, considere $r' = n - r < n$. Como $n > r$, também temos $r' > 0$. Além disso, como $r = n - r'$, temos

$$m = (-q)n - r = (-q)n - (n - r') = (-q - 1)n + r'$$

e, portanto, o par $(-q - 1, n - r)$ satisfaz a propriedade.

2. Uma loja vende cartões de presente nos valores de 3 e 5 reais.

   (a) (1,5pt) Mostre que qualquer valor inteiro maior ou igual a 8 reais pode ser formado utilizado-se tais cartões.

   (b) (1pt) Encontre a quantidade mínima de cartões de 3 reais que a loja precisa ter para formar qualquer valor entre 8 e 1000 reais, supondo que ela possua 200 cartões de 5 reais.

(a) Precisamos mostrar que, se $m \geq 8$, existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $m = 3a + 5b$.

Pelo exercício 1 com $n = 5$, dado $m \geq 0$, existe $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ com $r < 5$ tal que $m = 5q + r$. Para cada possibilidade de r, procedamos por indução em q. O caso base em cada possibilidade corresponde a $q_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : 5k + r \geq 8\}$ (o mínimo existe pelo Princípio da Boa Ordem).

$\boldsymbol{r = 0}$: Neste caso, todos os valores, inclusive os menores que 8, podem ser formados utilizando apenas cartões de 5. Em outras palavras, se $m = 5q$, basta escolher $a = 0$ e $b = q$. Todavia, como para $0 \leq k < 2$ temos $5k + 0 < 8$ e $5 \cdot 2 + 0 = 10 > 8$, segue que o caso base para $r = 0$ é $q_0 = 2$ que corresponde a $m = 10$.

$\boldsymbol{r = 1}$: Consideremos os números da forma $5k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$. Como para $0 \leq k < 2$ temos $5k + 1 < 8$ e $5 \cdot 2 + 1 = 11 > 8$, segue que o caso base para $r = 1$ é $q_0 = 2$ que corresponde a $m = 11$. Para $m = 11$ podemos escolher $a = 2$ e $b = 2$ pois $11 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1$.

$\boldsymbol{r = 2}$: Consideremos os números da forma $5k + 2$ com $k \in \mathbb{N}$. Como para $0 \leq k < 2$ temos $5k + 2 < 8$ e $5 \cdot 2 + 2 = 12 > 8$, segue que o caso base para $r = 2$ é $q_0 = 2$ que corresponde a $m = 12$. Para $m = 12$ podemos escolher $a = 4$ e $b = 0$ pois $12 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0$.

$\boldsymbol{r = 3}$: Consideremos os números da forma $5k + 3$ com $k \in \mathbb{N}$. Como para $k = 0$ temos $5k + 3 < 8$ e $5 \cdot 1 + 3 = 8$, segue que o caso base para $r = 3$ é $q_0 = 1$ que corresponde a $m = 8$. Para $m = 8$ podemos escolher $a = 1$ e $b = 1$ pois $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$.

$\boldsymbol{r = 4}$: Consideremos os números da forma $5k + 4$ com $k \in \mathbb{N}$. Como para $k = 0$ temos $5k + 4 < 8$ e $5 \cdot 1 + 4 = 9$, segue que o caso base para $r = 4$ é $q_0 = 1$ que corresponde a $m = 9$. Para $m = 9$ podemos escolher $a = 3$ e $b = 0$ pois $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$.

Assim, completamos a demonstração do caso base para cada possibilidade de r. O passo indutivo será o mesmo para todas as possibilidades. Então, suponha, por hipótese de indução que, para um certo $q \geq q_0$, existam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $5q + r = 3a + 5b$. Segue que

$$5(q + 1) + r = (5q + r) + 5 = (3a + 5b) + 5 = 3a + 5(b + 1),$$

demonstrando a tese de indução.

(b) Como $5 \cdot 200 = 1000$, segue que qualquer valor entre 8 e 1000 pode ser formado desde que tenhamos suficientes cartões de 3 disponíveis.

Segue do passo indutivo da parte (a) que podemos formar $5(q+1)+r$ adicionando-se um cartão de 5 e mantendo a quantidade utilizada de cartões de 3. Portanto, a quantidade mínima de cartões de 3 necessários em cada possibilidade de r é igual à do correspondente caso base.

Na análise destes casos na parte (a), conseguimos formar todos os valores utilizando, no máximo, 4 cartões de 3. Logo, se a loja tiver pelo menos 4 cartões de 3, todos os valores poderão ser obtidos.

Lembre que só precisamos de 4 cartões de 3 no caso $m = 12$. Assim, resta mostrar que não é possível obter 12 com menos cartões de 3. Em outras palavras, precisamos mostrar que se $a, b \in \mathbb{N}$ satisfazem $12 = 3a + 5b$, necessariamente devemos ter $a \geq 4$. De fato,

$$12 = 3a + 5b \quad \Leftrightarrow \quad 12 - 3a = 5b \quad \Leftrightarrow \quad 3(4 - a) = 5b.$$

Como $5b \geq 0$, as regras de sinais para a multiplicação implicam que $4 - a \geq 0$, isto é, $a \geq 4$. [1]

3. Dado um conjunto finito A com $\#A = n \geq 2$, considere $X = \{(a, b) \in A \times A : a \neq b\}$.

   (a) (1,5pt) Considere a função $\pi : X \to A$ dada por $\pi(a, b) = b$. Calcule $\#\pi^{-1}(\{a\})$ para cada $a \in A$ e use o resultado para mostrar que $\#X = n(n - 1)$.

   (b) (0,5pt) Mostre que a relação binária em X dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se $\{a, b\} = \{c, d\}$ é uma relação de equivalência.

[1] A parte (a) seria resolvida mais rapidamente se usássemos o exercício 1 com $n = 3$ ao invés de 5. Porém, a parte (b) necessita da análise dos casos base com $n = 5$ e, por isso, foi feita essa escolha.

(c) (1,5pt) Sejam Y o conjunto cujos elementos são as classes de equivalência da relação do item (b) e $Z = \{B \in \mathscr{P}(A) : \#B = 2\}$. Mostre que $\#Y = \#Z = \frac{n(n-1)}{2}$.

(a) Por definição de pré-imagem,

$$\pi^{-1}(\{a\}) = \{(x,y) \in X : \pi(x,y) = a\} = \{(x,y) \in X : y = a\}.$$

Então, por definição de X, segue que

$$\pi^{-1}(\{a\}) = \{(x,a) \in A^2 : x \neq a\}.$$

Assim, para cada $a \in A$, temos uma função $f_a : A \setminus \{a\} \to \pi^{-1}(\{a\})$ dada por $f(x) = (x,a)$. Vejamos que f_a é bijetora. Considere $g_a : \pi^{-1}(\{a\}) \to A\setminus\{a\}$ dada por $g_a(x,a) = x$ e veja que

$$f_a(g_a(x,a)) = f_a(x) = (x,a) \qquad \text{e} \qquad g_a(f_a(x)) = g_a(x,a) = x$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$. Logo, g_a é inversa de f_a. Portanto, $\#\pi^{-1}(\{a\}) = \#(A \setminus \{a\})$. Por sua vez, como $A = \{a\} \mathring{\cup} (A \setminus \{a\})$, segue que

$$n = \#A = 1 + \#(A \setminus \{a\})$$

e, portanto, $\#(A \setminus \{a\}) = n - 1$.

Como visto em aula, a família $(\pi^{-1}(\{a\}))_{a\in A}$ é uma família de conjuntos disjuntos e

$$X = \bigcup_{a\in A} \pi^{-1}(\{a\}).$$

Assim, segue do princípio aditivo de contagem que

$$\#X = \sum_{a\in A} \#\pi^{-1}(\{a\}) = \sum_{a\in A}(n-1) = n(n-1).$$

(b) Reflexividade: Se $(c,d) = (a,b)$, evidentemente $\{c,d\} = \{a,b\}$ e, portanto, $(c,d) \sim (a,b)$.

Simetria: Se $(a,b) \sim (c,d)$, isto é, $\{a,b\} = \{c,d\}$, evidentemente, $\{c,d\} = \{a,b\}$ e, portanto, $(c,d) \sim (a,b)$.

Transitividade: Suponha $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$, isto é, $\{a,b\} = \{c,d\}$ e $\{c,d\} = \{e,f\}$. Logo, $\{a,b\} = \{e,f\}$, mostrando que $(a,b) \sim (e,f)$.

(c) Denote por $[a,b]$ a classe de equivalência de (a,b). Vejamos que $[a,b] = \{(a,b),(b,a)\}$. De fato,

$$(x,y) \in [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \sim (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \{x,y\} = \{a,b\}.$$

Mas isso quer dizer que, ou $x = a$, e portanto $y = b$, ou $x = b$, e portanto $y = a$. Ou seja, $(x,y) = (a,b)$ ou $(x,y) = (b,a)$. Como cada $y \in Y$ é da forma $[a,b]$ para alguma escolha de $a \neq b$, segue que

$$\#y = 2 \qquad \text{para todo} \qquad y \in Y.$$

Considere a função $\psi : X \to Y$ dada por $\psi(a,b) = [a,b]$, que é sobrejetora por definição de Y. Então,

$$X = \bigcup_{y\in Y} \psi^{-1}(\{y\}) \qquad \text{e, portanto,} \qquad \#X = \sum_{y\in Y} \#\psi^{-1}(\{y\}).$$

Mas

$$\psi^{-1}(\{y\}) = \{(a,b) \in X : \psi(a,b) = y\} = \{(a,b) \in X : [a,b] = y\}.$$

Ou seja, $\psi^{-1}(\{y\}) = y$, olhando y como subconjunto de X, ao invés de como elemento de Y. Portanto,

$$n(n-1) = \#X = \sum_{y \in Y} \#\psi^{-1}(\{y\}) = \sum_{y \in Y} 2 = \#Y \cdot 2.$$

Assim, $\#Y = n(n-1)/2$.

Finalmente, mostremos que existe função bijetora $f : Z \to Y$. De fato, dado $B \in Z$, temos $B = \{a, b\}$ para alguma escolha de $a, b \in A$ com $a \neq b$. Defina $f(B) = [a, b]$. Em particular, f é sobrejetora. A função $g : Y \to Z$ dada por $g([a, b]) = \{a, b\}$ é claramente a inversa de f.

4. (1pt) Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números naturais dada por $a_n = 6n^2$. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = m(m+1)(2m+1) \qquad \text{para todo} \qquad m \geq 1.$$

Procedamos por indução em m. Para $m = 1$, o somatório é simplesmente $a_1 = 6$. Por outro lado,

$$m(m+1)(2m+1) = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Agora, suponha que a igualdade valha para algum $m \geq 1$. Precisamos mostrar a tese de indução que é

$$\sum_{n=1}^{m+1} a_n = (m+1)(m+2)(2m+3) = (m+1)(2m^2 + 7m + 6).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m+1} a_n = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right) + a_m &\overset{HI}{=} (m(m+1)(2m+1)) + 6(m+1)^2 \\ &= (m+1)\left(m(2m+1) + 6(m+1)\right) = (m+1)(2m^2 + 7m + 6),\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

5. (1,5pt) Dados conjuntos A, B, C, determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: $C \setminus (B \setminus A)$ é a união disjunta dos conjuntos $A \cap B \cap C$ e $C \setminus B$.

É verdadeira. Para ver que os conjuntos $A \cap B \cap C$ e $C \setminus B$ são disjuntos, isto é,

$$(A \cap B \cap C) \cap (C \setminus B) = \emptyset,$$

basta observar que, se $x \in B$, então $x \notin C \setminus B$.

Mostremos que $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap B \cap C) \cup (C \setminus B)$ seguindo o gabarito da P1. Para isso, precisamos verificar que

$$C \setminus (B \setminus A) \subseteq (A \cap B \cap C) \cup (C \setminus B) \qquad \text{e} \qquad (A \cap B \cap C) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (B \setminus A). \tag{1}$$

Comece lembrando que, dados conjuntos X e Y, temos

$$x \in X \setminus Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ e } x \notin Y. \tag{2}$$

Logo,

$$x \notin X \setminus Y \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X \text{ ou } x \in Y. \tag{3}$$

Mostremos a primeira das inclusões em (1). Dado $x \in C \setminus (B \setminus A)$, segue de (2) com $X = C$ e $Y = B \setminus A$ que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad x \notin B \setminus A.$$

Agora, usando (3), concluímos que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad (x \notin B \text{ ou, caso contrário, } x \in A)\,.$$

Isso é o mesmo que dizer que

$$(x \in C \text{ e } x \notin B) \qquad \text{ou} \qquad (x \in C \text{ e } x \in A \cap B)\,.$$

No primeiro caso temos $x \in C \setminus B$, enquanto no segundo, $x \in A \cap B \cap C$.

Agora, mostremos a segunda das inclusões em (1). Dado $x \in (A \cap B \cap C) \cup (C \setminus B)$, temos

$$(x \in A, x \in B \text{ e } x \in C) \qquad \text{ou} \qquad (x \in C \text{ e } x \notin B)\,.$$

Em ambos os casos, $x \in C$. Além disso, temos $x \in A$ (primeiro caso) ou $x \notin B$ (segundo caso) e, portanto, segue de (3) que $x \notin B \setminus A$. Assim, concluímos que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad x \notin B \setminus A.$$

Novamente usando (2) com $X = C$ e $Y = B \setminus A$, concluímos que $x \in C \setminus (B \setminus A)$ como queríamos mostrar.