Geometria Analítica
Retas e Planos - Distâncias, Ângulos e Posições Relativas

Adriano Moura

Unicamp

2021

Ângulo entre Retas

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição?

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Como $w = (2, 3, -1)$ é vetor diretor para R_2

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Como $w = (2, 3, -1)$ é vetor diretor para R_2, temos

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v, w)| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \; \|w\|}$$

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Como $w = (2, 3, -1)$ é vetor diretor para R_2, temos

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v, w)| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \ \|w\|} = \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 14}}.$$

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Como $w = (2, 3, -1)$ é vetor diretor para R_2, temos

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v, w)| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \ \|w\|} = \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 14}}.$$

Note que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Ângulo entre Retas

Dadas duas retas R_1 e R_2 com vetores diretores v_1 e v_2, define-se

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v_1, v_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Calculemos o "ângulo" entre as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$: $R_1 = R(0, v)$ com $v = (1, 0, -2)$ e R_2 dada pela equação simétrica

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -(z+1).$$

Como $w = (2, 3, -1)$ é vetor diretor para R_2, temos

$$\varphi(R_1, R_2) = |\varphi(v, w)| = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 14}}.$$

Note que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.
Logo, elas são reversas (não são paralelas, nem concorrentes).

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição?

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \; \|u_2\|}$$

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \; \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}}$$

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2\rangle|}{\|u_1\| \; \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.

Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \; \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Obs.: Pode-se verificar o seguinte no caso de planos não paralelos.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Obs.: Pode-se verificar o seguinte no caso de planos não paralelos. Se v é vetor diretor da reta interseção

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se
$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$
Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,
$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2\rangle|}{\|u_1\|\ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Obs.: Pode-se verificar o seguinte no caso de planos não paralelos. Se v é vetor diretor da reta interseção, $\exists\ w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2\rangle|}{\|u_1\| \ \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Obs.: Pode-se verificar o seguinte no caso de planos não paralelos. Se v é vetor diretor da reta interseção, $\exists\ w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $v \perp w_j$ e $\{v, w_j\}$ é conjunto diretor para $P_j, j = 1, 2$.

Ângulo entre Planos no $\mathbb{R}^3$

Dados dois planos $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sejam u_1 e u_2 vetores normais a P_1 e P_2, define-se

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)|.$$

Por que esta definição? Desenhemos...

Sejam P_1 dado por $x + 2y - z = 4$ e P_2 por $2x - y + 5z = 19$. Podemos usar $u_1 = (1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 5)$. Assim,

$$\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(u_1, u_2)| = \frac{|\langle u_1, u_2 \rangle|}{\|u_1\| \; \|u_2\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Dois planos são ditos paralelos se $\varphi(P_1, P_2) = 1$.
Dois planos não paralelos são ditos concorrentes se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{R}^3$, quaisquer dois planos não paralelos se intersectam numa reta.

Obs.: Pode-se verificar o seguinte no caso de planos não paralelos. Se v é vetor diretor da reta interseção, $\exists\, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $v \perp w_j$ e $\{v, w_j\}$ é conjunto diretor para $P_j, j = 1, 2$. Além disso, $\varphi(P_1, P_2) = |\varphi(w_1, w_2)|$.

Fatos Importantes

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

- (a) Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
- (b) Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
- (c) A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
- (d) Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.
- (e) A interseção de dois planos distintos ou é vazia, ou é um ponto, ou é uma reta.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

- (a) Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
- (b) Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
- (c) A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
- (d) Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.
- (e) A interseção de dois planos distintos ou é vazia, ou é um ponto, ou é uma reta.

Um conjunto de pontos é dito colinear se existe reta contendo todos eles.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.
e. A interseção de dois planos distintos ou é vazia, ou é um ponto, ou é uma reta.

Um conjunto de pontos é dito colinear se existe reta contendo todos eles.

Um conjunto de pontos é dito coplanar se existe plano contendo todos eles.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.
e. A interseção de dois planos distintos ou é vazia, ou é um ponto, ou é uma reta.

Um conjunto de pontos é dito colinear se existe reta contendo todos eles.

Um conjunto de pontos é dito coplanar se existe plano contendo todos eles. A parte (d) diz que 3 pontos não colineares determinam um único plano.

Fatos Importantes

(a hipótese $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é irrelevante e $n \geq 3$)

a. Todo plano contém a reta determinada por quaisquer dois de seus pontos.
b. Se R é uma reta contida num plano P e $\mathrm{x} \in P$, existe reta $R' \subseteq P$ que é paralela a R e contem x.
c. A interseção de dois planos paralelos distintos é vazia.
d. Se $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ pertencem a um plano P e $\overrightarrow{\mathrm{xy}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{xz}}$ são vetores não nulos com direções distintas, então $P(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}}, \overrightarrow{\mathrm{xz}}) = P$.
e. A interseção de dois planos distintos ou é vazia, ou é um ponto, ou é uma reta.

Um conjunto de pontos é dito colinear se existe reta contendo todos eles.

Um conjunto de pontos é dito coplanar se existe plano contendo todos eles. A parte (d) diz que 3 pontos não colineares determinam um único plano. O mesmo pode ser dito sobre uma reta e um ponto fora dela.

Ângulo entre Reta e Plano

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R, P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R, P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R, P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2}$$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\text{sen}(\theta)|.$$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\mathrm{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R, P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R, P) = \sqrt{1 - \varphi(u, v)^2} = |\text{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\text{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1, \ y = 2$.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\text{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1,\ y = 2$. O vetor $v = (1, 0, -2)$ é um vetor diretor para R

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R, P) = \max\{\varphi(R, R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R, P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R, P) = \sqrt{1 - \varphi(u, v)^2} = |\mathrm{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1,\ y = 2$. O vetor $v = (1, 0, -2)$ é um vetor diretor para R e $u = (1, 2, -1)$ é normal a P.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\text{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1,\ y = 2$. O vetor $v = (1, 0, -2)$ é um vetor diretor para R e $u = (1, 2, -1)$ é normal a P.
Assim, $\varphi(u,v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6 \cdot 5}}$

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\mathrm{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1,\ y = 2$. O vetor $v = (1,0,-2)$ é um vetor diretor para R e $u = (1,2,-1)$ é normal a P.
Assim, $\varphi(u,v) = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6\cdot 5}}$ e $\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \frac{3}{10}} = \sqrt{7/10}$.

Ângulo entre Reta e Plano

Sejam R uma reta e P um plano em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Define-se

$$\varphi(R,P) = \max\{\varphi(R,R') : R' \subseteq P \text{ é uma reta}\}.$$

Se $\varphi(R,P) = 1$, diz-se que R e P são paralelos.
Se $R \cap P \neq \emptyset$ e não são paralelos, diz-se que R e P são concorrentes.

Se $n = 3$, v é vetor diretor para R e u é vetor normal para P, vale:

$$\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \varphi(u,v)^2} = |\mathrm{sen}(\theta)|.$$

Desenhemos...

Consideremos $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por $x + 2y - z = 4$ e a reta R dada por $2x + z = -1,\ y = 2$. O vetor $v = (1,0,-2)$ é um vetor diretor para R e $u = (1,2,-1)$ é normal a P.
Assim, $\varphi(u,v) = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6\cdot 5}}$ e $\varphi(R,P) = \sqrt{1 - \frac{3}{10}} = \sqrt{7/10}$.

Exercício: Verifique que, se $n = 3$ e R e P não são paralelos, então são concorrentes.

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\|$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\|$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \; + \; \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\|$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = d(\mathrm{y},\mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x},\mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x},\mathrm{y}) + d(\mathrm{y},\mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x},\mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}+\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x},\mathrm{y}) + d(\mathrm{y},\mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$D = \{d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = d(\mathrm{y},\mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x},\mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x},\mathrm{y}) + d(\mathrm{y},\mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x},\mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x},\mathrm{y}) + d(\mathrm{y},\mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$D = \{d(\mathrm{x},\mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Define-se $d(S_1, S_2) = \inf D$.

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \; + \; \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$D = \{d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Define-se $d(S_1, S_2) = \inf D$.

Estudaremos os casos que S_1 e S_2 são retas, planos, ou um único ponto.

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$D = \{d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Define-se $d(S_1, S_2) = \inf D$.

Estudaremos os casos que S_1 e S_2 são retas, planos, ou um único ponto.
Nestes casos, existem $\mathrm{x} \in S_1$ e $\mathrm{y} \in S_2$ tais que $d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

Distância

Dados dois pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x e y é definida por

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em particular, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) > 0$ se $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ e $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
Além disso, temos a seguinte consequência da Desigualdade Triangular:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n.$$

De fato,

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\overrightarrow{\mathrm{xz}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{xy}} + \overrightarrow{\mathrm{yz}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathrm{xy}}\| \ + \ \|\overrightarrow{\mathrm{yz}}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}).$$

Dados dois subconjuntos não vazios S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$D = \{d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Define-se $d(S_1, S_2) = \inf D$.

Estudaremos os casos que S_1 e S_2 são retas, planos, ou um único ponto.
Nestes casos, existem $\mathrm{x} \in S_1$ e $\mathrm{y} \in S_2$ tais que $d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.
Ou seja, $d(S_1, S_2) = \min\{d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{x} \in S_1, \mathrm{y} \in S_2\}$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Suponha então que $v \perp w$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Suponha então que $v \perp w$. A projeção ortogonal de um vetor u em P

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Suponha então que $v \perp w$. A projeção ortogonal de um vetor u em P é definida por

$$\mathrm{Pr}_P(u) = \mathrm{Pr}_v(u) + \mathrm{Pr}_w(u).$$

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Suponha então que $v \perp w$. A projeção ortogonal de um vetor u em P é definida por

$$\mathrm{Pr}_P(u) = \mathrm{Pr}_v(u) + \mathrm{Pr}_w(u).$$

Observe que $u - \mathrm{Pr}_P(u) \perp \lambda v + \mu w \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Projeções Ortogonais

Lembre que, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $w \neq 0$, a projeção ortogonal de v na direção de w é $\mathrm{Pr}_w(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w$.

Como $\mathrm{Pr}_w(v)$ só depende da direção de w, se R for uma reta tendo w como vetor diretor, definimos $\mathrm{Pr}_R(v) = \mathrm{Pr}_w(v)$.

Lembre também que, se $v' := v - \mathrm{Pr}_w(v)$, temos $v' \perp w$. Assim, se $\{v, w\}$ é conjunto diretor para um plano P, o conjunto $\{v', w\}$ também é.

Logo, sempre podemos escolher trabalhar com conjunto diretor formado por vetores perpendiculares.

Suponha então que $v \perp w$. A projeção ortogonal de um vetor u em P é definida por

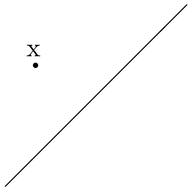
$$\mathrm{Pr}_P(u) = \mathrm{Pr}_v(u) + \mathrm{Pr}_w(u).$$

Observe que $u - \mathrm{Pr}_P(u) \perp \lambda v + \mu w \;\forall\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. O vetor $\mathrm{Pr}_P(u)$ é a única combinação linear de v e w que tem essa propriedade.

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

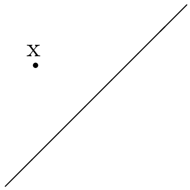
Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.



Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

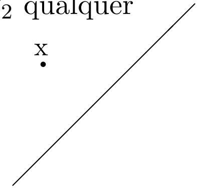
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$.



Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

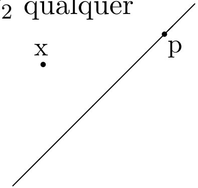
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer



Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

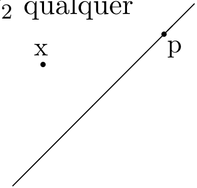
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer



Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



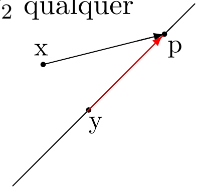
$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

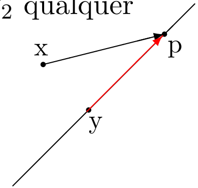


Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

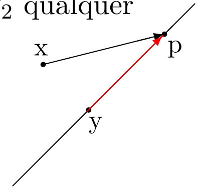
chamado de a projeção ortogonal de x em S_2.



Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

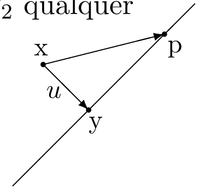
chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

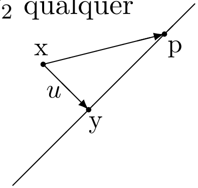
chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

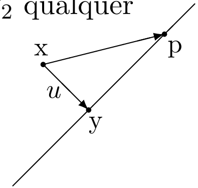
chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2.

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

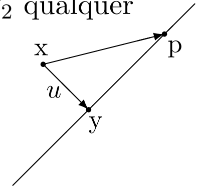
$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

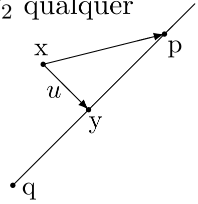
$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

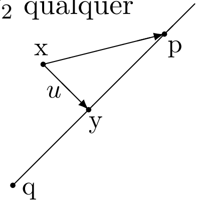
Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

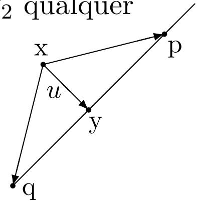
$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}}$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

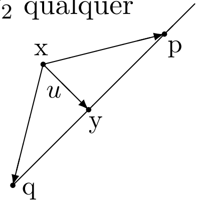
Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}}$$

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

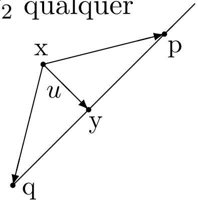
$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

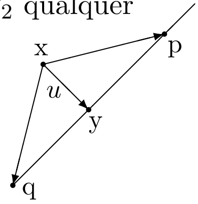
$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

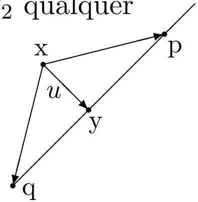
Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

Portanto, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|u\| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{q})$

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

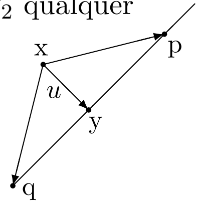
Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

Portanto, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|u\| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{q})$ e $(*)$ fica demonstrada.

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

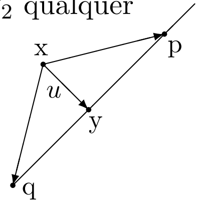
Portanto, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|u\| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{q})$ e $(*)$ fica demonstrada.

Observe que, se R é a reta determinada por x e y

Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.

Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação



$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$

Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

Portanto, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|u\| \le d(\mathrm{x}, \mathrm{q})$ e $(*)$ fica demonstrada.

Observe que, se R é a reta determinada por x e y, $u = \mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$.

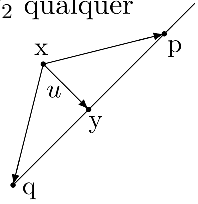
Distância Entre Ponto e Reta ou Plano

Suponha que $S_1 = \{\mathrm{x}\}$ e S_2 é uma reta ou um plano.
Se $\mathrm{x} \in S_2$, então $d(\mathrm{x}, S_2) = 0$. Caso contrário, fixe $\mathrm{p} \in S_2$ qualquer e considere o ponto $\mathrm{y} \in S_2$ determinado pela equação

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}),$$

chamado de a projeção ortogonal de x em S_2. Seja

$$u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \overrightarrow{\mathrm{xy}}.$$



Então $u \perp v$ para todo vetor diretor v de S_2. Mostremos que

$$(*) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|.$$

De fato, se q é qualquer ponto de S_2, temos

$$\overrightarrow{\mathrm{xq}} = u + \overrightarrow{\mathrm{yq}} \quad \text{e} \quad u \perp \overrightarrow{\mathrm{yq}}.$$

Assim, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|\overrightarrow{\mathrm{xq}}\|^2 = \|u\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{yq}}\|^2.$$

Portanto, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|u\| \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{q})$ e $(*)$ fica demonstrada.

Observe que, se R é a reta determinada por x e y, $u = \mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$.

Logo, basta descobrir a direção de R.

Suponha que $n = 2$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$.

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S.

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\ w$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\|$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S)$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w\rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Rightarrow R \cap S = \{(-2/5, 9/5)\} = \{\mathrm{y}\}$.

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Rightarrow R \cap S = \{(-2/5, 9/5)\} = \{\mathrm{y}\}$.

Argumento semelhante mostra que, se $n = 3$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Rightarrow R \cap S = \{(-2/5, 9/5)\} = \{\mathrm{y}\}$.

Argumento semelhante mostra que, se $n = 3$, $\mathrm{x} = (x_0, y_0, z_0)$

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w \rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Rightarrow R \cap S = \{(-2/5, 9/5)\} = \{\mathrm{y}\}$.

Argumento semelhante mostra que, se $n = 3$, $\mathrm{x} = (x_0, y_0, z_0)$ e P é o plano dado pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

Distância Entre Ponto e Reta no Plano

Suponha que $n = 2$, S é dada pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ e $\mathrm{x} = (x_0, y_0)$. Em particular, $\mathrm{p} = (x_1, y_1) \in S$ e o vetor $w = (a, b)$ é perpendicular à direção de S. Portanto,

$$\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, w\rangle}{\|w\|^2}\, w = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{a^2 + b^2}\, w.$$

Logo,

$$d(\mathrm{x}, S) = \|\mathrm{Pr}_R(\overrightarrow{\mathrm{xp}})\| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Consideremos $\mathrm{x} = (2, 3)$ e a reta S dada por $2x + y = 1$:

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{|2(0 - 2) + (1 - 3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

R é dada por $(x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Rightarrow R \cap S = \{(-2/5, 9/5)\} = \{\mathrm{y}\}$.

Argumento semelhante mostra que, se $n = 3$, $\mathrm{x} = (x_0, y_0, z_0)$ e P é o plano dado pela equação $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$, então

$$d(\mathrm{x}, P) = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}}$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1,0,1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2,1,0)$ e $\mathrm{p} = (1,-2,2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0,-2,1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0,-2,1) \times (2,1,0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1,2,4)\|}{\sqrt{5}}$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v \rangle}{\|v\|^2}\ v$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v \rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v$$

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1,0,1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2,1,0)$ e $\mathrm{p} = (1,-2,2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0,-2,1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0,-2,1) \times (2,1,0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1,2,4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\,(4,-8,5).$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\, (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\|$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1,0,1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2,1,0)$ e $\mathrm{p} = (1,-2,2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0,-2,1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0,-2,1) \times (2,1,0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1,2,4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\, (4,-8,5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v \rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\, (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v \rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v = \frac{1}{5}\ (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v = \frac{1}{5}\ (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v = \frac{1}{5}\ (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\, (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\,(4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$. Ou seja, queremos resolver a equação $\langle u(t), v\rangle = 0$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v = \frac{1}{5}\ (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$. Ou seja, queremos resolver a equação $\langle u(t), v\rangle = 0$, isto é, $4t + (-2 + t) = 0$.

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\ v = \frac{-2}{5}\ v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\ v = \frac{1}{5}\ (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$. Ou seja, queremos resolver a equação $\langle u(t), v\rangle = 0$, isto é, $4t + (-2 + t) = 0$. Logo, $t = 2/5$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\,(4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$. Ou seja, queremos resolver a equação $\langle u(t), v\rangle = 0$, isto é, $4t + (-2 + t) = 0$. Logo, $t = 2/5$ e $u = u(2/5)$

Distância Entre Ponto e Reta no Espaço

Para $n = 3$ e $S = R(\mathrm{p}, v)$, é possível mostrar que $d(\mathrm{x}, S) = \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{xp}} \times v\|}{\|v\|}$.

Se $\mathrm{x} = (1, 0, 1)$ e S é dada por $x - 2y = 5,\ z = 2$, então $S = R(\mathrm{p}, v)$ com $v = (2, 1, 0)$ e $\mathrm{p} = (1, -2, 2)$. Assim, $\overrightarrow{\mathrm{xp}} = (0, -2, 1)$ e

$$d(\mathrm{x}, S) = \frac{\|(0, -2, 1) \times (2, 1, 0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\|(-1, 2, 4)\|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}.$$

Vamos resolver usando $(*)$ diretamente também. Temos

$$\mathrm{Pr}_S(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) = \frac{\langle \overrightarrow{\mathrm{xp}}, v\rangle}{\|v\|^2}\, v = \frac{-2}{5}\, v \quad \Rightarrow \quad u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} + \frac{2}{5}\, v = \frac{1}{5}\, (4, -8, 5).$$

Logo, $d(\mathrm{x}, S) = \|u\| = \sqrt{21/5}$. Além disso, $\mathrm{y} = (9/5\ ,\ -8/5\ ,\ 2)$.

Encontremos u utilizando equações paramétricas para S:

$$S = \{\mathrm{p}(t) = (1 + 2t\ ,\ -2 + t\ ,\ 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere $u(t) = \overrightarrow{\mathrm{xp}(t)} = (2t, -2 + t, 1)$. Precisamos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u(t) \perp v$. Ou seja, queremos resolver a equação $\langle u(t), v\rangle = 0$, isto é, $4t + (-2 + t) = 0$. Logo, $t = 2/5$ e $u = u(2/5) = \frac{1}{5}(4, -8, 5)$.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano).

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1, \tag{1}$$

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1, \tag{1}$$

e, portanto,

$$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \quad \forall \quad \mathrm{x} \in S_1, \tag{2}$$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1, \tag{1}$$

e, portanto,

$$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \quad \forall \quad \mathrm{x} \in S_1, \tag{2}$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$.

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1, \tag{1}$$

e, portanto,

$$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x} \in S_1, \tag{2}$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \; y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

$$(2) \qquad d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3,\; y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$. Note que $\mathrm{x} = (0, 1, 3) \in S$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$. Note que $\mathrm{x} = (0, 1, 3) \in S$, $\mathrm{p} = (4, 0, 0) \in P$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

$$(2) \qquad d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$. Note que $\mathrm{x} = (0, 1, 3) \in S$, $\mathrm{p} = (4, 0, 0) \in P$ e $w = (1, 2, -1)$ é normal a P.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$. Note que $\mathrm{x} = (0, 1, 3) \in S$, $\mathrm{p} = (4, 0, 0) \in P$ e $w = (1, 2, -1)$ é normal a P. Logo,

$$d(S, P) = \frac{|(4-0) + 2(0-1) - (0-3)|}{\|w\|}$$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Consideremos agora o caso em que S_1 e S_2 são retas ou planos paralelos (incluindo a situação de uma reta e um plano). Suponha que, se um dos dois conjuntos for uma reta, então S_1 é uma reta. Mostraremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

e, portanto,

(2) $$d(S_1, S_2) = d(\mathrm{x}, S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x} \in S_1,$$

o que nos permite calcular distâncias nestas situações como antes.

Sejam S dada por $x - z = -3, \ y = 1$, e P dado por $x + 2y - z = 4$. Os vetores $v_1 = (-2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ formam conjunto diretor para P. Como v_2 também é vetor diretor para S, vemos que $S \parallel P$. Note que $\mathrm{x} = (0, 1, 3) \in S$, $\mathrm{p} = (4, 0, 0) \in P$ e $w = (1, 2, -1)$ é normal a P. Logo,

$$d(S, P) = \frac{|(4-0) + 2(0-1) - (0-3)|}{\|w\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Mostremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \quad \forall \quad \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$.

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Mostremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$u - u' = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Mostremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Mostremos que

$$(1)\qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \mathrm{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2.

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u'

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \;\; \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \mathrm{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u' e, então,

$$\|u - u'\| = \langle u - u' \; , \; \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \; \rangle$$

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u' e, então,

$$\|u - u'\| = \langle u - u' \ , \ \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \ \rangle = 0.$$

Mostremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \mathrm{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u' e, então,

$$\|u - u'\| = \langle u - u' \ , \ \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \ \rangle = 0.$$

Logo $u = u'$

Mostremos que

$$(1) \qquad d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \quad \forall \;\; \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \mathrm{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u' e, então,

$$\|u - u'\| = \langle u - u' \; , \; \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \; \rangle = 0.$$

Logo $u = u'$ e, como $d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|$ e $d(\mathrm{x}', S_2) = \|u'\|$ por $(*)$

Distância Entre Retas e/ou Planos Paralelos no Espaço

Mostremos que

(1) $$d(\mathrm{x}, S_2) = d(\mathrm{x}', S_2) \ \ \forall \ \ \mathrm{x}, \mathrm{x}' \in S_1,$$

Fixe $p \in S_2$ e considere $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in S_2$ determinados por

$$\overrightarrow{\mathrm{yp}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathrm{y'p}} = \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}).$$

Considere também $u = \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}})$ e $u' = \overrightarrow{\mathrm{x'p}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}})$. Assim,

$$\begin{aligned} u - u' &= \overrightarrow{\mathrm{xp}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) - \overrightarrow{\mathrm{x'p}} + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}). \end{aligned}$$

Como S_1 é paralelo a S_2, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ define direção paralela a S_2. Portanto, $\overrightarrow{\mathrm{xx'}}$ é perpendicular a u e a u' e, então,

$$\|u - u'\| = \langle u - u' \ , \ \overrightarrow{\mathrm{xx'}} - \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{xp}}) + \mathrm{Pr}_{S_2}(\overrightarrow{\mathrm{x'p}}) \ \rangle = 0.$$

Logo $u = u'$ e, como $d(\mathrm{x}, S_2) = \|u\|$ e $d(\mathrm{x}', S_2) = \|u'\|$ por $(*)$, (1) segue.

Distância Entre Retas não Paralelas

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4, 0, 0), \mathrm{x} = (0, 1, 1), v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4, 0, 0), \mathrm{x} = (0, 1, 1), v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4,0,0), \mathrm{x} = (0,1,1), v = (-2,1,0), w = (1,0,1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$ que são planos paralelos contendo S_1 e S_2, respectivamente.

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4, 0, 0), \mathrm{x} = (0, 1, 1), v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$ que são planos paralelos contendo S_1 e S_2, respectivamente. Assim,

$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2)$

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4, 0, 0), \mathrm{x} = (0, 1, 1), v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$ que são planos paralelos contendo S_1 e S_2, respectivamente. Assim,

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2) = d(\mathrm{p}, P_2)$$

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4, 0, 0), \mathrm{x} = (0, 1, 1), v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$ que são planos paralelos contendo S_1 e S_2, respectivamente. Assim,

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2) = d(\mathrm{p}, P_2) = \frac{|(0-4) + 2(1-0) - (1-0)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

Distância Entre Retas não Paralelas

Finalmente, consideremos o caso em que S_1 e S_2 são retas não paralelas.

Exercício: Mostre que existem planos paralelos P_1 e P_2 com $S_j \subseteq P_j$.

Segue que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$. Se S_1 e S_2 forem concorrentes, a distância é zero e $P_1 = P_2$. De qualquer maneira, mesmo que S_1 e S_2 sejam reversas, mostraremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Calculemos a distância entre as retas $S_1 = R(\mathrm{p}, v)$ e $S_2 = R(\mathrm{x}, w)$ com $\mathrm{p} = (4,0,0), \mathrm{x} = (0,1,1), v = (-2,1,0), w = (1,0,1)$. Considere P_1 dado pela equação $x + 2y - z = 4$ e $P_2 = (\mathrm{x}, v, w)$ que são planos paralelos contendo S_1 e S_2, respectivamente. Assim,

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2) = d(\mathrm{p}, P_2) = \frac{|(0-4) + 2(1-0) - (1-0)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Distância Entre Retas não Paralelas

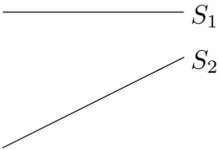
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Distância Entre Retas não Paralelas

Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

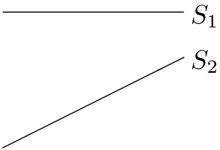


Distância Entre Retas não Paralelas

Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$

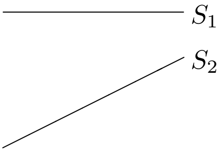


Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$



Distância Entre Retas não Paralelas

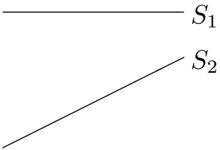
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2.



Distância Entre Retas não Paralelas

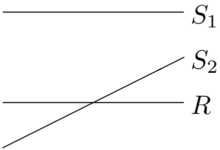
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2.

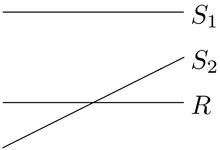


Mostremos que

(3) $$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2).$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que
$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2



Distância Entre Retas não Paralelas

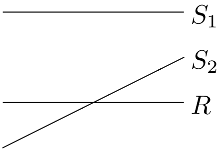
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam).



Distância Entre Retas não Paralelas

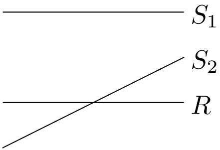
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2.



Distância Entre Retas não Paralelas

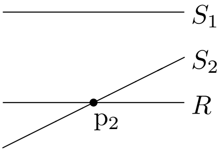
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2.



Distância Entre Retas não Paralelas

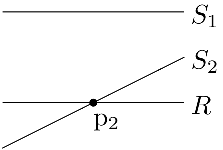
Mostremos que

$$(3) \qquad d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2).$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$.



Distância Entre Retas não Paralelas

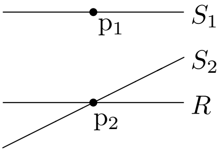
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists\ \mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$.



Distância Entre Retas não Paralelas

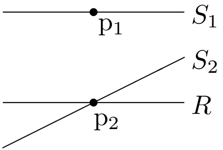
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$. Além disso, $u := \overrightarrow{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ é ortogonal a P_1 e P_2.



Distância Entre Retas não Paralelas

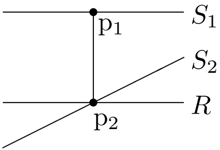
Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$. Além disso, $u := \overrightarrow{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ é ortogonal a P_1 e P_2.



Distância Entre Retas não Paralelas

Mostremos que

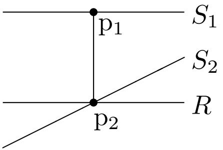
$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$. Além disso, $u := \overrightarrow{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ é ortogonal a P_1 e P_2. Logo,

$$d(P_1, P_2) = \|u\| = d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2).$$



Distância Entre Retas não Paralelas

Mostremos que

$$d(S_1, S_2) = d(P_1, P_2). \tag{3}$$

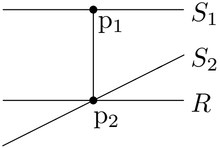
Já que $d(S_1, S_2) \geq d(P_1, P_2)$, basta mostrar que $\exists$ $\mathrm{p}_1 \in S_1, \mathrm{p}_2 \in S_2$ tais que

$$d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) = d(P_1, P_2).$$

Para encontra-los, considere a reta $R \subseteq P_2$ obtida por projeção ortogonal de cada ponto de S_1 em P_2. Segue que R é concorrente a S_2 (pois duas retas não paralelas contidas num plano se intersectam). Seja p_2 o ponto de interseção de R com S_2. Assim, se p_1 é a projeção ortogonal de p_2 em P_1, temos $\mathrm{p}_1 \in S_1$. Além disso, $u := \overrightarrow{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2}$ é ortogonal a P_1 e P_2. Logo,

$$d(P_1, P_2) = \|u\| = d(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2).$$

A reta determinada por p_1 e p_2 é chamada de o eixo de S_1 e S_2.



Posição Relativa Entre Duas Retas

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser:

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$)

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$, $R_2 \subseteq P_2(\mathrm{q}, v, w)$

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$, $R_2 \subseteq P_2(\mathrm{q}, v, w)$ e $\mathrm{q} \notin P_1$

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$, $R_2 \subseteq P_2(\mathrm{q}, v, w)$ e $\mathrm{q} \notin P_1$, mostrando que P_1 e P_2 são planos paralelos distintos.

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$, $R_2 \subseteq P_2(\mathrm{q}, v, w)$ e $\mathrm{q} \notin P_1$, mostrando que P_1 e P_2 são planos paralelos distintos.

Se $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Posição Relativa Entre Duas Retas

As posições relativas entre duas retas R_1 e R_2 podem ser: coincidentes (isto é, $R_1 = R_2$), paralelas não coincidentes, concorrentes ou reversas. Como determinar?

Suponha que $R_1 = (\mathrm{p}, v)$ e $R_2(\mathrm{q}, w)$. Para serem paralelas, por definição, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Neste caso, para serem distintas, devemos ter $\mathrm{q} \notin R_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ tem direção diferente de v.

Se v e w tem direções distintas, as retas podem ser concorrentes ou reversas. Para decidir, basta verificar se $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ é combinação linear de v e w ou não.

De fato, se for, conclui-se que $R_1, R_2 \subseteq P(\mathrm{p}, v, w)$ e, portanto, são concorrentes. Caso contrário, $R_1 \subseteq P_1(\mathrm{p}, v, w)$, $R_2 \subseteq P_2(\mathrm{q}, v, w)$ e $\mathrm{q} \notin P_1$, mostrando que P_1 e P_2 são planos paralelos distintos.

Se $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, estas duas últimas decisões podem ser feitas verificando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v \times w \rangle = 0$ ou não.

Posição Relativa Entre Dois Planos

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser:

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$)

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!!

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!!
Como determinar?

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta (mostre!).

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta (mostre!). Para $n = 4$, podemos ter casos que $P_1 \cap P_2$ contém único ponto.

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta (mostre!). Para $n = 4$, podemos ter casos que $P_1 \cap P_2$ contém único ponto. Para $n > 4$, pode acontecer $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta (mostre!). Para $n = 4$, podemos ter casos que $P_1 \cap P_2$ contém único ponto. Para $n > 4$, pode acontecer $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (planos reversos!).

Posição Relativa Entre Dois Planos

As posições relativas entre dois planos P_1 e P_2 podem ser: coincidentes (isto é, $P_1 = P_2$), paralelos não coincidentes, concorrentes ou reversos!!!! Como determinar?

Suponha que $P_1 = (\mathrm{p}, v_1, v_2)$ e $P_2(\mathrm{q}, w_1, w_2)$. Para serem paralelos, w_j é combinação linear de v_1 e v_2 para $j = 1, 2$. Neste caso, para serem distintos, devemos ter $\mathrm{q} \notin P_1$. Isto é equivalente a dizer que $\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ não é combinação linear de v_1 e v_2. Em $\mathbb{R}^3$, isso pode ser verificado calculando-se $\langle \overrightarrow{\mathrm{pq}}, v_1 \times v_2 \rangle$.

Em $\mathbb{R}^3$, P_1 e P_2 são paralelos se, somente se, $\langle w_j, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ para $j = 1, 2$.

Suponha que P_1 e P_2 não são paralelos. Se $n = 3$, então $P_1 \cap P_2$ é uma reta (mostre!). Para $n = 4$, podemos ter casos que $P_1 \cap P_2$ contém único ponto. Para $n > 4$, pode acontecer $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (planos reversos!).

Exercício: Descreva as possíveis posições relativas entre uma reta e um plano.

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P.

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

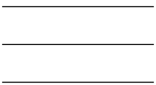
Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são:

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas

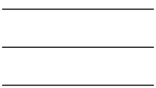
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas



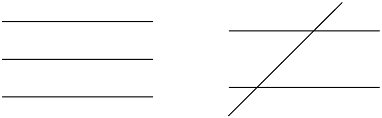
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas



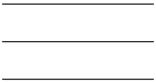
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

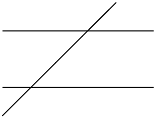
Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas



Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

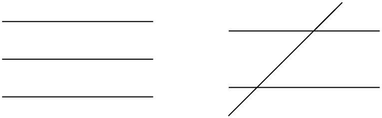
Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas





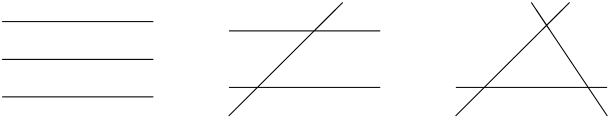
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$)



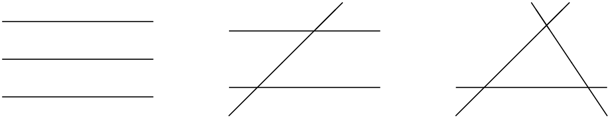
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$)



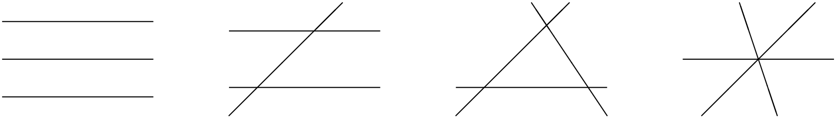
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.



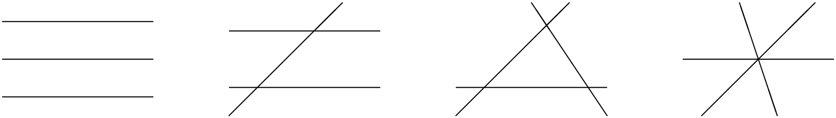
Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.



Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

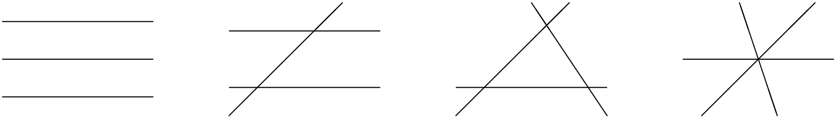
Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.



Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 retas no espaço tridimensional.

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

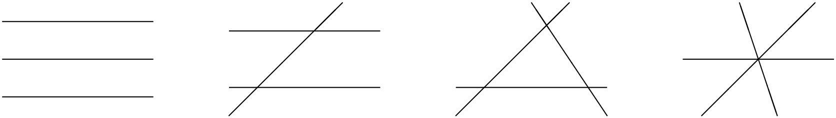
Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.



Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 retas no espaço tridimensional. Existem outras possibilidades se $n > 3$?

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.

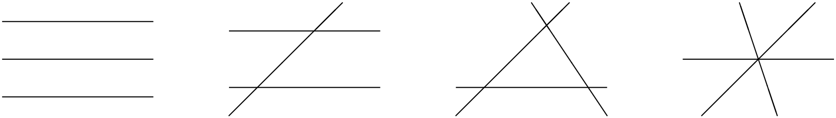


Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 retas no espaço tridimensional. Existem outras possibilidades se $n > 3$?

Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 planos no espaço tridimensional.

Posição Relativa Entre Três Retas Num Plano

Suponha que $R_j, j = 1, 2, 3$, sejam retas distintas contidas num plano P. As possíveis posições relativas entre elas são: paralelas, duas paralelas e uma concorrente às duas paralelas, concorrentes duas a duas (isto é $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$), ou concorrentes em único ponto.



Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 retas no espaço tridimensional. Existem outras possibilidades se $n > 3$?

Exercício: Descreva as possíveis posições relativas de 3 planos no espaço tridimensional. Existem outras possibilidades se $n > 3$?