Geometria Analítica
Cônicas - Conceitos Básicos

Adriano Moura

Unicamp

2021

Equações Quadráticas

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são:

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio.

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, a circunferência de raio r centrada em p é o subconjunto

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, a circunferência de raio r centrada em p é o subconjunto

$$C(\mathrm{p}, r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = r\}.$$

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, a circunferência de raio r centrada em p é o subconjunto

$$C(\mathrm{p}, r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = r\}.$$

Duas circunferências são ditas concêntricas se possuírem o mesmo centro.

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, a circunferência de raio r centrada em p é o subconjunto

$$C(\mathrm{p}, r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = r\}.$$

Duas circunferências são ditas concêntricas se possuírem o mesmo centro. Segue imediatamente da definição de distância entre pontos que

$$(x, y) \in C(\mathrm{p}, r) \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Equações Quadráticas

Objetivo final: caracterizar geometricamente os conjuntos soluções de equações polinomiais de grau 2 em duas e três variáveis ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Em duas variáveis, veremos que as possibilidades são: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma reta, um ponto, vazio. As quatro primeiras são conhecidas como (seções) cônicas e são caracterizáveis por uma propriedade a respeito das distâncias de seus pontos a um certo conjunto de pontos fixado.

Dados um ponto $\mathrm{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$, a circunferência de raio r centrada em p é o subconjunto

$$C(\mathrm{p}, r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = r\}.$$

Duas circunferências são ditas concêntricas se possuírem o mesmo centro. Segue imediatamente da definição de distância entre pontos que

$$(x, y) \in C(\mathrm{p}, r) \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Esta equação pode ser re-escrita como

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{com} \quad a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$$

Elipses

Elipses

Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$.

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1 \mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$).

Elipses

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.

Elipses

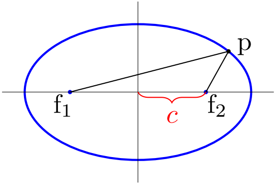
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



Elipses

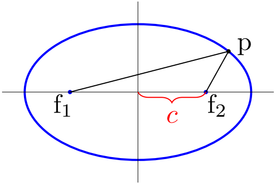
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

Elipses

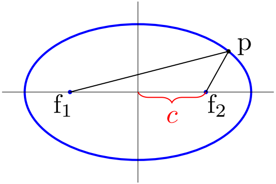
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

Elipses

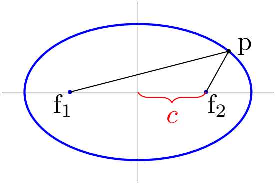
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ é chamado de centro.

Elipses

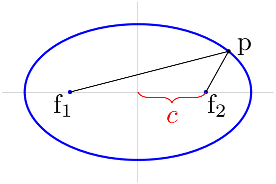
Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(f_1, f_2, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, f_1) + d(p, f_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(f_1, f_2)$. Observe que

1. $E(f_1, f_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(f_1, f_2, e) = \overline{f_1 f_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{f_1 f_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

Elipses

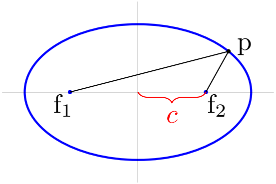
Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(f_1, f_2, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, f_1) + d(p, f_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(f_1, f_2)$. Observe que

1. $E(f_1, f_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(f_1, f_2, e) = \overline{f_1 f_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{f_1 f_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

A reta perpendicular passando pelo centro é chamada de eixo secundário.

Elipses

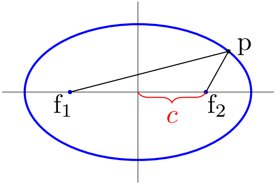
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2) = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a < c$ (isto é, se $c > 0$ e $e > 1$),
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ se $a = c$ (isto é, $c = 0$ ou $e = 1$).

Logo, ele só é interessante se $a > c$ (e portanto $c \neq 0$ e $e < 1$). Neste caso, ele é chamado de a elipse com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

A reta perpendicular passando pelo centro é chamada de eixo secundário.

Os ponto na interseção dos eixos com a elipse são chamados de vértices.

Elipses – Equação Padrão

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação.

Elipses – Equação Padrão

Se $p_1 = (c, 0)$ e $p_2 = (-c, 0)$, $E(p_1, p_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(p, p_1) + d(p, p_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elipses – Equação Padrão

Se $p_1 = (c, 0)$ e $p_2 = (-c, 0)$, $E(p_1, p_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(p, p_1) + d(p, p_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $p \in E(p_1, p_2, e)$ temos:

Elipses – Equação Padrão

Se $p_1 = (c, 0)$ e $p_2 = (-c, 0)$, $E(p_1, p_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(p, p_1) + d(p, p_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $p \in E(p_1, p_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

Elipses – Equação Padrão

Se $\mathrm{p}_1 = (c,0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c,0)$, $E(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p},\mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p},\mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \ \Rightarrow \ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \ \Rightarrow \ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2acx + c^2x^2$

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \;\Rightarrow\; a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2acx + c^2x^2$

$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \ \Rightarrow \ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2acx + c^2x^2$

$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ \Leftrightarrow \ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$

Se $\mathrm{p}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{p}_2 = (-c, 0)$, $E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $\mathrm{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $\mathrm{p} \in E(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \;\Rightarrow\; a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2acx + c^2x^2$

$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \;\Leftrightarrow\; b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$

Como $a > c$, temos $b \neq 0$

Se $p_1 = (c, 0)$ e $p_2 = (-c, 0)$, $E(p_1, p_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Dem.: Seja S o conj. solução da equação. Dado $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$d(p, p_1) + d(p, p_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Assim, se $p \in E(p_1, p_2, e)$ temos:

Se $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \ \Rightarrow\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2acx + c^2x^2$

$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ \Leftrightarrow\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$

Como $a > c$, temos $b \neq 0$ e segue que $p \in S$.

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Reciprocamente, se p $\in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2$$

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se p $\in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2)$$

Reciprocamente, se p $\in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)}$$

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) = & \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ & + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \end{aligned}$$

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} \end{aligned}$$

Elipses – Equação Padrão

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &+ \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x+c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a-ex)^2} + \sqrt{(a+ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$.

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x+c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a+ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$. De fato,

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Reciprocamente, se p $\in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x+c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$. De fato,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \le a^2$$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$. De fato,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x - c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x + c)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$. De fato,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Portanto, $a - ex \geq a(1 + e) > 0$

Reciprocamente, se p $\in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p}, \mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x+c)^2 + (1-e^2)(a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a - ex)^2} + \sqrt{(a + ex)^2} = |a - ex| + |a + ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a - ex| = a - ex$ e $|a + ex| = a + ex$. De fato,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \le a^2 \quad \Rightarrow \quad -a \le x \le a.$$

Portanto, $a - ex \ge a(1 + e) > 0$ e $a + ex \ge a(1 - e) > 0$. $\square$

Reciprocamente, se $\mathrm{p} \in S$, temos

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x^2 = (1-e^2)(a^2 - x^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{p},\mathrm{p}_1) + d(\mathrm{p},\mathrm{p}_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2)} \\ &\quad + \sqrt{(x+c)^2 + (1-e^2)(a^2-x^2)} \\ &= \sqrt{(a-ex)^2} + \sqrt{(a+ex)^2} = |a-ex| + |a+ex|. \end{aligned}$$

Para ver que isto resulta em $2a$, verificaremos que $|a-ex| = a - ex$ e $|a+ex| = a+ex$. De fato,

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Portanto, $a - ex \geq a(1+e) > 0$ e $a + ex \geq a(1-e) > 0$. $\square$

Note que, neste caso, os vértice são os pontos $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

Hipérboles

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$.

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Hipérboles

Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$)

Hipérboles

Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(f_1, f_2, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |d(p, f_1) - d(p, f_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(f_1, f_2)$. Observe que

1. $E(f_1, f_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(f_1, f_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(f_1, f_2, e) = R(f_1, \overrightarrow{f_1 f_2}) \setminus (f_1, f_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.

Hipérboles

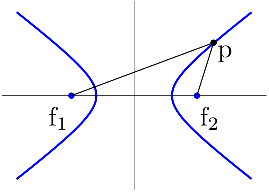
Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(f_1, f_2, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |d(p, f_1) - d(p, f_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(f_1, f_2)$. Observe que

1. $E(f_1, f_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(f_1, f_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(f_1, f_2, e) = R(f_1, \overrightarrow{f_1 f_2}) \setminus (f_1, f_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



Hipérboles

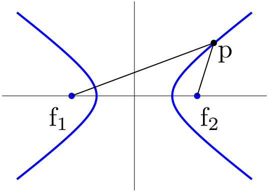
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

Hipérboles

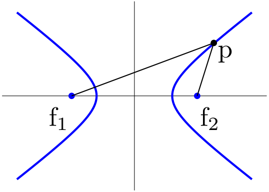
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

Hipérboles

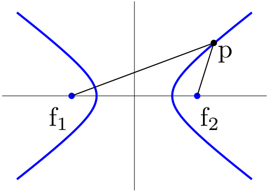
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ é chamado de centro.

Hipérboles

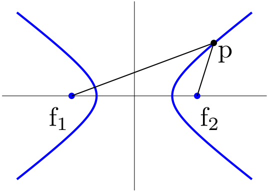
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

Hipérboles

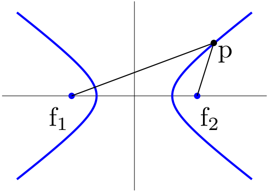
Dados dois pontos $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : |d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_1) - d(\mathrm{p}, \mathrm{f}_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$. Observe que

1. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e) = R(\mathrm{f}_1, \overrightarrow{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}) \setminus (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

A reta perpendicular pelo centro é o eixo secundário.

Hipérboles

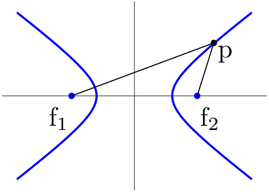
Dados dois pontos $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, considere o conjunto

$$H(f_1, f_2, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |d(p, f_1) - d(p, f_2)| = 2a\}$$

com $a = \dfrac{c}{e}$ e $c = \frac{1}{2}\, d(f_1, f_2)$. Observe que

1. $E(f_1, f_2, e) = \mathbb{R}^2$ se $c = 0$,
2. $E(f_1, f_2, e) = \emptyset$ se $a > c$ (isto é, se $c > 0$ e $e < 1$),
3. $E(f_1, f_2, e) = R(f_1, \overrightarrow{f_1 f_2}) \setminus (f_1, f_2)$ se $a = c \neq 0$ (isto é, $e = 1$).

Se $a < c$ ($c \neq 0$ e $e > 1$), ele é chamado de a hipérbole com focos f_1 e f_2 e excentricidade e.



O número $2c$ é chamado de distância focal.

O número $2a$ é chamado de diâmetro.

O ponto médio de $\overline{f_1 f_2}$ é chamado de centro.

A reta por f_1 e f_2 é chamada de eixo principal.

A reta perpendicular pelo centro é o eixo secundário.

Os ponto na interseção com o eixo principal são chamados de vértices.

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $f_1 = (c, 0)$ e $f_2 = (-c, 0)$

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $f_1 = (c, 0)$ e $f_2 = (-c, 0)$, $H(f_1, f_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações
$$y = \pm \frac{b}{a}\, x$$

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações

$$y = \pm\,\frac{b}{a}\,x \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{a}{e}$$

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

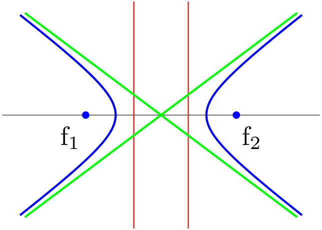
Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações

$$y = \pm\,\frac{b}{a}\,x \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{a}{e}$$

são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.

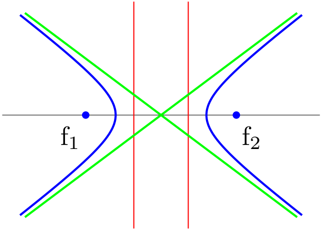
Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações
$$y = \pm\,\frac{b}{a}\,x \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{a}{e}$$
são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.



Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

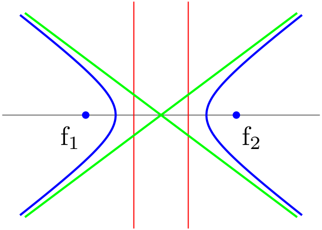
Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações
$$y = \pm\,\frac{b}{a}\,x \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{a}{e}$$
são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.



Se R é uma das duas assíntotas

Se $f_1 = (c, 0)$ e $f_2 = (-c, 0)$, $H(f_1, f_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações
$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{a}{e}$$
são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.



Se R é uma das duas assíntotas, temos
$$R \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad d(R, H) = 0.$$

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

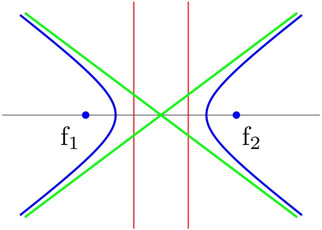
Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações

$$y = \pm\, \frac{b}{a}\, x \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{a}{e}$$

são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.



Se R é uma das duas assíntotas, temos

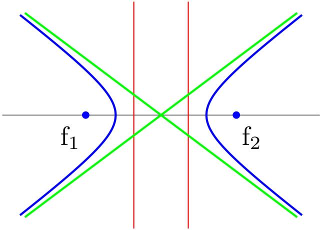
$$R \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad d(R, H) = 0.$$

Se R é uma das diretrizes e f é o foco mais próximo

Hipérboles – Equação Padrão, Assíntotas e Diretrizes

Se $\mathrm{f}_1 = (c, 0)$ e $\mathrm{f}_2 = (-c, 0)$, $H(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, e)$ é o conjunto solução da equação:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Para uma hipérbole H como acima, as retas determinadas pelas equações
$$y = \pm\, \frac{b}{a}\, x \quad \text{e} \quad x = \pm \frac{a}{e}$$
são chamadas de assíntotas e diretrizes, respectivamente.



Se R é uma das duas assíntotas, temos
$$R \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad d(R, H) = 0.$$

Se R é uma das diretrizes e f é o foco mais próximo, temos
$$H = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\; d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a. Se $e > 1$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a) Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a. Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2 - 1}$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a. Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2-1}$.
b. Se $e < 1$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

- a) Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2-1}$.
- b) Se $e < 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a elipse $E(\mathrm{f}, \mathrm{f}', e)$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a) Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2 - 1}$.

b) Se $e < 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a elipse $E(\mathrm{f}, \mathrm{f}', e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}\,\mathrm{f}'} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{1 - e^2}$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

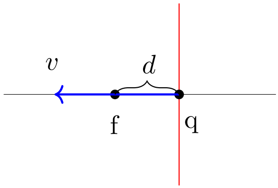
Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

a) Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2 - 1}$.

b) Se $e < 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a elipse $E(\mathrm{f}, \mathrm{f}', e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}\,\mathrm{f}'} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{1 - e^2}$.



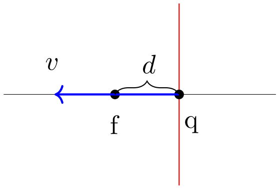
Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz

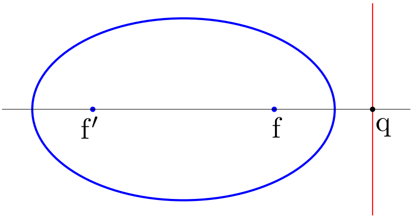
Dados uma reta R, um ponto $\mathrm{f} \notin R$ e $e \in \mathbb{R}_{>0}$, defina

$$C(\mathrm{f}, R, e) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = e\ d(\mathrm{p}, R)\}.$$

Sejam $d = d(\mathrm{f}, R)$, q a projeção ortogonal de f em R e $v = \frac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}}$.

- a) Se $e > 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a hipérbole $H(\mathrm{f}', \mathrm{f}, e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}'\mathrm{f}} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{e^2 - 1}$.
- b) Se $e < 1$, $C(\mathrm{f}, R, e)$ é a elipse $E(\mathrm{f}, \mathrm{f}', e)$ sendo f' o único ponto tal que $\overrightarrow{\mathrm{f}\,\mathrm{f}'} = 2cv$ com $c = \frac{e^2 d}{1 - e^2}$.





Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x+1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2, 3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2, 1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1).

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|}$$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2$$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x+1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja f $= (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v.

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x+1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1)

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\, \overrightarrow{\mathrm{qf}}$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\, \overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w.$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\,\overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w$. Segue que deve ser $+$ para $e = 1/2$ e $-$ para $e = 2$.

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\,\overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w$. Segue que deve ser $+$ para $e = 1/2$ e $-$ para $e = 2$. Assim,

$$\mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} - 32}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} - 16}{\sqrt{5}} \right)$$

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\, \overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w$. Segue que deve ser $+$ para $e = 1/2$ e $-$ para $e = 2$. Assim,

$$\mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} - 32}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} - 16}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{e} \quad \mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} + 8}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} + 4}{\sqrt{5}} \right).$$

Seja f $= (2,3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2,1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2,3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos q $= (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\, \overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w$. Segue que deve ser $+$ para $e = 1/2$ e $-$ para $e = 2$. Assim,

$$\mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} - 32}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} - 16}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{e} \quad \mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} + 8}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} + 4}{\sqrt{5}} \right).$$

Exercício: Encontre os vértices

Hipérboles e Elipses via Foco e Diretriz (Exemplo)

Seja $\mathrm{f} = (2, 3)$ e R dada por $y = -2x + 1$. Encontremos o outro foco da elipse $C(\mathrm{f}, R, 1/2)$ e da hipérbole $C(\mathrm{f}, R, 2)$. Como $w = (2, 1) \perp R$, a reta focal é $S = R(\mathrm{f}, w)$. Pode-se calcular que $d = d(\mathrm{f}, R) = 6/\sqrt{5}$ (Exemplo 3.6.1). Portanto,

$$c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = 2 \quad \text{e} \quad c = \frac{e^2 d}{|1 - e^2|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{se} \quad e = \frac{1}{2}.$$

O outro foco então é dado por $\overrightarrow{0\mathrm{f}'} = (2, 3) \pm \dfrac{2c}{\sqrt{5}}\, w$ e precisamos descobrir qual a escolha correta de sinal. Para isso, encontremos o ponto q e o vetor v. Temos $\mathrm{q} = (-2/5\ ,\ 9/5)$ (Exemplo 3.6.1) e, portanto, $v = \dfrac{1}{d}\ \overrightarrow{\mathrm{qf}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, w$. Segue que deve ser $+$ para $e = 1/2$ e $-$ para $e = 2$. Assim,

$$\mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} - 32}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} - 16}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{f}' = \left(\frac{2\sqrt{5} + 8}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5} + 4}{\sqrt{5}}\right).$$

Exercício: Encontre os vértices e as assíntotas.

Parábolas

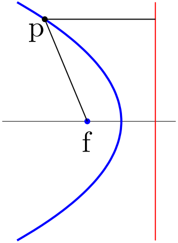
O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$

Parábolas

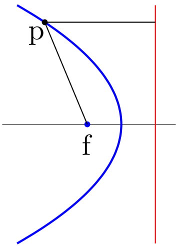
O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.

Parábolas

O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.

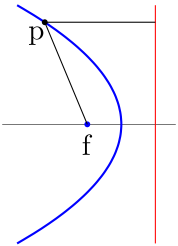


O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.

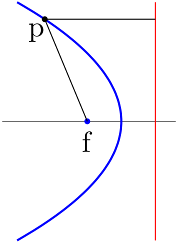
O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.

O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



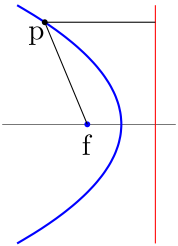
A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.

O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

Se $\mathrm{f} = (0, a)$ e $R = R(\mathrm{f}', e_1)$ com $\mathrm{f}' = (0, -a)$, $a > 0$

Parábolas

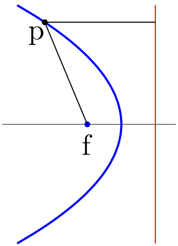
O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.
O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

Se $\mathrm{f} = (0, a)$ e $R = R(\mathrm{f}', e_1)$ com $\mathrm{f}' = (0, -a)$, $a > 0$, então $P(R, \mathrm{f})$ é o conjunto solução da equação $y = \dfrac{1}{4a}\, x^2$.

O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.

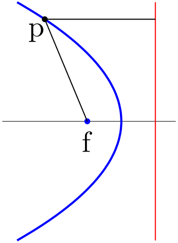


A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.
O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

Se $\mathrm{f} = (0, a)$ e $R = R(\mathrm{f}', e_1)$ com $\mathrm{f}' = (0, -a)$, $a > 0$, então $P(R, \mathrm{f})$ é o conjunto solução da equação $y = \dfrac{1}{4a}\, x^2$.

Dem.: Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, temos $d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$

O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



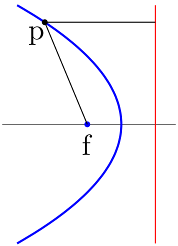
A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola.

O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

Se $\mathrm{f} = (0, a)$ e $R = R(\mathrm{f}', e_1)$ com $\mathrm{f}' = (0, -a)$, $a > 0$, então $P(R, \mathrm{f})$ é o conjunto solução da equação $y = \dfrac{1}{4a}\, x^2$.

Dem.: Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, temos $d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ e $d(\mathrm{p}, R) = |y + a|$.

O conjunto $P(\mathrm{f}, R) := C(\mathrm{f}, R, 1) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = d(\mathrm{p}, R)\}$ é chamado de a parábola com foco f e diretriz R.



A reta S por f ortogonal a R é dito o eixo da parábola. O ponto comum a S e à parábola é chamado de vértice.

Se $\mathrm{f} = (0, a)$ e $R = R(\mathrm{f}', e_1)$ com $\mathrm{f}' = (0, -a)$, $a > 0$, então $P(R, \mathrm{f})$ é o conjunto solução da equação $y = \dfrac{1}{4a}\, x^2$.

Dem.: Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, temos $d(\mathrm{p}, \mathrm{f}) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ e $d(\mathrm{p}, R) = |y + a|$. Portanto, $\mathrm{p} \in P(R, \mathrm{f})$ se, e somente se, $x^2 + (y-a)^2 = (y+a)^2$. $\square$