Geometria Analítica
Invertibilidade de Matrizes

Adriano Moura

Unicamp

2021

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1}

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \ M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. A é dita uma matriz diagonal se as entradas fora da diagonal forem nulas.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. A é dita uma matriz diagonal se as entradas fora da diagonal forem nulas.

Suporemos que o anel $\mathbb{F}$ satisfaça a seguinte propriedade:

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. A é dita uma matriz diagonal se as entradas fora da diagonal forem nulas.

Suporemos que o anel $\mathbb{F}$ satisfaça a seguinte propriedade:

(1) $$a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad ab \neq 0.$$

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \ M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. A é dita uma matriz diagonal se as entradas fora da diagonal forem nulas.

Suporemos que o anel $\mathbb{F}$ satisfaça a seguinte propriedade:

(1) $$a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad ab \neq 0.$$

Veja que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfazem esta propriedade.

Matrizes Invertíveis

Lembre que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dita invertível se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = I_n = BA$. Além disso, tal matriz B é única e chamada de a inversa de A. Notação: A^{-1} e $GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \ M_n(\mathbb{F}) : A \text{ é invertível}\}$.

Vimos também que, se $A_1, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{F})$, então

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Veremos agora que o processo de escalonamento pode ser usado para determinar se uma matriz é invertível e calcular a inversa neste caso.

A diagonal (principal) de uma matriz é a família $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. A é dita uma matriz diagonal se as entradas fora da diagonal forem nulas.

Suporemos que o anel $\mathbb{F}$ satisfaça a seguinte propriedade:

$$(1) \qquad a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad ab \neq 0.$$

Veja que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfazem esta propriedade. O anel de polinômios (em uma variável) $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ também satisfaz.

Forma Escalonada Reduzida

Relembrando:

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Forma Escalonada Reduzida

Relembrando:

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Diz-se que A tem forma escalonada reduzida se:

Forma Escalonada Reduzida

Relembrando:

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Diz-se que A tem forma escalonada reduzida se:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver);

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Forma Escalonada Reduzida

Relembrando:

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Diz-se que A tem forma escalonada reduzida se:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver);

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Duas matrizes são ditas equivalentes por linhas se uma é obtida da outra por sucessivas operações de escalonamento.

Forma Escalonada Reduzida

Relembrando:

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Diz-se que A tem forma escalonada reduzida se:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver);

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Duas matrizes são ditas equivalentes por linhas se uma é obtida da outra por sucessivas operações de escalonamento.

Teorema

Se $\mathbb{F}$ é corpo, toda matriz em $M_{m,n}(\mathbb{F})$ é equivalente por linhas a exatamente uma matriz escalonada reduzida.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!).

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

(a) Ou R possui linha nula ou R é diagonal.

(b) Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

(b) Um sistema linear associado a A é equivalente a $r_{i,i}x_i = b_i$ para algum $b_i \in \mathbb{F}$ e $r_{i,i}$ sendo pivô da linha i de R.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

(b) Um sistema linear associado a A é equivalente a $r_{i,i}x_i = b_i$ para algum $b_i \in \mathbb{F}$ e $r_{i,i}$ sendo pivô da linha i de R. Se $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são soluções do sistema

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

(a) Ou R possui linha nula ou R é diagonal.

(b) Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

(b) Um sistema linear associado a A é equivalente a $r_{i,i}x_i = b_i$ para algum $b_i \in \mathbb{F}$ e $r_{i,i}$ sendo pivô da linha i de R. Se $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são soluções do sistema, segue que $(a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n)$ é solução do sistema linear homogêneo associado.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

(b) Um sistema linear associado a A é equivalente a $r_{i,i}x_i = b_i$ para algum $b_i \in \mathbb{F}$ e $r_{i,i}$ sendo pivô da linha i de R. Se $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são soluções do sistema, segue que $(a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n)$ é solução do sistema linear homogêneo associado. Isto é, $r_{i,i}(a_i - a'_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Diagonal da Forma Reduzida e Unicidade de Solução

Proposição

Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é equivalente a uma matriz R que satisfaz (E1)–(E3):

a. Ou R possui linha nula ou R é diagonal.
b. Se R não possui linha nula, cada sistema linear tendo A como matriz principal possui no máximo uma solução.
   Além disso, existe solução se $\mathbb{F}$ é corpo.

Dem.: (a) Se alguma linha de R possuir pivô fora da diagonal principal, os pivôs de todas as linhas subsequentes estarão à direita da diagonal. Mas não existe posição à direita da diagonal na última linha (matriz quadrada!). Neste caso, a última linha de R deve ser nula.

(b) Um sistema linear associado a A é equivalente a $r_{i,i}x_i = b_i$ para algum $b_i \in \mathbb{F}$ e $r_{i,i}$ sendo pivô da linha i de R. Se $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são soluções do sistema, segue que $(a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n)$ é solução do sistema linear homogêneo associado. Isto é, $r_{i,i}(a_i - a'_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Segue da propriedade (1) que $a_i = a'_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível.
2. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

i. A é invertível.
ii. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
iii. A é equivalente por linhas a I_n.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível.
2. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
3. A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível.
2. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
3. A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_n X$

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

i. A é invertível.
ii. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
iii. A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_n X = BAX$

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

1. (i) A é invertível.
2. (ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
3. (iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior,

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_n X = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula.

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_n X = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_n X = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Existem matrizes $E_1, \ldots, E_k$ que representam operações elementares de escalonamento satisfazendo $E_k \cdots E_2E_1A = I_n$.

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) A é invertível.
- (ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
- (iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Existem matrizes $E_1, \ldots, E_k$ que representam operações elementares de escalonamento satisfazendo $E_k \cdots E_2E_1A = I_n$. Como cada E_j é invertível ($\mathbb{F}$ é corpo), segue que $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

Invertibilidade e Escalonamento

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) A é invertível.

(ii) Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.

(iii) A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Existem matrizes $E_1, \ldots, E_k$ que representam operações elementares de escalonamento satisfazendo $E_k \cdots E_2E_1A = I_n$. Como cada E_j é invertível ($\mathbb{F}$ é corpo), segue que $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Assim, A é produto de matrizes invertíveis

Proposição

Se $\mathbb{F}$ é corpo e $A \in M_n(\mathbb{F})$, as seguintes afirmações são equivalentes.

i. A é invertível.
ii. Existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ satisfazendo $BA = I_n$.
iii. A é equivalente por linhas a I_n.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): por definição.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vejamos que o sist. lin. homogêneo associado a A só possui a solução trivial. De fato, se $AX = 0$, então $X = I_nX = BAX = 0$. Pela proposição anterior, se R é a forma esc. reduzida de A, ou $R = I_n$, ou R possui linha nula. No segundo caso, existe variável livre e, portanto, mais soluções do sistema linear homogêneo associado a A. Logo, $R = I_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Existem matrizes $E_1, \ldots, E_k$ que representam operações elementares de escalonamento satisfazendo $E_k \cdots E_2E_1A = I_n$. Como cada E_j é invertível ($\mathbb{F}$ é corpo), segue que $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Assim, A é produto de matrizes invertíveis e, portanto, $A^{-1} = E_k \cdots E_1$. $\square$

Exemplo

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 - 2L_1 \to 2]{L_3 - L_2 \to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to 2]{L_3-L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to 2]{L_3-L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5L_2-2L_3\to 2]{2L_1-L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to 2]{L_3-L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5L_2-2L_3\to 2]{2L_1-L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2\to L_2]{5L_1+3L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 14 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to 2]{L_3-L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5L_2-2L_3\to 2]{2L_1-L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2\to L_2]{5L_1+3L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 14 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1/2\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1\to 2]{L_3-L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_2\to 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5L_2-2L_3\to 2]{2L_1-L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2\to L_2]{5L_1+3L_2\to 1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 14 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1/2\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$