Geometria Analítica
Determinante

Adriano Moura

Unicamp

2021

Menores e Cofatores

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det.

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n.

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$.

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$ e, dados $1 \leq i, j \leq n$, considere a submatriz $S_{i,j}(A) \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ obtida de A removendo-se a linha i e a coluna j

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in\ M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$ e, dados $1 \leq i, j \leq n$, considere a submatriz $S_{i,j}(A) \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ obtida de A removendo-se a linha i e a coluna j:

$$S_{i,j}(A) \ = \ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$ e, dados $1 \leq i, j \leq n$, considere a submatriz $S_{i,j}(A) \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ obtida de A removendo-se a linha i e a coluna j:

$$S_{i,j}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A))$ já está definido.

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$ e, dados $1 \leq i, j \leq n$, considere a submatriz $S_{i,j}(A) \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ obtida de A removendo-se a linha i e a coluna j:

$$S_{i,j}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A))$ já está definido. Considere então

$$M_{i,j}(A) = \det(S_{i,j}(A)) \qquad \text{e} \qquad C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} M_{i,j}(A)$$

Menores e Cofatores

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, definiremos uma função $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ chamada de determinante e denotada por det. A definição será feita de maneira recursiva em n. Para $n = 1$, dada $A \in M_1(\mathbb{F})$, definimos $\det(A) = a_{1,1}$. Suponha $n > 1$ e, dados $1 \leq i, j \leq n$, considere a submatriz $S_{i,j}(A) \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ obtida de A removendo-se a linha i e a coluna j:

$$S_{i,j}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A))$ já está definido. Considere então

$$M_{i,j}(A) = \det(S_{i,j}(A)) \qquad \text{e} \qquad C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} M_{i,j}(A)$$

que são chamados, respectivamente, de o menor e o cofator de A associados à entrada (i, j).

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \; C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta.

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina

$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A)$$

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina
$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A) \qquad \text{e} \qquad \det^k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\ C_{i,k}(A).$$

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina

$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A) \qquad \text{e} \qquad \det^k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\ C_{i,k}(A).$$

Em particular, $\det(A) = \det_1(A)$.

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$
Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina
$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A) \qquad \text{e} \qquad \det^k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\ C_{i,k}(A).$$
Em particular, $\det(A) = \det_1(A)$.

Teorema

$\det_k(A) = \det(A) = \det^k(A)\ \forall\ A \in M_n(\mathbb{F}), 1 \leq k \leq n.$

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina
$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A) \qquad \text{e} \qquad \det^k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\ C_{i,k}(A).$$

Em particular, $\det(A) = \det_1(A)$.

Teorema

$\det_k(A) = \det(A) = \det^k(A)\ \forall\ A \in M_n(\mathbb{F}), 1 \leq k \leq n.$

A expressão para $\det_k(A)$ é chamada de o desenvolvimento de Laplace do determinante de A pela k-ésima linha

Definição Recursiva pela Primeira Linha

Finalmente, definimos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A).$$

Podemos definir vários outros números através de expressões semelhantes a esta. A saber, para cada $1 \leq k \leq n$, defina

$$\det_k(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\ C_{k,j}(A) \qquad \text{e} \qquad \det^k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\ C_{i,k}(A).$$

Em particular, $\det(A) = \det_1(A)$.

Teorema

$\det_k(A) = \det(A) = \det^k(A)\ \forall\ A \in M_n(\mathbb{F}), 1 \leq k \leq n.$

A expressão para $\det_k(A)$ é chamada de o desenvolvimento de Laplace do determinante de A pela k-ésima linha, enquanto $\det^k(A)$ é chamada de o desenvolvimento de Laplace do determinante de A pela k-ésima coluna.

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2}$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}),$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det{}_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det{}_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$

$$\det{}^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}),$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$

$$\det^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}), \quad \det^2(A) = a_{1,2}(-a_{2,1}) + a_{2,2}a_{1,1},$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$
$$\det^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}), \quad \det^2(A) = a_{1,2}(-a_{2,1}) + a_{2,2}a_{1,1},$$

verificando a validade do Teorema para $n = 2$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det{}_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det{}_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$
$$\det{}^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}), \quad \det{}^2(A) = a_{1,2}(-a_{2,1}) + a_{2,2}a_{1,1},$$

verificando a validade do Teorema para $n = 2$, além da famosa fórmula

$$(*) \qquad \det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$
$$\det^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}), \quad \det^2(A) = a_{1,2}(-a_{2,1}) + a_{2,2}a_{1,1},$$

verificando a validade do Teorema para $n = 2$, além da famosa fórmula

$$(*) \qquad \det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Observe também que, neste caso, $\det(A) = 0$ se, e somente se, uma das linhas de A é múltipla da outra

O caso 2×2

Para $n = 2$ (primeiro passo recursivo), temos, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$,

$$C_{1,1}(A) = a_{2,2}, \quad C_{1,2}(A) = -a_{2,1}, \quad C_{2,1}(A) = -a_{1,2}, \quad C_{2,2}(A) = a_{1,1}.$$

Logo,

$$\det_1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}(-a_{2,1}), \quad \det_2(A) = a_{2,1}(-a_{1,2}) + a_{2,2}a_{1,1}$$
$$\det^1(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,1}(-a_{1,2}), \quad \det^2(A) = a_{1,2}(-a_{2,1}) + a_{2,2}a_{1,1},$$

verificando a validade do Teorema para $n = 2$, além da famosa fórmula

$$(*) \qquad \det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Observe também que, neste caso, $\det(A) = 0$ se, e somente se, uma das linhas de A é múltipla da outra ou, equivalentemente(!), uma das colunas de A é múltipla da outra.

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada.

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$.

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

temos

$$C_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,2}(A) = - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

temos

$$C_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,2}(A) = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Logo, usando a definição e o caso $n = 2$, segue que

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \end{aligned}$$

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

temos

$$C_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,2}(A) = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Logo, usando a definição e o caso $n = 2$, segue que

$$\begin{aligned} \det(A) \;=\; & a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) \\ & + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) = \; a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ & + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \end{aligned}$$

Regara de Sarrus

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

temos

$$C_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,2}(A) = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Logo, usando a definição e o caso $n = 2$, segue que

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ &\quad + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}. \end{aligned}$$

A fórmula para $n = 3$ também é interessante de ser memorizada. Aproveitamos para introduzir outra notação para determinantes que pode ser mais conveniente dependendo da situação: $|A|$. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

temos

$$C_{1,1}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,2}(A) = -\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{1,3}(A) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Logo, usando a definição e o caso $n = 2$, segue que

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \\ &\quad + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}. \end{aligned}$$

Se $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right] \in M_3(\mathbb{Z})$, $\det(A) = 5 + 8 + 6 - 2 - 10 - 12 = -5$.

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Para $n = 2, 3$, isto segue dos exemplos anteriores, o que nos permite usar um argumento indutivo em n.

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Para $n = 2, 3$, isto segue dos exemplos anteriores, o que nos permite usar um argumento indutivo em n.

Por definição, $\det(A) = a_{1,1}\det(S_{1,1}(A))$. Como $S_{1,1}(A)$ é uma matriz triangular inferior $(n-1)\times(n-1)$

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Para $n = 2, 3$, isto segue dos exemplos anteriores, o que nos permite usar um argumento indutivo em n.

Por definição, $\det(A) = a_{1,1}\det(S_{1,1}(A))$. Como $S_{1,1}(A)$ é uma matriz triangular inferior $(n-1)\times(n-1)$, por hipótese de indução temos $\det(S_{1,1}(A)) = a_{2,2}a_{3,3}\cdots a_{n,n}$, completando a verificação da fórmula.

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Para $n = 2, 3$, isto segue dos exemplos anteriores, o que nos permite usar um argumento indutivo em n.

Por definição, $\det(A) = a_{1,1}\det(S_{1,1}(A))$. Como $S_{1,1}(A)$ é uma matriz triangular inferior $(n-1)\times(n-1)$, por hipótese de indução temos $\det(S_{1,1}(A)) = a_{2,2}a_{3,3}\cdots a_{n,n}$, completando a verificação da fórmula.

Argumento análogo mostra que $\det^n(A) = \det(A)$

Matrizes Triangulares Inferiores

Suponha que A seja uma matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

e vejamos que $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Para $n = 2, 3$, isto segue dos exemplos anteriores, o que nos permite usar um argumento indutivo em n.

Por definição, $\det(A) = a_{1,1}\det(S_{1,1}(A))$. Como $S_{1,1}(A)$ é uma matriz triangular inferior $(n-1)\times(n-1)$, por hipótese de indução temos $\det(S_{1,1}(A)) = a_{2,2}a_{3,3}\cdots a_{n,n}$, completando a verificação da fórmula.

Argumento análogo mostra que $\det^n(A) = \det(A)$ e, se A for triangular superior, então $\det_n(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} = \det^1(A)$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j.

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j e, portanto,

$$\det(A) = \det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A)) = 0.$$

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j e, portanto,

$$\det(A) = \det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A)) = 0.$$

$\det(I_n^{i,j}(\lambda)) =$

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j e, portanto,

$$\det(A) = \det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A)) = 0.$$

$$\det(I_n^{i,j}(\lambda)) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \\ & \end{cases}$$

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j e, portanto,

$$\det(A) = \det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A)) = 0.$$

$$\det(I_n^{i,j}(\lambda)) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j, \\ \lambda + 1, & \text{se } i = j, \end{cases}$$

Consequências do Teorema

Se A é triangular, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

Se $\det(A^t) = \det(A)$.

Se A possuir duas linhas idênticas, $\det(A) = 0$.
O mesmo vale para colunas.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$ sendo que o caso $n = 2$ é óbvio de $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e que $k \neq k'$ sejam tais que $L_k(A) = L_{k'}(A)$. Escolha $i \neq k, k'$ e note que $S_{i,j}(A)$ tem duas linhas idênticas para todo j. Logo, por hipótese de indução, $\det(S_{i,j}(A)) = 0$ para todo j e, portanto,

$$\det(A) = \det_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A)) = 0.$$

$$\det(I_n^{i,j}(\lambda)) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j, \\ \lambda + 1, & \text{se } i = j, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \det(I_n^{i,j}) = -1.$$

Cálculo de Determinantes via Escalonamento

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento

Cálculo de Determinantes via Escalonamento

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento, digamos, $B = EA$, sendo E a matriz que representa o passo

Cálculo de Determinantes via Escalonamento

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento, digamos, $B = EA$, sendo E a matriz que representa o passo, então $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento, digamos, $B = EA$, sendo E a matriz que representa o passo, então $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

Logo, se $E_1, \dots, E_m$ representam passos de escalonamento, temos

$$(**) \qquad \det(E_m \cdots E_2 E_1 A) = \det(A) \prod_{k=1}^{m} \det(E_k)$$

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento, digamos, $B = EA$, sendo E a matriz que representa o passo, então $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

Logo, se $E_1, \ldots, E_m$ representam passos de escalonamento, temos

$$(**) \qquad \det(E_m \cdots E_2 E_1 A) = \det(A) \prod_{k=1}^{m} \det(E_k)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - 2L_1 \to 2]{L_3 - L_2 \to 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 2L_1 \to 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Determinantes via Escalonamento

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ e B é obtida de A por uma operação de escalonamento, digamos, $B = EA$, sendo E a matriz que representa o passo, então $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

Logo, se $E_1, \ldots, E_m$ representam passos de escalonamento, temos

$$(**) \qquad \det(E_m \cdots E_2 E_1 A) = \det(A) \prod_{k=1}^{m} \det(E_k)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - 2L_1 \to 2]{L_3 - L_2 \to 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 2L_1 \to 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Logo, $\det(A) = -5$.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i, j) é o correspondente cofator de A.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i, j) é o correspondente cofator de A. Sua transposta é chamada de a adjunta clássica de A e é denotada por $\mathrm{Adj}(A)$.

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i, j) é o correspondente cofator de A. Sua transposta é chamada de a adjunta clássica de A e é denotada por $\mathrm{Adj}(A)$.

Teorema

$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A)\ I_n$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\operatorname{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i, j) é o correspondente cofator de A. Sua transposta é chamada de a adjunta clássica de A e é denotada por $\operatorname{Adj}(A)$.

Teorema

$A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \det(A)\ I_n = \operatorname{Adj}(A) \cdot A.$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i, j) é o correspondente cofator de A. Sua transposta é chamada de a adjunta clássica de A e é denotada por $\mathrm{Adj}(A)$.

Teorema

$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A)\ I_n = \mathrm{Adj}(A) \cdot A$. Logo, se $\exists\ \det(A)^{-1} \in \mathbb{F}$

Consequências

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e R é a forma escalonada reduzida de $A \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(R) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = I_n.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Teorema

Se $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Em particular, se A for invertível, temos $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A matriz cofatora de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $\mathrm{Cof}(A) \in M_n(\mathbb{F})$ cuja entrada (i,j) é o correspondente cofator de A. Sua transposta é chamada de a adjunta clássica de A e é denotada por $\mathrm{Adj}(A)$.

Teorema

$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A)\ I_n = \mathrm{Adj}(A) \cdot A$. Logo, se $\exists\ \det(A)^{-1} \in \mathbb{F}$, temos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{Adj}(A).$$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F})$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F})$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n,$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

(a) Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b):

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

- (a) Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
- (b) Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]$ e $Y = [y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$ e $Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$:

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$ e $Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A)$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

- (a) Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
- (b) Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$: $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \ C_{1,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) \ C_{1,j}(A)$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

- (a) Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
- (b) Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ e $Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$:
$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \ C_{1,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) \ C_{1,j}(A) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \ C_{1,j}(A) \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \ C_{1,j}(A) \right).\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema - Parte 1

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]$ e $Y = [y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \; C_{1,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) \; C_{1,j}(A)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \; C_{1,j}(A) \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \; C_{1,j}(A) \right).$$

Notando que $S_{1,j}(B) = S_{1,j}(A) = S_{1,j}(C) \; \forall \; j = 1, \ldots, n$

Lema

Sejam $A \in M_n(\mathbb{F}), X, Y \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n$, e $\lambda \in \mathbb{F}$.

a. Se $L_i(A) = \lambda X$, então $\det(A) = \lambda \det(B)$ sendo B a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X.
b. Se $L_i(A) = X + Y$, então $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ sendo B e C obtidas de A substituindo-se $L_i(A)$ por X e Y, respectivamente.

Dem. de (b): Note que, se $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$ e $Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$, temos $a_{i,j} = x_j + y_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Caso $i = 1$: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\ C_{1,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)\ C_{1,j}(A)$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\ C_{1,j}(A) \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\ C_{1,j}(A) \right).$$

Notando que $S_{1,j}(B) = S_{1,j}(A) = S_{1,j}(C)\ \forall\ j = 1, \ldots, n$, a conclusão desejada segue neste caso.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula $(*)$.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$.

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula $(*)$. Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Portanto, por hipótese de indução, se B_j e C_j são as matrizes obtidas de $S_{1,j}(A)$ substituindo-se a linha $i-1$ por X_j e Y_j, respectivamente

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Portanto, por hipótese de indução, se B_j e C_j são as matrizes obtidas de $S_{1,j}(A)$ substituindo-se a linha $i-1$ por X_j e Y_j, respectivamente, temos

$$M_{1,j}(A) = \det(S_{1,j}(A)) = \det(B_j) + \det(C_j).$$

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Portanto, por hipótese de indução, se B_j e C_j são as matrizes obtidas de $S_{1,j}(A)$ substituindo-se a linha $i-1$ por X_j e Y_j, respectivamente, temos

$$M_{1,j}(A) = \det(S_{1,j}(A)) = \det(B_j) + \det(C_j).$$

Portanto,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j} \left(\det(B_j) + \det(C_j)\right)$$

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Portanto, por hipótese de indução, se B_j e C_j são as matrizes obtidas de $S_{1,j}(A)$ substituindo-se a linha $i-1$ por X_j e Y_j, respectivamente, temos

$$M_{1,j}(A) = \det(S_{1,j}(A)) = \det(B_j) + \det(C_j).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j} \left(\det(B_j) + \det(C_j)\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j} \det(B_j)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j} \det(C_j)\right)
\end{aligned}$$

Caso $i > 1$: Em particular, $n \geq 2$. O argumento será por indução em n. A base de indução ($n = 2$) segue da fórmula ($*$). Suponha então que $n > 2$ e, por hip. de ind., que o lema vale para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Assim, podemos usar o lema para as submatrizes $S_{1,j}(A)$ que aparecem na definição de $\det(A)$. De fato, se X_j e Y_j forem as matrizes obtidas de X e Y removendo-se a coluna j, respectivamente, segue que

$$L_{i-1}(S_{1,j}(A)) = X_j + Y_j.$$

Portanto, por hipótese de indução, se B_j e C_j são as matrizes obtidas de $S_{1,j}(A)$ substituindo-se a linha $i-1$ por X_j e Y_j, respectivamente, temos

$$M_{1,j}(A) = \det(S_{1,j}(A)) = \det(B_j) + \det(C_j).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j}\left(\det(B_j) + \det(C_j)\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j}\det(B_j)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(-1)^{i+j}\det(C_j)\right)\end{aligned}$$

Finalmente, basta observar que $S_{1,j}(B) = B_j$ e $S_{1,j}(C) = C_j$. $\square$

Demonstração do Teorema - Parte 2

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Dados $m \in \mathbb{Z}_{>0}, X_k \in M_{1,n}(\mathbb{F}), \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \dots, m$ e $1 \leq i \leq n$, se

$$L_i(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k, \quad \text{então} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(A_k)$$

sendo A_k a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X_k.

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Dados $m \in \mathbb{Z}_{>0}, X_k \in M_{1,n}(\mathbb{F}), \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \ldots, m$ e $1 \leq i \leq n$, se
$$L_i(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k, \quad \text{então} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(A_k)$$
sendo A_k a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X_k.

Considere as matrizes-linha elementares $E_j^{(n)} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$.

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Dados $m \in \mathbb{Z}_{>0}, X_k \in M_{1,n}(\mathbb{F}), \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \ldots, m$ e $1 \leq i \leq n$, se
$$L_i(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k, \quad \text{então} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(A_k)$$
sendo A_k a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X_k.

Considere as matrizes-linha elementares $E_j^{(n)} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$. Assim, para todo $1 \leq i \leq n$, temos $L_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} L_i(A_{i,j})$ sendo $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$:

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{———} & L_1(A) & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & L_{i-1}(A) & \text{———} \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \text{———} & L_{i+1}(A) & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & L_n(A) & \text{———} \end{bmatrix}$$

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Dados $m \in \mathbb{Z}_{>0}, X_k \in M_{1,n}(\mathbb{F}), \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \ldots, m$ e $1 \leq i \leq n$, se
$$L_i(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k, \quad \text{então} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(A_k)$$
sendo A_k a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X_k.

Considere as matrizes-linha elementares $E_j^{(n)} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$. Assim, para todo $1 \leq i \leq n$, temos $L_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} L_i(A_{i,j})$ sendo $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$:

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{———} \ L_1(A) \ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} L_{i-1}(A) \text{———} \\ 0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0 \\ \text{———} L_{i+1}(A) \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \ L_n(A) \ \text{———} \end{bmatrix}$$

Segue que $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ \det(A_{i,j})$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demonstração do Teorema - Parte 2

- se A possuir alguma linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Dados $m \in \mathbb{Z}_{>0}, X_k \in M_{1,n}(\mathbb{F}), \lambda_k \in \mathbb{F}, k = 1, \ldots, m$ e $1 \leq i \leq n$, se
$$L_i(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k, \quad \text{então} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(A_k)$$
sendo A_k a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por X_k.

Considere as matrizes-linha elementares $E_j^{(n)} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$.
Assim, para todo $1 \leq i \leq n$, temos $L_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} L_i(A_{i,j})$ sendo $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$:

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} \text{———} & L_1(A) & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & L_{i-1}(A) & \text{———} \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \text{———} & L_{i+1}(A) & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & L_n(A) & \text{———} \end{bmatrix}$$

Segue que $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ \det(A_{i,j})$ para todo $1 \leq i \leq n$.

A igualdade dos desenvolvimentos de Laplace por linhas segue desta expressão juntamente com próximo lema.

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$.

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$.

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$.

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \\ \\ \\ \end{cases}$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_j^{(n-1)}, \text{se } k > j \\ \\ \end{cases}$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_j^{(n-1)}, \text{se } k > j \;\; \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ \end{cases}$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_j^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \end{cases}$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_j^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = 0. \end{cases}$$

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_{j}^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = 0. \end{cases}$$

Usando isto na definição de det, segue que $\det(A_{i,j})$ é igual a

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_{j}^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = 0. \end{cases}$$

Usando isto na definição de det, segue que $\det(A_{i,j})$ é igual a

$$\left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right)$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_{j}^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = 0. \end{cases}$$

Usando isto na definição de det, segue que $\det(A_{i,j})$ é igual a

$$\left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right)$$

Demonstração do Teorema - Parte 3

Lema

Dados $n \geq 2, A \in M_n(\mathbb{F})$ e $1 \leq i, j \leq n$, seja $A_{i,j}$ a matriz obtida de A substituindo-se $L_i(A)$ por $E_j^{(n)}$. Então, $\det(A_{i,j}) = C_{i,j}(A)$.

Dem.: Por indução em $n \geq 2$, sendo que o caso $n = 2$ segue de $(*)$. Além disso, se $i = 1$, a conclusão é imediata da definição de $\det(A_{1,j})$. Portanto, suponha que $n > 2, i \geq 2$ e, por hip. de ind., que o lema valha para matrizes $(n-1) \times (n-1)$. Observe que

$$L_{i-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = \begin{cases} E_{j-1}^{(n-1)}, \text{se } k < j \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ E_j^{(n-1)}, \text{se } k > j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) \\ 0, \qquad \text{se } k = j \ \Rightarrow \det(S_{1,k}(A_{i,j})) = 0. \end{cases}$$

Usando isto na definição de det, segue que $\det(A_{i,j})$ é igual a

$$\left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{1+k} C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j}))\right)$$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$)

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k.

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = (-1)^{i-1+j-1} \det(B_k), \quad \text{se} \quad k < j$$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$\begin{aligned} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j-1}\det(B_k), && \text{se} \quad k < j \quad \text{e} \\ C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j}\det(B_k), && \text{se} \quad k > j. \end{aligned}$$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$\begin{aligned} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j-1}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k<j \quad \text{e} \\ C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k>j. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, segue que

$$\det(A_{i,j}) = \left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k-1}\det(B_k)\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k}\det(B_k)\right).$$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$\begin{aligned} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j-1}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k < j \quad \text{e} \\ C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k > j. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, segue que

$$\det(A_{i,j}) = \left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k-1}\det(B_k)\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k}\det(B_k)\right).$$

Por outro lado, aplicando a definição de determinante à matriz $S_{i,j}(A)$:
$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A))$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) = (-1)^{i-1+j-1}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k < j \quad \text{e}$$
$$C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) = (-1)^{i-1+j}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k > j.$$

Substituindo na expressão acima, segue que

$$\det(A_{i,j}) = \left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k-1}\det(B_k)\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k}\det(B_k)\right).$$

Por outro lado, aplicando a definição de determinante à matriz $S_{i,j}(A)$:

$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A))$

$$= (-1)^{i+j}\left(\left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{1+k}M_{1,k}(S_{i,j}(A))\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{k}M_{1,k-1}(S_{i,j}(A))\right)\right)$$

Para cada $1 \leq k \leq n, k \neq j$, considere a matriz $B_k \in M_{n-2}(\mathbb{F})$ obtida de A (ou, equivalentemente, de $A_{i,j}$) removendo-se as linhas 1 e i assim como as colunas j e k. Então, por definição de cofator, temos

$$\begin{aligned} C_{i-1,j-1}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j-1}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k<j \quad \text{e} \\ C_{i-1,j}(S_{1,k}(A_{i,j})) &= (-1)^{i-1+j}\det(B_k), \quad \text{se} \quad k>j. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, segue que

$$\det(A_{i,j}) = \left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k-1}\det(B_k)\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k}\det(B_k)\right).$$

Por outro lado, aplicando a definição de determinante à matriz $S_{i,j}(A)$:

$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(S_{i,j}(A))$

$$= (-1)^{i+j}\left(\left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{1+k} M_{1,k}(S_{i,j}(A))\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{k} M_{1,k-1}(S_{i,j}(A))\right)\right)$$

$$= \left(\sum_{k<j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k+1}\det(B_k)\right) + \left(\sum_{k>j} a_{1,k}(-1)^{i+j+k}\det(B_k)\right). \quad \square$$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1}

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i, j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i, j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i}$$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$.

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$.

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\dots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$.

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$. Caso contrário, seja V'' a matriz obtida de $S_{1,1}(V')$ ao dividir a coluna j por $x_{j+1} - x_1$.

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$. Caso contrário, seja V'' a matriz obtida de $S_{1,1}(V')$ ao dividir a coluna j por $x_{j+1} - x_1$.

Segue que $|V| = |V''| \displaystyle\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$. Caso contrário, seja V'' a matriz obtida de $S_{1,1}(V')$ ao dividir a coluna j por $x_{j+1} - x_1$.

Segue que $|V| = |V''| \displaystyle\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)$ e $V'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_3^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$. Caso contrário, seja V'' a matriz obtida de $S_{1,1}(V')$ ao dividir a coluna j por $x_{j+1} - x_1$.

Segue que $|V| = |V''| \displaystyle\prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)$ e $V'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_3^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$

Procedendo por indução em n:

Determinante de Vandermonde

Dados $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, e uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$, considere a matriz V cuja entrada (i,j) é x_j^{i-1} e calculemos seu determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=n,n-1,\ldots,2]{L_i - x_1 L_{i-1} \to i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Assim $|V| = |S_{1,1}(V')|$. Veja que a coluna j de $S_{1,1}(V')$ é múltipla de $x_{j+1} - x_1$. Logo, se $x_i = x_1$ para algum $i > 1$, $|V| = 0$. Caso contrário, seja V'' a matriz obtida de $S_{1,1}(V')$ ao dividir a coluna j por $x_{j+1} - x_1$.

Segue que $|V| = |V''| \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)$ e $V'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_3^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$

Procedendo por indução em n:

$$|V| = \prod_{i>j}^{n} (x_i - x_j)$$