Geometria Analítica
Retas e Planos

Adriano Moura

Unicamp

2021

Retas

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”.

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção".
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”.
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção".
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p

Retas

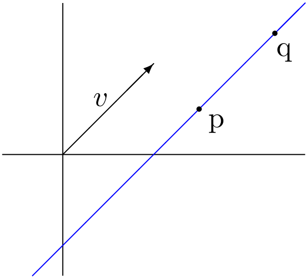
A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção".
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

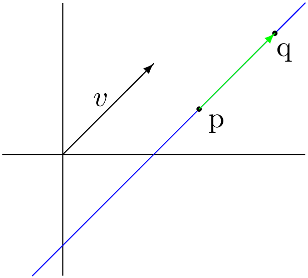
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

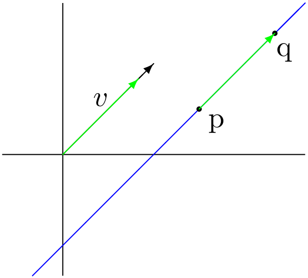
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”.
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

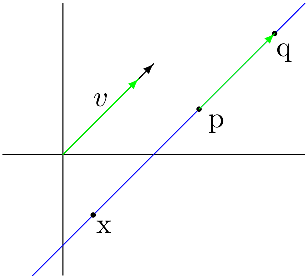
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”.
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

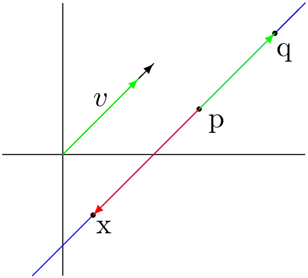
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

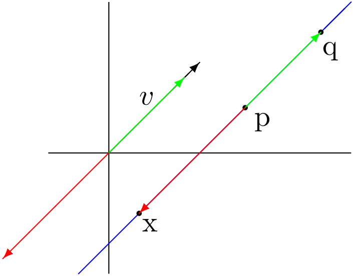
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção".
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

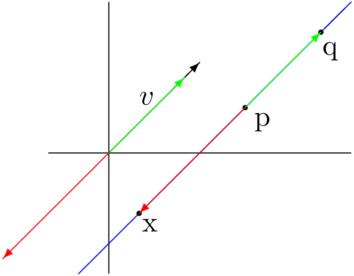
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção".
Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção.
Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

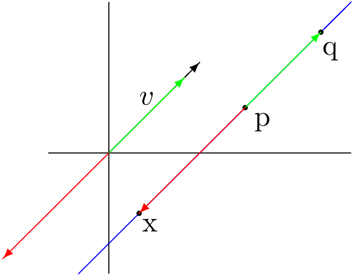
Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Notação: $R(\mathrm{p}, v)$.

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto p $\in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}\}$.

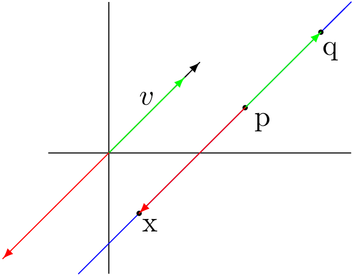


Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.

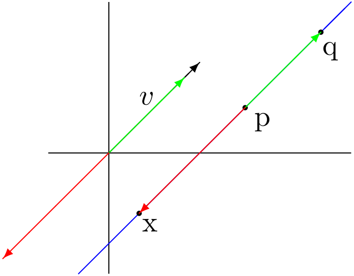


Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta.

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”. Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.

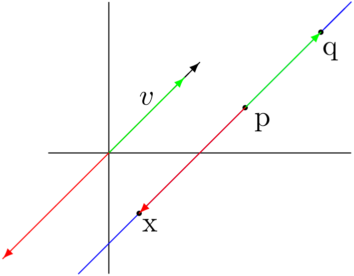


Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta. A mesma reta pode ser descrita utilizando-se outros pontos-base

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.

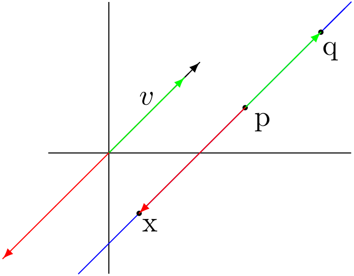


Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta. A mesma reta pode ser descrita utilizando-se outros pontos-base ou outros vetores diretores (na mesma direção de v).

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a "constância de direção". Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



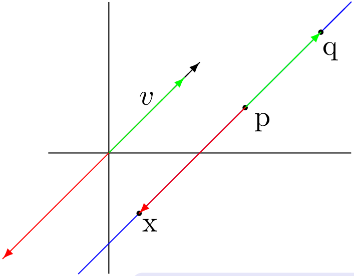
Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta. A mesma reta pode ser descrita utilizando-se outros pontos-base ou outros vetores diretores (na mesma direção de v).

Duas retas são ditas paralelas se seus vetores diretores tiverem a mesma direção.

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”. Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta. A mesma reta pode ser descrita utilizando-se outros pontos-base ou outros vetores diretores (na mesma direção de v).

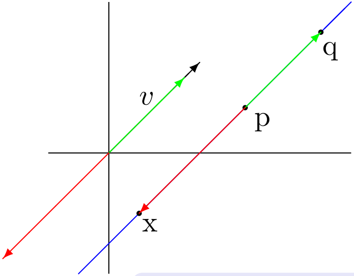
Duas retas são ditas paralelas se seus vetores diretores tiverem a mesma direção.

a. A interseção de duas retas paralelas distintas é vazia.

Retas

A noção intuitiva de reta está associada a “constância de direção”. Vetores foram os objetos usados para definir coincidência de direção. Assim, a seguinte definição para o conceito de reta é natural:

Dados um ponto $\mathrm{p} \in \mathbb{F}^n$ e um vetor $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, a reta na direção de v passando por p é o conjunto $\{\mathrm{q} \in \mathbb{F}^n : \overrightarrow{\mathrm{pq}} = \lambda v \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{F}\}$.



Notação: $R(\mathrm{p}, v)$. Diz-se que v é vetor diretor e p é ponto base desta descrição da reta. A mesma reta pode ser descrita utilizando-se outros pontos-base ou outros vetores diretores (na mesma direção de v).

Duas retas são ditas paralelas se seus vetores diretores tiverem a mesma direção.

- (a) A interseção de duas retas paralelas distintas é vazia.
- (b) A interseção de quaisquer duas retas distintas contém no máximo um ponto.

Equações Paramétricas para Retas

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w) \Leftrightarrow\ \exists$ parâmetros t, s tais que

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases}$$

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w) \Leftrightarrow\ \exists$ parâmetros t, s tais que

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chega-se que $t = -1 = s$.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w) \Leftrightarrow\ \exists$ parâmetros t, s tais que

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chega-se que $t = -1 = s$. Logo, o ponto $(0, -1)$ é o único ponto em $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1\ ,\ x_2 + tv_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w) \Leftrightarrow\ \exists$ parâmetros t, s tais que

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chega-se que $t = -1 = s$. Logo, o ponto $(0, -1)$ é o único ponto em $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$.

Retas distintas que se intersectam são ditas concorrentes.

Equações Paramétricas para Retas

Dado $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$, temos

$$R(\mathrm{x}, v) = \{(x_1 + tv_1 \ , \ x_2 + tv_2 \ , \ \ldots \ , \ x_n + tv_n) : t \in \mathbb{F}\}.$$

Em outras palavras, $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é um ponto em $R(\mathrm{x}, v)$ se, e somente se, existir $t \in \mathbb{F}$ tal que

$$(*) \qquad y_j = x_j + tv_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Essa família de expressões é dita uma equação paramétrica para $R(\mathrm{x}, v)$. Descreve as componentes dos pontos de $R(\mathrm{x}, v)$ a partir do parâmetro t.

Considere $v = (1, 2), w = (-1, 1), \mathrm{p} = (1, 1)$ e $\mathrm{q} = (-1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontremos $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$. Usando as equações paramétricas, temos que $(x, y) \in R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w) \Leftrightarrow\ \exists$ parâmetros t, s tais que

$$\begin{cases} 1 + t = -1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chega-se que $t = -1 = s$. Logo, o ponto $(0, -1)$ é o único ponto em $R(\mathrm{p}, v) \cap R(\mathrm{q}, w)$.

Retas distintas que se intersectam são ditas concorrentes. Retas não paralelas que não se intersectam são ditas reversas.

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$.

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$.

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(1) $$b(y - y_0) = -a(x - x_0).$$

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0). \tag{1}$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0). \tag{1}$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0). \tag{1}$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0). \tag{1}$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Neste caso, o número $-a/b$ é chamado de coeficiente angular da reta R.

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(1) $$b(y - y_0) = -a(x - x_0).$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Neste caso, o número $-a/b$ é chamado de coeficiente angular da reta R. Chamando de m o coeficiente angular, a relação passa a ser escrita como

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Retas no Plano

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

$$b(y - y_0) = -a(x - x_0). \tag{1}$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Neste caso, o número $-a/b$ é chamado de coeficiente angular da reta R. Chamando de m o coeficiente angular, a relação passa a ser escrita como

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Se R é paralela ao eixo-y, define-se o coeficiente angular como sendo ∞.

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(1) $$b(y - y_0) = -a(x - x_0).$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Neste caso, o número $-a/b$ é chamado de coeficiente angular da reta R. Chamando de m o coeficiente angular, a relação passa a ser escrita como

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Se R é paralela ao eixo-y, define-se o coeficiente angular como sendo ∞.

Outras formas úteis de re-escrever (1):

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Estudemos o caso particular $n = 2$. Dados um ponto $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (b, -a)$, consideremos a reta $R = R(p_0, v)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(1) $$b(y - y_0) = -a(x - x_0).$$

Note que, como $v \neq 0$, temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. No caso que $b \neq 0$, isto é, R não é paralela ao eixo-y, podemos escrever (1) como

$$y = y_0 - \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Neste caso, o número $-a/b$ é chamado de coeficiente angular da reta R. Chamando de m o coeficiente angular, a relação passa a ser escrita como

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

Se R é paralela ao eixo-y, define-se o coeficiente angular como sendo ∞.

Outras formas úteis de re-escrever (1):

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad ax + by = c \quad \text{com} \quad c = ax_0 + by_0.$$

Estudemos o caso particular $n = 3$.

Retas no Espaço

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$.

Retas no Espaço

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y, z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{F}, \\ z = z_0 + ct, \end{array}$$

Retas no Espaço

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y, z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{F}, \\ z = z_0 + ct, \end{array}$$

de onde segue que

(2) $a(y - y_0) = b(x - x_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0), \quad a(z - z_0) = c(x - x_0).$

Retas no Espaço

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x,y,z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{F}, \\ z = z_0 + ct, \end{array}$$

de onde segue que

$$(2) \;\; a(y-y_0) = b(x-x_0), \quad c(y-y_0) = b(z-z_0), \quad a(z-z_0) = c(x-x_0).$$

Procedendo como antes, vemos que R é o conjunto solução do sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} bx - ay \phantom{{}-bz} = d \\ \phantom{bx - {}} cy - bz = e \\ cx \phantom{{}-ay} - az = g \end{cases} \qquad \text{com} \qquad \begin{array}{l} d = bx_0 - ay_0, \\ e = cy_0 - bz_0, \\ g = cx_0 - az_0. \end{array}$$

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x,y,z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{F}, \\ z = z_0 + ct, \end{array}$$

de onde segue que

$$(2) \quad a(y-y_0) = b(x-x_0), \quad c(y-y_0) = b(z-z_0), \quad a(z-z_0) = c(x-x_0).$$

Procedendo como antes, vemos que R é o conjunto solução do sistema

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} bx & - & ay & & & = & d \\ & & cy & - & bz & = & e \\ cx & & & - & az & = & g \end{array}\right. \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} d = bx_0 - ay_0, \\ e = cy_0 - bz_0, \\ g = cx_0 - az_0. \end{array}$$

Se $a, b, c \neq 0$

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x, y, z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{F}, \\ z = z_0 + ct, \end{array}$$

de onde segue que

$$(2) \quad a(y - y_0) = b(x - x_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0), \quad a(z - z_0) = c(x - x_0).$$

Procedendo como antes, vemos que R é o conjunto solução do sistema

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} bx & - & ay & & & = & d \\ & & cy & - & bz & = & e \\ cx & & & - & az & = & g \end{array} \right. \qquad \text{com} \qquad \begin{array}{l} d = bx_0 - ay_0, \\ e = cy_0 - bz_0, \\ g = cx_0 - az_0. \end{array}$$

Se $a, b, c \neq 0$, podemos re-escrever (2) como

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x,y,z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(2) $a(y - y_0) = b(x - x_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0), \quad a(z - z_0) = c(x - x_0).$

Procedendo como antes, vemos que R é o conjunto solução do sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} bx - ay = d \\ cy - bz = e \\ cx - az = g \end{cases} \qquad \text{com} \qquad \begin{array}{l} d = bx_0 - ay_0, \\ e = cy_0 - bz_0, \\ g = cx_0 - az_0. \end{array}$$

Se $a, b, c \neq 0$, podemos re-escrever (2) como

$$(4) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

Retas no Espaço

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então uma reta $R = R(p_0, v)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $v = (a, b, c)$. Neste caso $(*)$ se re-escreve como

$$(x,y,z) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{array} \quad t \in \mathbb{F},$$

de onde segue que

(2) $a(y - y_0) = b(x - x_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0), \quad a(z - z_0) = c(x - x_0).$

Procedendo como antes, vemos que R é o conjunto solução do sistema

(3) $$\begin{cases} bx - ay = d \\ cy - bz = e \\ cx - az = g \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} d = bx_0 - ay_0, \\ e = cy_0 - bz_0, \\ g = cx_0 - az_0. \end{array}$$

Se $a, b, c \neq 0$, podemos re-escrever (2) como

(4) $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

que é por vezes chamada de equação simétrica da reta em $\mathbb{F}^3$.

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$.

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\}$$

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

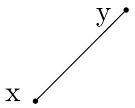
Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

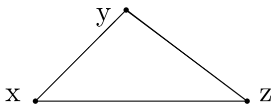
Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



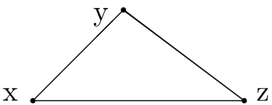
Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$

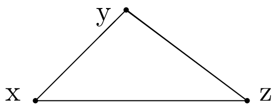


Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$

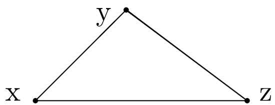


Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

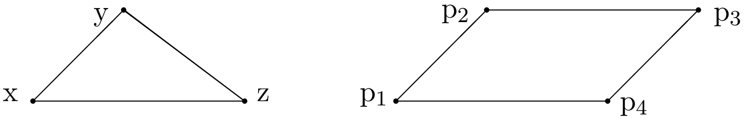
Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

Um paralelogramo

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

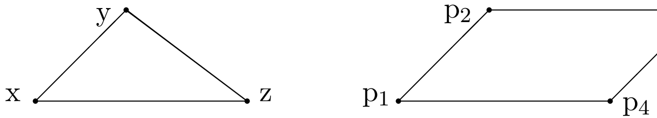
Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

Um paralelogramo

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

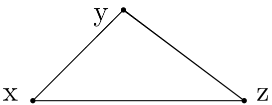
Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

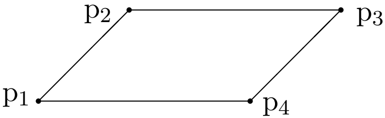
Um paralelogramo é a união de 4 segmentos $\overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} \cup \overline{\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3} \cup \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} \cup \overline{\mathrm{p}_4\mathrm{p}_1}$, determinados por 4 pontos distintos, de modo que existam exatamente dois pares de segmentos paralelos.

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$





Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

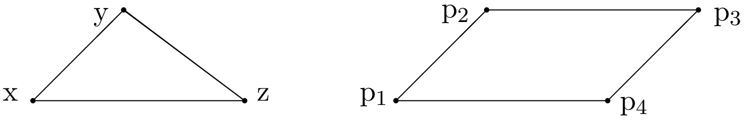
Um paralelogramo é a união de 4 segmentos $\overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} \cup \overline{\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3} \cup \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} \cup \overline{\mathrm{p}_4\mathrm{p}_1}$, determinados por 4 pontos distintos, de modo que existam exatamente dois pares de segmentos paralelos.

Exercício: Defina o que é um polígono.

Segmentos de Retas e Figuras Geométricas

Dado pontos $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos, o segmento de reta que eles determinam é um subconjunto da reta $R(\mathrm{x}, \overrightarrow{\mathrm{xy}})$. Mais precisamente,

$$\overline{\mathrm{xy}} := \{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{\mathrm{xp}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{xy}} \text{ para algum } \lambda \in [0,1]\} = \overline{\mathrm{yx}}.$$



Um triângulo é a união de 3 segmentos de reta $\overline{\mathrm{xy}} \cup \overline{\mathrm{xz}} \cup \overline{\mathrm{zy}}$, sendo $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ 3 pontos distintos.

Segmentos de retas são ditos paralelos se as retas que os contém o forem.

Um paralelogramo é a união de 4 segmentos $\overline{\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2} \cup \overline{\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3} \cup \overline{\mathrm{p}_3\mathrm{p}_4} \cup \overline{\mathrm{p}_4\mathrm{p}_1}$, determinados por 4 pontos distintos, de modo que existam exatamente dois pares de segmentos paralelos.

Exercício: Defina o que é um polígono. E um paralelepípedo?

Planos

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

(∗∗) $$y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$.

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \ \ \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

(∗∗) $$y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n), v = (v_1, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$, isso coincide com

$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \dots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \dots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \dots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $P_1 = P(\mathrm{x}, v_1, w_1), P_2 = P(\mathrm{y}, v_2, w_2)$.

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \ \ \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $P_1 = P(\mathrm{x}, v_1, w_1), P_2 = P(\mathrm{y}, v_2, w_2)$. Encontrar $P_1 \cap P_2$.

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \ \ \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $P_1 = P(\mathrm{x}, v_1, w_1), P_2 = P(\mathrm{y}, v_2, w_2)$. Encontrar $P_1 \cap P_2$. Sabemos que $(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $P_1 = P(\mathrm{x}, v_1, w_1), P_2 = P(\mathrm{y}, v_2, w_2)$. Encontrar $P_1 \cap P_2$. Sabemos que $(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Planos

Dados um ponto x e dois vetores com direções distintas v e w, define-se o plano contendo x gerado por v e w como sendo o conjunto

$$P(\mathrm{x}, v, w) = \{\mathrm{y} \in \mathbb{F}^n : \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ tais que } \overrightarrow{\mathrm{xy}} = \lambda v + \mu w\}.$$

Se $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, isso coincide com

$$\{(\ x_1 + t_1 v_1 + t_2 w_1\ ,\ x_2 + t_1 v_2 + t_2 w_2\ , \ldots ,\ x_n + t_1 v_n + t_2 w_n\ ) : t_1, t_2 \in \mathbb{F}\}.$$

Equações paramétricas: $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in P(\mathrm{x}, v, w) \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ t.q.

$$(**) \qquad y_j = x_j + t_1 v_j + t_2 w_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

O conjunto $\{v, w\}$ é chamado de um conjunto de vetores diretores para o plano $P(\mathrm{x}, v, w)$. Observe que o plano $x_i x_j$ é o plano $P(0, e_i, e_j)$.

Sejam $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = (0, -1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $P_1 = P(\mathrm{x}, v_1, w_1), P_2 = P(\mathrm{y}, v_2, w_2)$. Encontrar $P_1 \cap P_2$. Sabemos que $(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow\ \exists\ t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2.

Planos

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\ t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases}$$

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases}$$

Planos

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = s_2 \\ s_1 = s_2 + 1 \end{cases}$$

Planos

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = s_2 \\ s_1 = s_2 + 1 \end{cases}$$

Logo, temos única variável livre (s_2).

Planos

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = s_2 \\ s_1 = s_2 + 1 \end{cases}$$

Logo, temos única variável livre (s_2).

Substituindo a solução em qualquer uma das duas equações paramétricas

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = s_2 \\ s_1 = s_2 + 1 \end{cases}$$

Logo, temos única variável livre (s_2).

Substituindo a solução em qualquer uma das duas equações paramétricas vemos que

$$P_1 \cap P_2 = \{(1\ ,\ s_2\ ,\ 1 + s_2) : s_2 \in \mathbb{R}\}$$

Planos

$(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \ \exists\, t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_1 + t_2 \quad \text{e} \quad x = s_1 - s_2,\ y = -1 + s_1,\ z = 1 + s_2.$$

Assim, temos um sistema linear nas variáveis t_1, t_2, s_1 e s_2:

$$\begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ t_1 + t_2 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} t_1 = s_1 - s_2 \\ t_2 = -1 + s_1 \\ 2s_1 - s_2 - 1 = 1 + s_2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = s_2 \\ s_1 = s_2 + 1 \end{cases}$$

Logo, temos única variável livre (s_2).

Substituindo a solução em qualquer uma das duas equações paramétricas vemos que

$$P_1 \cap P_2 = \{(1\ ,\ s_2\ ,\ 1 + s_2) : s_2 \in \mathbb{R}\} = R(\mathrm{p}, v)$$

com $\mathrm{p} = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.

Estudemos o caso particular $n = 3$.

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$.

Planos no Espaço - Equação Geral e Vetor Normal

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Planos no Espaço - Equação Geral e Vetor Normal

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

Planos no Espaço - Equação Geral e Vetor Normal

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula.

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula. Este passo de escalonamento não altera o determinante.

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula. Este passo de escalonamento não altera o determinante. Logo, $\det(A) = 0$

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula. Este passo de escalonamento não altera o determinante. Logo, $\det(A) = 0$, isto é,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{6}$$

com $a = v_2w_3 - v_3w_2,\ b = v_3w_1 - v_1w_3$ e $c = v_1w_2 - v_2w_1$.

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow\ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

(5) $$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w.$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula. Este passo de escalonamento não altera o determinante. Logo, $\det(A) = 0$, isto é,

(6) $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

com $a = v_2w_3 - v_3w_2,\ b = v_3w_1 - v_1w_3$ e $c = v_1w_2 - v_2w_1$. Como v e w não tem a mesma direção, $u = (a, b, c) \neq 0$.

Estudemos o caso particular $n = 3$. Consideremos então um plano $P = P(p_0, v, w)$ com $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0), v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Por definição, $\mathrm{p} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow\ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisfazendo

$$\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = \alpha v + \beta w. \tag{5}$$

Lembre que $\overrightarrow{\mathrm{p}_0\mathrm{p}} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0. \end{bmatrix}$$

Note que (5) diz que substituindo $L_3(A)$ por $L_3(A) - \alpha L_1(A) - \beta L_2(A)$ obteremos uma matriz cuja terceira linha é nula. Este passo de escalonamento não altera o determinante. Logo, $\det(A) = 0$, isto é,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{6}$$

com $a = v_2w_3 - v_3w_2,\ b = v_3w_1 - v_1w_3$ e $c = v_1w_2 - v_2w_1$. Como v e w não tem a mesma direção, $u = (a, b, c) \neq 0$. Equivalentemente,

$$ax + by + cz = d \quad \text{com} \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0. \tag{7}$$

Planos no Espaço - Exemplos

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$.

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7)

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$.

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$. Temos

$$P = \{(z - 2y + 4\ ,\ y\ ,\ z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$. Temos

$$\begin{aligned} P &= \{(z - 2y + 4\ ,\ y\ ,\ z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(4, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$. Temos

$$\begin{aligned} P &= \{(z - 2y + 4\ ,\ y\ ,\ z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(4, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{x} = (4, 0, 0) \in P$

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$. Temos

$$\begin{aligned} P &= \{(z - 2y + 4\ ,\ y\ ,\ z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(4, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{x} = (4, 0, 0) \in P$ e os vetores $v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$ foram um conjunto diretor.

Planos no Espaço - Exemplos

Encontremos equação linear cujo conjunto solução é $P(\mathrm{x}, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{x} = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ e $w = (1, -1, 0)$. Usando (7), temos

$$a = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2, \quad b = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2, \quad c = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 1,$$
$$\text{e} \quad d = a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c \cdot 3 = 1$$

Portanto, $2x + 2y + z = 1$ é uma equação como procurada e $u = (2, 2, 1)$ é um vetor normal a este plano.

Encontremos um conjunto diretor para o plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $x + 2y - z = 4$, assim como um ponto $\mathrm{x} \in P$. Temos

$$\begin{aligned} P &= \{(z - 2y + 4\ ,\ y\ ,\ z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(4, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{x} = (4, 0, 0) \in P$ e os vetores $v = (-2, 1, 0), w = (1, 0, 1)$ foram um conjunto diretor.

Exercício: Mostre que duas retas não paralelas contidas num mesmo plano se intersectam.