Geometria Analítica
Vetores em Espaços Cartesianos

Adriano Moura

Unicamp

2021

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de "vetor" em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: “operações com setas”

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

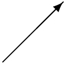
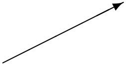
Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot \nearrow \quad = \quad \nearrow$ $\qquad \lambda$ um “escalar”

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

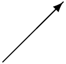
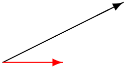
Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot$  $=$  λ um “escalar” e  $+$  $=$ 

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

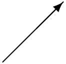
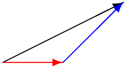
Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot$  $=$  λ um “escalar” e  $+$  $=$ 

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de "vetor" em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

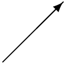
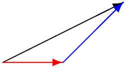
Intuição: "operações com setas"

$\lambda \cdot$  $=$  λ um "escalar" e  $+$  $=$ 

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: “operações com setas”

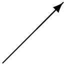
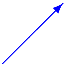
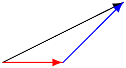
$\lambda \cdot$  $=$  λ um “escalar” e  $+$  $=$ 

Duas operações “algébricas”: soma de setas (resultando em seta)

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de "vetor" em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: "operações com setas"

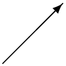
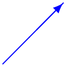
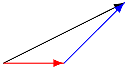
$\lambda \cdot$  $=$  λ um "escalar" e  $+$  $=$ 

Duas operações "algébricas": soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot$  $=$  λ um “escalar” e  $+$  $=$ 

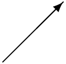
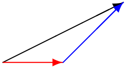
Duas operações “algébricas”: soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Mas o que são setas (vetores) e escalares (“números”)?

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de "vetor" em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: "operações com setas"

$\lambda \cdot$  $=$  λ um "escalar" e  $+$  $=$ 

Duas operações "algébricas": soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

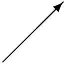
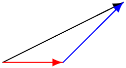
Mas o que são setas (vetores) e escalares ("números")?

Algumas definições dizem que vetores são objetos "geométricos" com 3 características: magnitude, direção e sentido.

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de "vetor" em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: "operações com setas"

$\lambda \cdot$  $=$  λ um "escalar" e  $+$  $=$ 

Duas operações "algébricas": soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Mas o que são setas (vetores) e escalares ("números")?

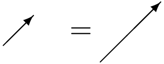
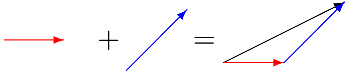
Algumas definições dizem que vetores são objetos "geométricos" com 3 características: magnitude, direção e sentido.

Mas o que significa "magnitude", "direção" e "sentido"?

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot$  λ um “escalar” e 

Duas operações “algébricas”: soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Mas o que são setas (vetores) e escalares (“números”)?

Algumas definições dizem que vetores são objetos “geométricos” com 3 características: magnitude, direção e sentido.

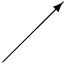
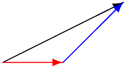
Mas o que significa “magnitude”, “direção” e “sentido”?

De fato, vetores podem ser usados para definir (coincidência de) direção

Vetores - Intuição

Objetivo: Utilizar o conceito de “vetor” em espaços cartesianos para estudar objetos geométricos clássicos.

Intuição: “operações com setas”

$\lambda \cdot$  $=$  λ um “escalar” e  $+$  $=$ 

Duas operações “algébricas”: soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Mas o que são setas (vetores) e escalares (“números”)?

Algumas definições dizem que vetores são objetos “geométricos” com 3 características: magnitude, direção e sentido.

Mas o que significa “magnitude”, “direção” e “sentido”?

De fato, vetores podem ser usados para definir (coincidência de) direção, enquanto magnitude e mais ainda sentido só são definíveis quando trabalhamos com conjuntos “especiais” de números.

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$)

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$.

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \; \forall \; 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano)

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano).

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F}\ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{F}\ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x.

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x. O ponto $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamado de origem do espaço cartesiano.

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x. O ponto $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamado de origem do espaço cartesiano. Fixado j, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_i = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

é chamado de j-ésimo eixo coordenado

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x. O ponto $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamado de origem do espaço cartesiano. Fixado j, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_i = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

é chamado de j-ésimo eixo coordenado (ou simplesmente eixo-x_j).

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x. O ponto $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamado de origem do espaço cartesiano. Fixado j, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_i = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

é chamado de j-ésimo eixo coordenado (ou simplesmente eixo-x_j). Fixados $i \neq j$, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_k = 0 \text{ se } k \neq i, j\}$$

é chamado de o plano coordenado (i, j)

Espaços Cartesianos

O *Espaço Cartesiano n-dimensional* (sobre o corpo $\mathbb{F}$) é o conjunto $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{F}\ \forall\ 1 \leq j \leq n\}$. Estaremos mais interessados no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{R}^2$ é também chamado de plano (cartesiano) e $\mathbb{R}^3$ de espaço (cartesiano). Além disso, é mais comum usar-se a notação $(x, y) \in \mathbb{F}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{F}^3$.

Dado $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, o número x_j é chamado de a j-ésima componente de x. O ponto $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ é chamado de origem do espaço cartesiano. Fixado j, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_i = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

é chamado de j-ésimo eixo coordenado (ou simplesmente eixo-x_j). Fixados $i \neq j$, o subconjunto

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{F}^n : x_k = 0 \text{ se } k \neq i, j\}$$

é chamado de o plano coordenado (i, j) (ou simplesmente plano $x_i x_j$).

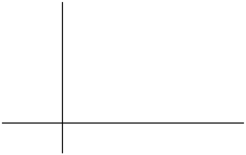
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

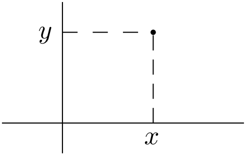
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

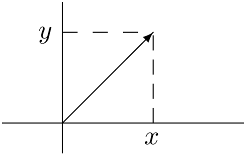


Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



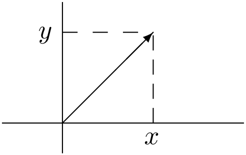
Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

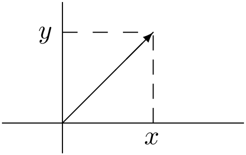
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

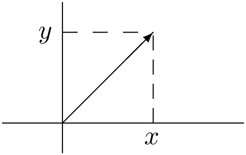


O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

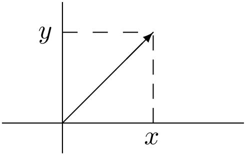


O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



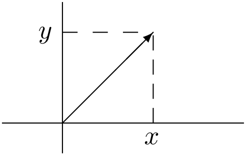
No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

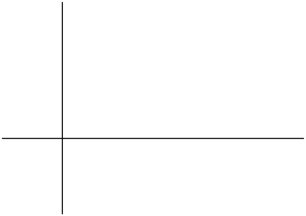


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

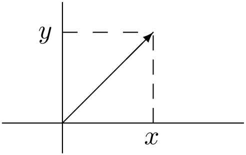
O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

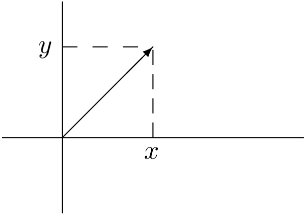


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

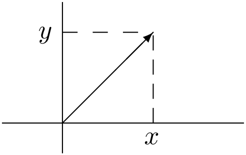
O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

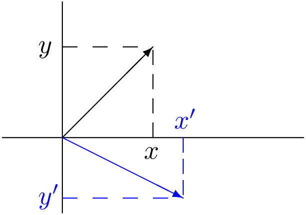


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

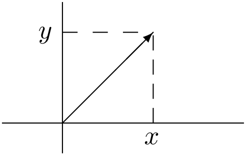
O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

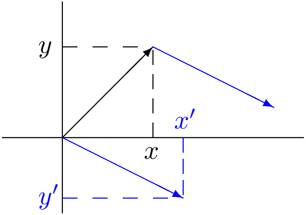


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

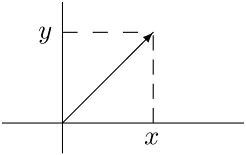
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

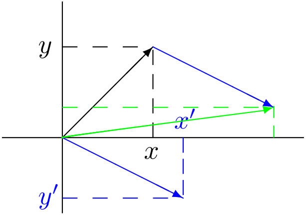
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



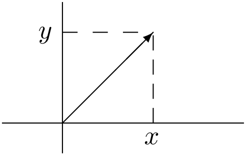
No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

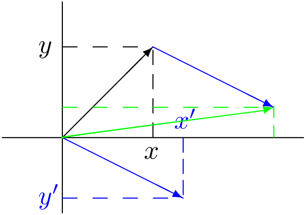


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

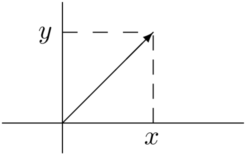
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Note que $(\mathbb{F}^n, +)$ é grupo abeliano.

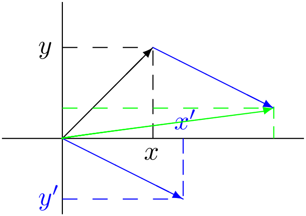
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

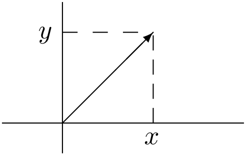
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Note que $(\mathbb{F}^n, +)$ é grupo abeliano. Além disso:

$\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}, v, w \in \mathbb{F}^n$;

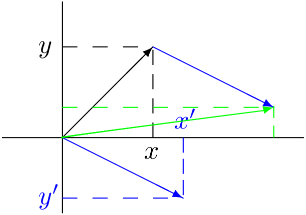
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



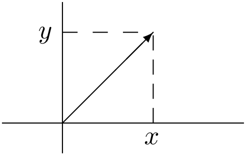
Note que $(\mathbb{F}^n, +)$ é grupo abeliano. Além disso:

$\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \ \forall \ \lambda \in \mathbb{F}, v, w \in \mathbb{F}^n;$

$(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{F}^n;$

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como “pontos” ou “vetores” no espaço cartesiano, dependendo do contexto.

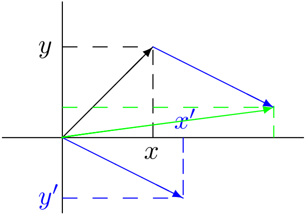


No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Note que $(\mathbb{F}^n, +)$ é grupo abeliano. Além disso:

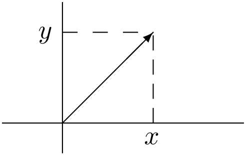
$\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \ \forall \ \lambda \in \mathbb{F}, v, w \in \mathbb{F}^n$;

$(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{F}^n$;

$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{F}^n$;

Espaços Cartesianos - Pontos vs Vetores

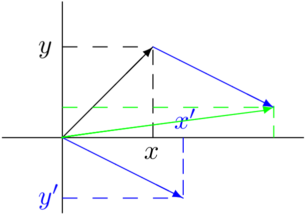
Os elementos de $\mathbb{F}^n$ serão interpretados como "pontos" ou "vetores" no espaço cartesiano, dependendo do contexto.



No contexto vetorial, as componentes são mais usualmente chamadas de coordenadas.

O contexto vetorial só acontece quando pensamos em $\mathbb{F}^n$ equipado com as operações:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$



Note que $(\mathbb{F}^n, +)$ é grupo abeliano. Além disso:

$\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \ \forall \ \lambda \in \mathbb{F}, v, w \in \mathbb{F}^n$;

$(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{F}^n$;

$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in \mathbb{F}^n$;

Também vale: $\lambda v = 0 \ \Leftrightarrow$ ou $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Também é comum a notação $\overrightarrow{AB}$ para denotar o vetor

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \quad \text{com} \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = (b_1 \ldots, b_n).$$

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

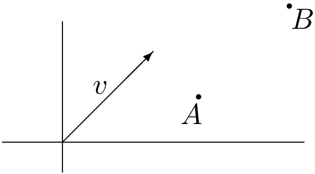
Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Também é comum a notação $\overrightarrow{AB}$ para denotar o vetor

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \quad \text{com} \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = (b_1 \ldots, b_n).$$

Às vezes o símbolo $\overrightarrow{AB}$ é usado para denotar a "translação" deste vetor até o ponto A.



Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

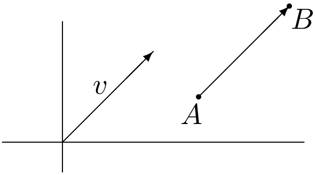
Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Também é comum a notação $\overrightarrow{AB}$ para denotar o vetor

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \quad \text{com} \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = (b_1 \ldots, b_n).$$

Às vezes o símbolo $\overrightarrow{AB}$ é usado para denotar a "translação" deste vetor até o ponto A.



Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

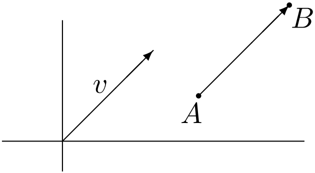
Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Também é comum a notação $\overrightarrow{AB}$ para denotar o vetor

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \quad \text{com} \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = (b_1 \ldots, b_n).$$

Às vezes o símbolo $\overrightarrow{AB}$ é usado para denotar a "translação" deste vetor até o ponto A.



Dado $1 \leq j \leq n$, considere o vetor $e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ com o 1 sendo a j-ésima coordenada.

Pontos vs Vetores - Notações Variadas

Para auxilar na contextualização, usaremos tipografia diferente para falar de um elemento de $\mathbb{F}^n$ quando estamos interpretando como ponto ou como vetor: u, v, w para vetores e $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}$ para pontos.

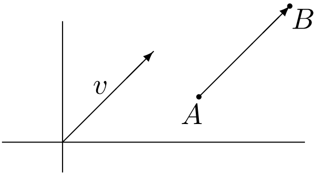
Muitos textos costumam representar pontos pelas letras $A, B, C, \ldots$.

É comum textos que escrevem $A(a_1, \ldots, a_n)$ ao invés de $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Também é comum a notação $\overrightarrow{AB}$ para denotar o vetor

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \quad \text{com} \quad A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = (b_1 \ldots, b_n).$$

Às vezes o símbolo $\overrightarrow{AB}$ é usado para denotar a "translação" deste vetor até o ponto A.



Dado $1 \leq j \leq n$, considere o vetor $e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ com o 1 sendo a j-ésima coordenada.

Observe que, se $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

Sobre Definições de Vetor

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta “O que é um vetor?”.

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Acabamos de definir a noção de (coincidência) de direção

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Acabamos de definir a noção de (coincidência) de direção a partir da noção de vetor em espaços cartesianos.

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Acabamos de definir a noção de (coincidência) de direção a partir da noção de vetor em espaços cartesianos. Note que a definição faz uso apenas da operação de multiplicação por escalar.

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Acabamos de definir a noção de (coincidência) de direção a partir da noção de vetor em espaços cartesianos. Note que a definição faz uso apenas da operação de multiplicação por escalar.

Também definiremos sentido, comprimento (norma, módulo, magnitude)

Sobre Definições de Vetor

É muito comum textos darem o seguinte tipo de resposta para a pergunta "O que é um vetor?".

- Os vetores representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido.
- Vetores são segmentos de retas usados para representar alguma grandeza vetorial. Vetor é um segmento de reta orientado que apresenta módulo (tamanho), direção e sentido.

Não necessitamos saber o que é um segmento de reta (orientado!!!!!) para definir vetor!

Dois vetores $v, w \neq 0$ tem a mesma direção se $w = \lambda v$ p/ algum $\lambda \in \mathbb{F}$.

Acabamos de definir a noção de (coincidência) de direção a partir da noção de vetor em espaços cartesianos. Note que a definição faz uso apenas da operação de multiplicação por escalar.

Também definiremos sentido, comprimento (norma, módulo, magnitude) e ângulo.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido).

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição. Versões quantitativas se propõe a medir a diferença de direção (ou sentido) de alguma maneira.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição. Versões quantitativas se propõe a medir a diferença de direção (ou sentido) de alguma maneira. Exemplos: radianos, graus

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição. Versões quantitativas se propõe a medir a diferença de direção (ou sentido) de alguma maneira. Exemplos: radianos, graus, cosseno...

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição. Versões quantitativas se propõe a medir a diferença de direção (ou sentido) de alguma maneira. Exemplos: radianos, graus, cosseno...

Estudaremos versão quantitativa no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Sentido? Comprimento? Ângulo?

A noção de sentido só faz sentido 🙂 se $\mathbb{F}$ possuir uma propriedade extra: ser totalmente ordenado. Por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Se $w = \lambda v$ para algum $\lambda < 0$, diz-se que v, w tem sentidos opostos.

A noção de comprimento também não é definível para corpos quaisquer, mas é definível para vários subcorpos de $\mathbb{C}$, incluindo $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

A noção de ângulo está relacionada à diferença de direção (ou sentido). Existem versões qualitativas e versões quantitativas para a definição. Versões quantitativas se propõe a medir a diferença de direção (ou sentido) de alguma maneira. Exemplos: radianos, graus, cosseno...

Estudaremos versão quantitativa no caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

De agora em diante, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Produto Interno (ou Escalar)

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1}$$

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1}$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{1}$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

(1) $$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \ \forall \ v, w \in \mathbb{R}^n$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

(1) $$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1}$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle\ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1}$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

(PI4) (positividade): $\langle v, v\rangle > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$(1) \qquad \langle v, w \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \ \forall \ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \ \forall \ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \ \forall \ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

(PI4) (positividade): $\langle v, v \rangle > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

As seguintes propriedades são consequências das anteriores:

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

(1) $$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

(PI4) (positividade): $\langle v, v\rangle > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

As seguintes propriedades são consequências das anteriores:

(PI5) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$(1) \qquad \langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

(PI4) (positividade): $\langle v, v\rangle > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

As seguintes propriedades são consequências das anteriores:

(PI5) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI6) $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Produto Interno (ou Escalar)

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, defina

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{1}$$

Assim, o produto interno é uma função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número a cada par de vetores através da fórmula (1).

Observe que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

(PI1) (simetria): $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI2) (distributividade): $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI3) (associatividade): $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

(PI4) (positividade): $\langle v, v\rangle > 0$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

As seguintes propriedades são consequências das anteriores:

(PI5) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \ \forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(PI6) $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Muitos textos usam a notação $v{\cdot}w$ ao invés de $\langle v, w\rangle$.

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte.

Produto Interno - Usando as Propriedades

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$

Produto Interno - Usando as Propriedades

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \langle v_j, w \rangle.$$

Produto Interno - Usando as Propriedades

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \langle v_j, w \rangle.$$

Expressão similar é obtida se w se escreve como soma de outros vetores.

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \langle v_j, w \rangle.$$

Expressão similar é obtida se w se escreve como soma de outros vetores.

Considere os vetores
$v = (1, 0, 2), w_1 = (0, 1, -2), w_2 = (1, -1, 1), w_3 = w_1 + 2w_2.$

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \langle v_j, w \rangle.$$

Expressão similar é obtida se w se escreve como soma de outros vetores.

Considere os vetores
$v = (1, 0, 2), w_1 = (0, 1, -2), w_2 = (1, -1, 1), w_3 = w_1 + 2w_2$. Temos

$\langle v, w_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -4,$

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \langle v_j, w \rangle.$$

Expressão similar é obtida se w se escreve como soma de outros vetores.

Considere os vetores
$v = (1, 0, 2), w_1 = (0, 1, -2), w_2 = (1, -1, 1), w_3 = w_1 + 2w_2$. Temos

$$\langle v, w_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -4, \quad \langle v, w_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3,$$

Produto Interno - Usando as Propriedades

Iterando estas propriedades, obtemos a seguinte. Se

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

para alguma escolha de $m \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{R}, v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \langle v_j, w \rangle.$$

Expressão similar é obtida se w se escreve como soma de outros vetores.

Considere os vetores
$v = (1, 0, 2), w_1 = (0, 1, -2), w_2 = (1, -1, 1), w_3 = w_1 + 2w_2$. Temos

$$\langle v, w_1 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -4, \quad \langle v, w_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3,$$

$$\langle v, w_3 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + 2\langle v, w_2 \rangle = -4 + 6 = 2.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \, \langle w, w \rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle\ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2\ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle\ \langle \lambda v, \lambda v\rangle$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle\ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2\ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle\ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle\ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \; \langle w, w \rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w \rangle^2 = \langle v, \lambda v \rangle^2 = \lambda^2 \; \langle v, v \rangle^2 = \langle v, v \rangle \; \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle v, v \rangle \; \langle w, w \rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle > 0.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle > 0.$$

Por outro lado, $\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle > 0.$$

Por outro lado, $\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$.

Escolhendo $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle > 0.$$

Por outro lado, $\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$.
Escolhendo $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$ a última expressão se torna

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle}.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \; \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \; \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \; \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \; \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \; , \; w - \lambda v\rangle > 0.$$

Por outro lado, $\langle w - \lambda v \; , \; w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$.

Escolhendo $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$ a última expressão se torna

$$\langle w - \lambda v \; , \; w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle}.$$

Portanto, $\langle w, w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle} > 0$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Para quaiquer dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle$.

Dem.: A igualdade é óbvia se um dos dois vetores for nulo. Então, suponha que sejam ambos não nulos. Considere primeiro o caso que ambos tenham a mesma direção, digamos $w = \lambda v$. Neste caso temos

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle v, \lambda v\rangle^2 = \lambda^2 \ \langle v, v\rangle^2 = \langle v, v\rangle \ \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle v, v\rangle \ \langle w, w\rangle.$$

Suponha agora que os dois vetores tenham direções distintas, isto é, $w \neq \lambda v \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $w - \lambda v \neq 0$ e, portanto,

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle > 0.$$

Por outro lado, $\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$.
Escolhendo $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$ a última expressão se torna

$$\langle w - \lambda v \ , \ w - \lambda v\rangle = \langle w, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle}.$$

Portanto, $\langle w, w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle} > 0$, de onde o resultado desejado segue. □

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$
Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.
Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$;
2. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

i. $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;
ii. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$;
2. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;
2. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\ \langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$
Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.
Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;

(ii) $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\ \langle v, w\rangle + \|w\|^2$$
e que a Desigualdade de Cauchy-Shwarz pode ser re-escrita como
$$(*) \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;
2. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\ \langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

e que a Desigualdade de Cauchy-Shwarz pode ser re-escrita como

$$(*) \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|.$$

Como $\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle|$

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$;
2. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\ \langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

e que a Desigualdade de Cauchy-Shwarz pode ser re-escrita como

$$(*) \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\ \|w\|.$$

Como $\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle|$, segue que

$$\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\ |\langle v, w\rangle| + \|w\|^2$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Comprimento

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$
Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.
Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

- (i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$;
- (ii) $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que
$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$
e que a Desigualdade de Cauchy-Shwarz pode ser re-escrita como
$$(*) \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|.$$
Como $\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle|$, segue que
$$\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2$$

O comprimento (ou norma) de um vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em particular, $\|e_j\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Vetores de norma igual a 1 são chamados de vetores unitários.

Para quaisquer vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

- i. $\|\lambda v\| = |\lambda| \; \|v\|$;
- ii. $\|v\| = 0$ só se $v = 0$;
- iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular)

Dem.: As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas. Note que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

e que a Desigualdade de Cauchy-Shwarz pode ser re-escrita como

$$(*) \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \; \|w\|.$$

Como $\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle|$, segue que

$$\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\;\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$,

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$, $\varphi(v, -w) = \varphi(-v, w)$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v),\ \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v),\ \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v),\ \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores.

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v),\ \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$, $\varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \; \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$, $\varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \;\; \forall \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$, $\varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Portanto, o valor 1 indica vetores no mesmo sentido

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$, $\varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Portanto, o valor 1 indica vetores no mesmo sentido enquanto -1 indica vetores na mesma direção, mas com sentidos opostos.

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v), \ \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Portanto, o valor 1 indica vetores no mesmo sentido enquanto -1 indica vetores na mesma direção, mas com sentidos opostos.

Observe ainda que $(*)$ pode ser reescrita como

$$-1 \leq \varphi(v,w) \leq 1$$

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$, $\varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \ \ \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Portanto, o valor 1 indica vetores no mesmo sentido enquanto -1 indica vetores na mesma direção, mas com sentidos opostos.

Observe ainda que $(*)$ pode ser reescrita como

$$-1 \leq \varphi(v,w) \leq 1$$

e que $|\varphi(v,w)| < 1$ se v e w tem direções diferentes.

Desigualdade de Cauchy-Shwarz $\rightsquigarrow$ Medida de Ângulo

Considere a função

$$\varphi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \; \|w\|}.$$

Assim, φ associa um número real a cada par de vetores não nulos.

Observe que $\varphi(v,w) = \varphi(w,v),\; \varphi(v,-w) = \varphi(-v,w) = -\varphi(v,w)$ e

$$\varphi(\lambda v, \mu w) = \varphi(v,w) \;\; \forall \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ou seja, φ depende apenas dos sentidos dos vetores. Isso diz que φ é uma medição quantitativa da diferença de sentidos dos vetores v e w. Temos

$$\varphi(v,v) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(v,-v) = -1.$$

Portanto, o valor 1 indica vetores no mesmo sentido enquanto -1 indica vetores na mesma direção, mas com sentidos opostos.

Observe ainda que $(*)$ pode ser reescrita como

$$-1 \leq \varphi(v,w) \leq 1$$

e que $|\varphi(v,w)| < 1$ se v e w tem direções diferentes.

$\varphi(v,w)$ é chamado de o cosseno do ângulo formado pelos vetores v e w.

Ortogonalidade

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$.

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \; \|w\|}$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \ \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\;\|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0, 1)$, então $\varphi(v, u) = \langle v, u \rangle = 0$.

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0,1)$, então $\varphi(v,u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0,1)$, então $\varphi(v,u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0, 1)$, então $\varphi(v, u) = \langle v, u \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0,1)$, então $\varphi(v,u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$.

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v, w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1, 0)$ e $w = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0, 1)$, então $\varphi(v, u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$.

Portanto, $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0$. $\square$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v,w\rangle=0$. $\square$

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n, w\neq 0$, considere $u=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\ w$.

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0,1)$, então $\varphi(v,u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0$. $\square$

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$, considere $u = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\ w$. Observe que

$\langle v - u, \lambda w\rangle$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w) = 0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v = (1,0)$ e $w = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u = (0,1)$, então $\varphi(v,u) = \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0$. $\square$

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0$, considere $u = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\ w$. Observe que

$$\langle v - u, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle - \lambda\langle \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\ w, w\rangle$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v,w\rangle=0$. $\square$

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n, w\neq 0$, considere $u=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\ w$. Observe que

$$\langle v-u,\lambda w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\ w,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle w,w\rangle$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\;\|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v,w\rangle=0$. $\square$

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n, w\neq 0$, considere $u=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w$. Observe que

$$\langle v-u,\lambda w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle w,w\rangle=0.$$

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v,w\rangle=0$. $\square$

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n, w\neq 0$, considere $u=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w$. Observe que

$$\langle v-u,\lambda w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle w,w\rangle=0.$$

u é chamado de projeção ortogonal de v na direção de w

Ortogonalidade

Diz-se que v e w são ortogonais se $\varphi(v,w)=0$. $\quad (v \perp w)$

Calculemos o ângulo entre os vetores $v=(1,0)$ e $w=(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(v,w)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se $u=(0,1)$, então $\varphi(v,u)=\langle v,u\rangle=0$.

Teorema de Pitágoras

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, temos $v\perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Dem.: Temos $\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$.

Portanto, $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v,w\rangle=0$. □

Dados $v,w\in\mathbb{R}^n, w\neq 0$, considere $u=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w$. Observe que

$$\langle v-u,\lambda w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\,w,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle-\lambda\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle w,w\rangle=0.$$

u é chamado de projeção ortogonal de v na direção de $w \rightsquigarrow \mathrm{Pr}_w(v)$.

Produto Vetorial

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2\ ,\ v_3w_1 - v_1w_3\ ,\ v_1w_2 - v_2w_1\ ).$$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$. Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \ , \ v_3 w_1 - v_1 w_3 \ , \ v_1 w_2 - v_2 w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w.

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det\left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \ , \ v_3 w_1 - v_1 w_3 \ , \ v_1 w_2 - v_2 w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

a) $e_1 \times e_2 = e_3$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

a. $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$\left(\ v_2w_3 - v_3w_2\ ,\ v_3w_1 - v_1w_3\ ,\ v_1w_2 - v_2w_1\ \right).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det\left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

- a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
- b) $\langle v \times w, v \rangle = 0 = \langle v \times w, w \rangle$,

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \ , \ v_3 w_1 - v_1 w_3 \ , \ v_1 w_2 - v_2 w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

- a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
- b) $\langle v \times w, v \rangle = 0 = \langle v \times w, w \rangle$,
- c) $v \times w = -w \times v$,

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det\left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

- a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
- b) $\langle v \times w, v \rangle = 0 = \langle v \times w, w \rangle$,
- c) $v \times w = -w \times v$,
- d) Se $|\varphi(v, w)| = 1$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$.
Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$.
A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det\left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
b) $\langle v \times w, v\rangle = 0 = \langle v \times w, w\rangle$,
c) $v \times w = -w \times v$,
d) Se $|\varphi(v, w)| = 1$, $v \times w = 0$,

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$. Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$. A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

- a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
- b) $\langle v \times w, v \rangle = 0 = \langle v \times w, w \rangle$,
- c) $v \times w = -w \times v$,
- d) Se $|\varphi(v, w)| = 1$, $v \times w = 0$,
- e) $(u + v) \times w$

Produto Vetorial

Agora estudamos um tipo de produto de vetores especial em $\mathbb{R}^3$. Dados $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, considere o vetor

$$(\ v_2w_3 - v_3w_2 \ , \ v_3w_1 - v_1w_3 \ , \ v_1w_2 - v_2w_1 \ ).$$

Este vetor é chamado de o produto vetorial de v por w. Notação: $v \times w$. A fórmula para $v \times w$ pode ser mais facilmente memorizada via o "determinante":

$$v \times w = \det \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

- (a) $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$,
- (b) $\langle v \times w, v \rangle = 0 = \langle v \times w, w \rangle$,
- (c) $v \times w = -w \times v$,
- (d) Se $|\varphi(v, w)| = 1$, $v \times w = 0$,
- (e) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \ \|w\| \ \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \ v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \; v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \; v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$

$$\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \, \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \text{sen}(\theta)$.

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \, \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \text{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \, \text{sen}(\theta)$

$$\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\|\ \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall\ v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \operatorname{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\|\ \operatorname{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \; v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \mathrm{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \mathrm{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \varphi(v,w)^2\right) = \|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2 \; \|w\|^2}\right)$$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\|\ \sqrt{1-\varphi(v,w)^2} \quad \forall\ v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \le \theta \le \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1-\varphi(v,w)^2} = \operatorname{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\|\ \operatorname{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\begin{aligned} \|v\|^2\ \|w\|^2 \left(1-\varphi(v,w)^2\right) &= \|v\|^2\ \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\ \|w\|^2}\right) \\ &= \|v\|^2\ \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2 \end{aligned}$$

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \; v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \operatorname{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \operatorname{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \varphi(v,w)^2\right) &= \|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2 \; \|w\|^2}\right) \\
&= \|v\|^2 \; \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \; (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \; - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall \; v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1-\varphi(v,w)^2} = \mathrm{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \; \mathrm{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \varphi(v,w)^2\right) &= \|v\|^2 \; \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2 \; \|w\|^2}\right) \\
&= \|v\|^2 \; \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \; (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \; - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2.
\end{aligned}$$

e $\quad \|v \times w\|^2$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Áreas

$$\|v \times w\| = \|v\| \ \|w\| \ \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall\ v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \operatorname{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\| \ \|w\| \operatorname{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \ \|w\|^2 \left(1 - \varphi(v,w)^2\right) &= \|v\|^2 \ \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2 \ \|w\|^2}\right) \\ &= \|v\|^2 \ \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\ (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \ - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2. \end{aligned}$$

e $\quad \|v \times w\|^2 = (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2.$

$$\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\|\ \sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} \quad \forall\ v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observação: Se $0 \leq \theta \leq \pi$ é a medida em radianos do ângulo formado por v e w, então $\varphi(v,w) = \cos(\theta)$ e $\sqrt{1 - \varphi(v,w)^2} = \operatorname{sen}(\theta)$.

Logo, podemos reescrever o fato acima como $\|v \times w\| = \|v\|\ \|w\| \operatorname{sen}(\theta)$, que coincide com a fórmula para área de um paralelogramos com lados de comprimento $\|v\|$ e $\|w\|$ que formam um ângulo de medida θ.

Dem.: Temos

$$\begin{aligned}
\|v\|^2\ \|w\|^2 \left(1 - \varphi(v,w)^2\right) &= \|v\|^2\ \|w\|^2 \left(1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\ \|w\|^2}\right) \\
&= \|v\|^2\ \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\ (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)\ - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2.
\end{aligned}$$

e $\quad \|v \times w\|^2 = (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2.$

Abrindo-se as multiplicações, vê-se que as expressões coincidem. $\square$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Volumes

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Volumes

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Volumes

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Volumes

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$.

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w\rangle = \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w\rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$. Segue então da definição de φ que

$$\langle u, v \times w\rangle = \|v \times w\| \, \|u\| \cos(\theta).$$

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. □

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$. Segue então da definição de φ que

$$\langle u, v \times w \rangle = \|v \times w\| \, \|u\| \cos(\theta).$$

Da geometria euclidiana clássica, $\|u\| |\cos(\theta)|$ é a altura do paralelepípedo que tem o paralelogramo definido por v e w como base e as outras arestas são paralelas a u e tem comprimentos iguais a $\|u\|$.

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$. Segue então da definição de φ que

$$\langle u, v \times w \rangle = \|v \times w\| \, \|u\| \cos(\theta).$$

Da geometria euclidiana clássica, $\|u\| |\cos(\theta)|$ é a altura do paralelepípedo que tem o paralelogramo definido por v e w como base e as outras arestas são paralelas a u e tem comprimentos iguais a $\|u\|$. O volume do paralelepípedo é a multiplicação da sua altura pela área de sua base

Produto Vetorial $\rightsquigarrow$ Cálculo de Volumes

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$. Segue então da definição de φ que

$$\langle u, v \times w \rangle = \|v \times w\| \, \|u\| \cos(\theta).$$

Da geometria euclidiana clássica, $\|u\| |\cos(\theta)|$ é a altura do paralelepípedo que tem o paralelogramo definido por v e w como base e as outras arestas são paralelas a u e tem comprimentos iguais a $\|u\|$. O volume do paralelepípedo é a multiplicação da sua altura pela área de sua base ($\|v \times w\|$).

Dados $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Dem.: Segue da definição de produto interno e de produto vetorial que

$$\langle u, v \times w \rangle = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

que é o desenvolvimento do det. da matriz dada pela primeira linha. $\square$

Se θ for o ângulo entre u e $v \times w$ medido em radianos, temos $\varphi(u, v \times w) = \cos(\theta)$. Segue então da definição de φ que

$$\langle u, v \times w \rangle = \|v \times w\| \, \|u\| \cos(\theta).$$

Da geometria euclidiana clássica, $\|u\| |\cos(\theta)|$ é a altura do paralelepípedo que tem o paralelogramo definido por v e w como base e as outras arestas são paralelas a u e tem comprimentos iguais a $\|u\|$. O volume do paralelepípedo é a multiplicação da sua altura pela área de sua base ($\|v \times w\|$). Ou seja, $|\langle u, v \times w \rangle|$ é este volume.