MA148 - 1S 2019 - Prova 1 - Gabarito

1. Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Exercícios 1.3.6 e 1.3.7 do livro 2

   (a) Mostre que, se $n > m$, não existe função sobrejetora de $[1, m]_{\mathbb{N}}$ em $[1, n]_{\mathbb{N}}$.[1]

   (b) Mostre que se A é um conjunto e existem funções bijetoras $f : A \to [1, m]_{\mathbb{N}}$ e $g : A \to [1, n]_{\mathbb{N}}$, então $m = n$.

Usemos (a) para mostrar (b). Como temos $m \leq n$ ou $n \leq m$ (pois $\leq$ é uma ordem total), suponhamos, sem perda de generalidade, que seja $m \leq n$.[2] Mostremos que $n \neq m$ contradiz a parte (a) e, portanto, devemos ter $n = m$. De fato, como f é bijetora, admite função inversa. Seja h a função inversa de f e considere $g \circ h$ que é uma função de $[1, m]_{\mathbb{N}}$ em $[1, n]_{\mathbb{N}}$. Como g e h são sobrejetoras, $g \circ h$ também é. Mas isso contradiz a parte (a) se fosse se $n > m$.

Para provar a parte (a), procedamos por indução em $m \geq 1$. Se $m = 1$, temos $[1, m]_{\mathbb{N}} = \{1\}$ e, como $n \geq 2$, existem $a, b \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ com $a \neq b$. Asim, dada $f : [1, m]_{\mathbb{N}} \to [1, n]_{\mathbb{N}}$, pelo menos uma das seguintes duas opções acontece: $f(1) \neq a$ ou $f(1) \neq b$. Logo, f não é sobrejetora.

Agora suponha, por hipótese de indução, que não exista função sobrejetora de $[1, m]_{\mathbb{N}}$ em $[1, n]_{\mathbb{N}}$ para algum $m \geq 1$ e todo $n > m$. Precisamos mostrar que, se $m + 1 < k$, também não existe função sobrejetora de $[1, m + 1]_{\mathbb{N}}$ em $[1, k]_{\mathbb{N}}$, completando o argumento indutivo.

Seja f uma função qualquer de $[1, m + 1]_{\mathbb{N}}$ em $[1, k]_{\mathbb{N}}$ e mostremos que f não é sobrejetora. Como $k > m + 1 > 0$, segue que $k = n + 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $m < n$. De fato, dizer que $k > m + 1$ significa que $k = m + 1 + \ell$ para algum $\ell \neq 0$. Mas então,

$$n + 1 = k = m + \ell + 1,$$

e a Lei do Cancelamento para a soma nos diz que $n = m + \ell$, de onde segue que $m < n$.

Seja $a = f(m + 1) \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ e considere a função $g : [1, k]_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < a; \\ 1, & \text{se } x = a; \\ y, & \text{se } x > a \end{cases}$$

sendo y é o único elemento de $\mathbb{N}$ que tem x como sucessor. Vejamos que

$$Im(g) = [1, n]_{\mathbb{N}}. \tag{1}$$

De fato, se $x < a$, então $x + 1 \leq a \leq k = n + 1$ e, portanto, cancelando o "+1", segue que $g(x) = x \leq n$. Se $x > a$, como $x \leq k$, segue que $a + 1 \leq x \leq k = n + 1$. Mas $x = y + 1$ e, portanto, $1 \leq a \leq y \leq n$. Isso mostra que $Im(g) \subseteq [1, n]_{\mathbb{N}}$. Reciprocamente, dado $z \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, precisamos mostrar que existe $x \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ tal que $z = g(x)$. Se $z < a$, temos $z = g(z)$. Se $z \geq a$, como $z \leq n < k$, tomando $x = z + 1$, segue que $a < x \leq k$ e, portanto, $g(x) = z$.

A seguir, considere a função $h : [1, m]_{\mathbb{N}} \to [1, n]_{\mathbb{N}}$ dada por

$$h(x) = g(f(x)) \qquad \text{para todo} \qquad x \in [1, m]_{\mathbb{N}}.$$

Pela hipótese de indução, h não é sobrejetora. Mas, se f fosse sobrejetora, teríamos

$$Im(h) = g(Im(f)) = g([1, k]_{\mathbb{N}}) \overset{(1)}{=} [1, n]_{\mathbb{N}}, \tag{2}$$

contradizendo a hipótese de indução. Logo, f não pode ser sobrejetora. Justifiquemos a primeira igualdade em (2):

$$\begin{aligned} z \in Im(h) &\Leftrightarrow z = h(x) \text{ para algum } x \in [1, m]_{\mathbb{N}} \\ &\Leftrightarrow z = g(f(x)) \text{ para algum } x \in [1, m]_{\mathbb{N}} \\ &\Leftrightarrow z = g(u) \text{ para algum } u \in Im(f). \end{aligned}$$

[1] Isto é equivalente ao chamado Princípio da Casa dos Pombos que diz que não existe função injetora de $[1, m]_{\mathbb{N}}$ em $[1, n]_{\mathbb{N}}$ se $m > n$.

[2] Se fosse $n \leq m$, bastaria inverter os papéis de f e g no argumento que segue.

2. Mostre que se $a, b, c \in \mathbb{N}, c \neq 0$ e $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$.
Relacionado ao Exercício 1.4.17 do livro 2

Como $a < b$, existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $b = a + k$. Assim, temos

$$b \cdot c = (a + k) \cdot c \overset{*}{=} (a \cdot c) + (k \cdot c).$$

No passo marcado com $*$ usamos a distributividade (assim como abaixo). Agora, como $c \neq 0$, temos $c = d + 1$ para algum $d \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$k \cdot c \overset{*}{=} k \cdot (d + 1) = kd + k \neq 0.$$

Juntando com o que fizemos antes, segue que

$$b \cdot c = (a \cdot c) + \ell \qquad \text{com} \qquad \ell \neq 0.$$

Ou seja, $a \cdot c < b \cdot c$.

3. Dado $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mostre que $(1 + m)^n > 1 + m \cdot n$ para todo $n \geq 2$. Exercício 3.9 do livro 1

Provaremos por indução em $n \geq 2$. Para $n = 2$ temos

$$(1 + m)^2 = (1 + m) \cdot (1 + m) \overset{*}{=} 1 + 2m + m^2.$$

No passo marcado com $*$ usamos a distributividade assim como a associatividade e a comutatividade da adição em $\mathbb{N}$. Isso mostra que $(1+m)^2 \geq 1+2m$. Para concluir, precisamos mostrar que $m^2 \neq 0$. De fato, como $m \neq 0$, temos $m = 1 + k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$m^2 = (1 + k)^2 = 1 + 2k + k^2 \neq 0.$$

Agora, suponha por hipótese de indução que $(1 + m)^n > 1 + m \cdot n$ para algum $n \geq 2$ e lembre que

$$(1 + m)^{n+1} = (1 + m)^n \cdot (1 + m).$$

Sejam $a = 1 + mn, b = (1 + m)^n, c = 1 + m \neq 0$. Pela hipótese de indução, $b > a$. Então, usando-se o exercício 2, concluímos que $b \cdot c > a \cdot c$, isto é, $b \cdot c = a \cdot c + k$ para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}(1 + m)^{n+1} &= b \cdot c = a \cdot c + k = (1 + mn)(1 + m) + k \overset{*}{=} 1 + m + mn + m^2 n + k \\ &\overset{*}{=} 1 + m(n + 1) + (m^2 n + k).\end{aligned}$$

Novamente, nos passos marcado com $*$, usamos a distributividade assim como a associatividade e a comutatividade da adição em $\mathbb{N}$. Como $m^2 n + k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (pois $k \neq 0$), segue que

$$(1 + m)^{n+1} > 1 + m(n + 1).$$

4. Mostre que qualquer valor inteiro maior ou igual a 4 reais pode ser obtido utilizando-se apenas notas de 2 e 5 reais. [3] Exercício 3.12 do livro 1

Dado $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, precisamos mostrar que existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $n = 2a + 5b$.

[3] As seguintes propriedades podem ser usadas sem demonstração:

(1) Um número é par se e somente se for múltiplo de 2;

(2) A soma de números com a mesma paridade é par e a soma dois números de paridade distintas é ímpar;

(3) O produto de números ímpares é ímpar;

(4) $2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2$.

Se n é par, isto é, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, podemos escolher $a = k$ e $b = 0$. Caso contrário, n é sucessor de um número par e, portanto, $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Veja que temos $n = 1 < 4$ se $k = 0$ e, se $k = 1$, temos $n = 3 < 4$. Logo, devemos ter $k \geq 2$. Procedamos por indução em $k \geq 2$.

Para $k = 2$ temos $n = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e podemos escolher $a = 0$ e $b = 1$. Agora, por hipótese de indução, suponha que $2k + 1 = 2a + 5b$ e mostremos que

$$\exists\ a', b' \in \mathbb{N} \qquad \text{tais que} \qquad 2(k+1) + 1 = 2a' + 5b',$$

completando o argumento indutivo. De fato,

$$2(k+1) + 1 \overset{*}{=} (2k+1) + 2 \overset{\text{HI}}{=} (2a + 5b) + 2 \overset{*}{=} 2(a+1) + 5b.$$

Nos passos marcado com $*$, usamos a distributividade assim como a associatividade e a comutatividade da adição em $\mathbb{N}$. Logo, podemos tomar $a' = a + 1$ e $b' = b$.[4]

5. Dados conjuntos A, B, C, determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$. Exercício 2.8(d) do livro 1

   Para ver se é verdadeira, precisamos mostrar se valem

$$C \setminus (B \setminus A) \subseteq (A \cap C) \cup (C \setminus B) \qquad \text{e} \qquad (A \cap C) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (B \setminus A). \tag{3}$$

   Comece lembrando que, dados conjuntos X e Y, temos

$$x \in X \setminus Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ e } x \notin Y. \tag{4}$$

   Logo,

$$x \notin X \setminus Y \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X \text{ ou } x \in Y. \tag{5}$$

   Mostremos a primeira das inclusões em (3). Dado $x \in C \setminus (B \setminus A)$, segue de (4) com $X = C$ e $Y = B \setminus A$ que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad x \notin B \setminus A.$$

   Agora, usando (5), concluímos que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad (x \notin B \text{ ou } x \in A)\,.$$

   Isso é o mesmo que dizer que

$$(x \in C \text{ e } x \notin B) \qquad \text{ou} \qquad (x \in C \text{ e } x \in A)\,.$$

   No primeiro caso temos $x \in C \setminus B$, enquanto no segundo, $x \in A \cap C$. Portanto, $x \in (A \cap C) \cup (C \setminus B)$ como queríamos mostrar.

   Finalmente, mostremos a segunda das inclusões em (3). Dado $x \in (A \cap C) \cup (C \setminus B)$, temos

$$(x \in C \text{ e } x \in A) \qquad \text{ou} \qquad (x \in C \text{ e } x \notin B)\,.$$

   Em ambos os casos, $x \in C$. Além disso, temos $x \in A$ (primeiro caso) ou $x \notin B$ (segundo caso) e, portanto, segue de (5) que $x \notin B \setminus A$. Assim, concluímos que

$$x \in C \qquad \text{e} \qquad x \notin B \setminus A.$$

   Novamente usando (4) com $X = C$ e $Y = B \setminus A$, concluímos que $x \in C \setminus (B \setminus A)$ como queríamos mostrar.[5]

---

[4]Observe que isso nos permite concluir algo mais forte: Qualquer valor pode ser obtido utilizando-se notas de 2 e, no máximo, uma nota de 5. Tente formalizar o argumento para chegar nessa conclusão.

[5]Observe que esta segunda parte é exatamente a demonstração da primeira parte lida de trás para frente.