Geometria Analítica
Sistemas Lineares

Adriano Moura

Unicamp

2021

Equações

Equações

O que é uma equação?

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "$=$" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável"

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

> Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

> Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

> Diz-se que $a \in A$ é solução da equação (f, b) se $f(a) = b$.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "$=$" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "$=$" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

> Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

> Diz-se que $a \in A$ é solução da equação (f, b) se $f(a) = b$. O conjunto solução de (f, b) é $\{a \in A : f(a) = b\}$

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

Diz-se que $a \in A$ é solução da equação (f, b) se $f(a) = b$. O conjunto solução de (f, b) é $\{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(\{b\})$.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

> Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

> Diz-se que $a \in A$ é solução da equação (f, b) se $f(a) = b$. O conjunto solução de (f, b) é $\{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(\{b\})$. Duas equações são ditas equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução.

Equações

O que é uma equação? O que é uma igualdade?

$2 \cdot 2 = 4$ é uma igualdade. Embora expressos de maneiras distintas, ambos os lados de "=" representam o mesmo elemento de $\mathbb{Z}$.

No conceito de equação, os elementos separados por "=" não são iguais e aparece, em pelo menos um dos lados, o conceito de "variável": $2x = 4$.

Para evitar definir "variável", daremos a seguinte definição de equação.

> Dados conjuntos A e B, uma equação (com domínio A e contradomínio B) é um elemento de $\mathcal{F}(A, B) \times B$.

Ou seja, definimos equação como sendo um par (f, b) sendo f uma função e b um elemento do contradomínio de f.

> Diz-se que $a \in A$ é solução da equação (f, b) se $f(a) = b$. O conjunto solução de (f, b) é $\{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(\{b\})$. Duas equações são ditas equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução.

Notação: $(f, b) \rightsquigarrow f = b$.

Exemplos

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4$$

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.

Já a equação $f = 4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.
Já a equação $f = 4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m.
Em outras palavras, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.
Já a equação $f = 4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m. Em outras palavras, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Considere a função $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x + y$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.
Já a equação $f = 4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m. Em outras palavras, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Considere a função $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x + y$. O conjunto solução da equação $f = 0$

Exemplos

Considere a função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dada por $f(x)=2x+1$. A equação $f=5$ tem 2 como solução pois $f(2)=5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m+1=5 \quad\Leftrightarrow\quad 2m=4 \quad\Leftrightarrow\quad m=2.$$

Observe que, se $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ for a função $g(x)=2x$, a equação $g=4$ é equivalente à equação $f=5$.

Já a equação $f=4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m. Em outras palavras, $f^{-1}(\{4\})=\emptyset$.

Considere a função $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dada por $f(x,y)=x+y$. O conjunto solução da equação $f=0$ é o conjunto

$$f^{-1}(\{0\})=\{(x,-x):x\in\mathbb{Z}\},$$

pois $x+y=0\Leftrightarrow y=-x$.

Exemplos

Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. A equação $f = 5$ tem 2 como solução pois $f(2) = 5$. De fato, esta é a única solução já que, para cada número inteiro m, temos

$$2m + 1 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Observe que, se $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ for a função $g(x) = 2x$, a equação $g = 4$ é equivalente à equação $f = 5$.
Já a equação $f = 4$ não tem solução pois $f(m)$ é ímpar para todo m. Em outras palavras, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Considere a função $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x + y$. O conjunto solução da equação $f = 0$ é o conjunto

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Z}\},$$

pois $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.
Verifique que o conjunto solução da equação $f = m$ é infinito para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B)

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$.

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$.

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\displaystyle\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\displaystyle\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a \in A$ resolve o sistema se $f_i(a) = b_i \ \forall\ i \in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\displaystyle\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f, g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y) = x + y$ e $g(x,y) = x + 2y$.

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y): y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a \in A$ resolve o sistema se $f_i(a) = b_i \ \forall\ i \in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f, g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y) = x + y$ e $g(x,y) = x + 2y$. O conjunto solução de $g = 3$ é

$$g^{-1}(\{3\}) = \{(3-2y, y) : y \in \mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f = 0$ e $g = 3$:

$$f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{3\})$$

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y): y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$:

$$f^{-1}(\{0\})\cap g^{-1}(\{3\})=\{(x,-x): x\in\mathbb{Z}\}\cap\{(3-2y,y): y\in\mathbb{Z}\}.$$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i \ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$:

$$f^{-1}(\{0\})\cap g^{-1}(\{3\})=\{(x,-x):x\in\mathbb{Z}\}\cap\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Um elemento (x,y) está nesta interseção se, e somente se

$y=-x \quad \text{e} \quad x=3-2y$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$:

$$f^{-1}(\{0\})\cap g^{-1}(\{3\})=\{(x,-x):x\in\mathbb{Z}\}\cap\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Um elemento (x,y) está nesta interseção se, e somente se

$$y=-x \quad \text{e} \quad x=3-2y \quad \Rightarrow \quad x=3-2(-x)$$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$:

$$f^{-1}(\{0\})\cap g^{-1}(\{3\})=\{(x,-x):x\in\mathbb{Z}\}\cap\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Um elemento (x,y) está nesta interseção se, e somente se

$$y=-x \quad \text{e} \quad x=3-2y \quad\Rightarrow\quad x=3-2(-x) \quad\Rightarrow\quad x=-3 \ \text{ e } \ y=3.$$

Sistemas de Equações

Um sistema de equações (com domínio A e contradomínio B) indexado por um conjunto I, é uma família $(f_i, b_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}(A,B)\times B$. Diz-se que $a\in A$ resolve o sistema se $f_i(a)=b_i\ \forall\ i\in I$. Assim, o conjunto de todas as soluções do sistema é $\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\{b_i\})$.

Dois sistemas são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conj. solução.

Considere as funções $f,g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ dadas por $f(x,y)=x+y$ e $g(x,y)=x+2y$. O conjunto solução de $g=3$ é

$$g^{-1}(\{3\})=\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Encontremos as soluções do sistema $f=0$ e $g=3$:

$$f^{-1}(\{0\})\cap g^{-1}(\{3\})=\{(x,-x):x\in\mathbb{Z}\}\cap\{(3-2y,y):y\in\mathbb{Z}\}.$$

Um elemento (x,y) está nesta interseção se, e somente se

$$y=-x \quad \text{e} \quad x=3-2y \quad \Rightarrow \quad x=3-2(-x) \quad \Rightarrow \quad x=-3 \ \text{ e } \ y=3.$$

Ou seja, o elemento $(-3,3)$ de $\mathbb{Z}^2$ é a única solução do sistema.

Equações Lineares

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall \ j.$$

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall \ j.$$

Evidentemente, esta equação é equivalente à equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_0. \tag{1}$$

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall \ j.$$

Evidentemente, esta equação é equivalente à equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_0. \tag{1}$$

Logo, sempre podemos supor que f é um polinômio homogêneo ($a_0 = 0$).

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall \ j.$$

Evidentemente, esta equação é equivalente à equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_0. \tag{1}$$

Logo, sempre podemos supor que f é um polinômio homogêneo ($a_0 = 0$).

Suponha que em (1) pelo menos um dos coeficientes $a_j, j = 1, \ldots, n$, possua inverso multiplicativo.

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall \ j.$$

Evidentemente, esta equação é equivalente à equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_0. \tag{1}$$

Logo, sempre podemos supor que f é um polinômio homogêneo ($a_0 = 0$).

Suponha que em (1) pelo menos um dos coeficientes $a_j, j = 1, \ldots, n$, possua inverso multiplicativo. Digamos que este elemento seja a_{j_0}.

Equações Lineares

Uma equação $f = b$ é dita linear se f for uma função polinomial de grau menor ou igual 1.

Supondo que o domínio de f seja $\mathbb{F}^n$, com $\mathbb{F}$ um anel comutativo, segue que $f = b$ pode ser escrita na forma

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{com} \quad a_j \in \mathbb{F} \ \forall\ j.$$

Evidentemente, esta equação é equivalente à equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_0. \tag{1}$$

Logo, sempre podemos supor que f é um polinômio homogêneo ($a_0 = 0$).

Suponha que em (1) pelo menos um dos coeficientes $a_j, j = 1, \ldots, n$, possua inverso multiplicativo. Digamos que este elemento seja a_{j_0}. Neste caso (1) é equivalente a

$$x_{j_0} = a_{j_0}^{-1}\left(b - \sum_{j \neq j_0} a_jx_j\right). \tag{2}$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = b' \end{cases}$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a_2''x_2 + \cdots + a_n''x_n = b'' \quad \text{com} \quad a_j'' = \left(a_j' - \frac{a_1'}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a_1'}{a_1}b\right).$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a''_2x_2 + \cdots + a''_nx_n = b'' \quad \text{com} \quad a''_j = \left(a'_j - \frac{a'_1}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a'_1}{a_1}b\right).$$

Esta última equação é exatamente o que se obtém ao se somar a segunda equação com a primeira multiplicada por $-\frac{a'_1}{a_1}$.

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a_2''x_2 + \cdots + a_n''x_n = b'' \quad \text{com} \quad a_j'' = \left(a_j' - \frac{a_1'}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a_1'}{a_1}b\right).$$

Esta última equação é exatamente o que se obtém ao se somar a segunda equação com a primeira multiplicada por $-\frac{a_1'}{a_1}$.
Será conveniente reinterpretar o sistema como uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1' & a_2' & \cdots & a_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix}$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a_2''x_2 + \cdots + a_n''x_n = b'' \quad \text{com} \quad a_j'' = \left(a_j' - \frac{a_1'}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a_1'}{a_1}b\right).$$

Esta última equação é exatamente o que se obtém ao se somar a segunda equação com a primeira multiplicada por $-\frac{a_1'}{a_1}$.
Será conveniente reinterpretar o sistema como uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1' & a_2' & \cdots & a_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad AX = B$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a_2''x_2 + \cdots + a_n''x_n = b'' \quad \text{com} \quad a_j'' = \left(a_j' - \frac{a_1'}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a_1'}{a_1}b\right).$$

Esta última equação é exatamente o que se obtém ao se somar a segunda equação com a primeira multiplicada por $-\frac{a_1'}{a_1}$.
Será conveniente reinterpretar o sistema como uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1' & a_2' & \cdots & a_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad AX = B \quad \rightsquigarrow \quad [A|B].$$

Isolamento e Substituição vs Combinação de Equações

Suponha que temos duas equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e que podemos isolar x_1 na primeira: $x_1 = a_1^{-1}\left(b - \sum_{j>1} a_jx_j\right)$.
Substituindo na segunda ela se torna:

$$a_2''x_2 + \cdots + a_n''x_n = b'' \quad \text{com} \quad a_j'' = \left(a_j' - \frac{a_1'}{a_1}a_j\right) \quad \text{e} \quad b'' = \left(b' - \frac{a_1'}{a_1}b\right).$$

Esta última equação é exatamente o que se obtém ao se somar a segunda equação com a primeira multiplicada por $-\frac{a_1'}{a_1}$.
Será conveniente reinterpretar o sistema como uma equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2'' & \cdots & a_n'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b'' \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{A}X = \tilde{B} \quad \rightsquigarrow \quad [\tilde{A}|\tilde{B}].$$

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas"

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas" e, portanto, expressas em termos das demais variáveis (se existirem)

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas" e, portanto, expressas em termos das demais variáveis (se existirem), que são então chamadas de variáveis livres.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas" e, portanto, expressas em termos das demais variáveis (se existirem), que são então chamadas de variáveis livres. Logo, o conjunto solução pode ser descrito em termos da última coluna e das variáveis livres.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas" e, portanto, expressas em termos das demais variáveis (se existirem), que são então chamadas de variáveis livres. Logo, o conjunto solução pode ser descrito em termos da última coluna e das variáveis livres. Em particular, se existir variável livre, a quantidade de soluções é pelo menos $\#\mathbb{F}$.

Escalonamento (Eliminação de Gauss-Jordan)

Dada $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a primeira entrada não nula de cada linha (não nula) de A é chamada de pivô daquela linha. Diz-se que A tem forma escalonada (ou escada) se suas entradas satisfizerem:

(E1) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das não nulas.

(E2) O pivô de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita daquela que contém o pivô da linha anterior (quando houver).

Se uma matriz estendida $M = [A|B]$ tiver forma escalonada, então o sistema tem solução só se nenhum dos pivôs ocorrer na última coluna.

Neste caso, se todos os pivôs possuírem inverso multiplicativo, todas as variáveis correspondentes aos pivôs podem ser "isoladas" e, portanto, expressas em termos das demais variáveis (se existirem), que são então chamadas de variáveis livres. Logo, o conjunto solução pode ser descrito em termos da última coluna e das variáveis livres. Em particular, se existir variável livre, a quantidade de soluções é pelo menos $\#\mathbb{F}$.

Exemplo: Estudemos o Exemplo 2.3.1.

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

Utilizaremos a seguinte notação para indicar qual operação de escalonamento foi realizada: $M \xrightarrow{\lambda L_i + \mu L_j \to i} M'$

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

Utilizaremos a seguinte notação para indicar qual operação de escalonamento foi realizada: $M \xrightarrow{\lambda L_i + \mu L_j \to i} M'$ e $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

Utilizaremos a seguinte notação para indicar qual operação de escalonamento foi realizada: $M \xrightarrow{\lambda L_i + \mu L_j \to i} M'$ e $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$

A primeira indica que $L_i(M') = \lambda L_i(M) + \mu L_j(M)$

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

Utilizaremos a seguinte notação para indicar qual operação de escalonamento foi realizada: $M \xrightarrow{\lambda L_i + \mu L_j \to i} M'$ e $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$

A primeira indica que $L_i(M') = \lambda L_i(M) + \mu L_j(M)$ e a segunda indica que M' é obtida de M invertendo-se as posições das linhas i e j.

As Operações Elementares do Escalonamento

1. Trocar uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha;
2. Inverter duas linhas de posição;
3. Substituir uma linha por um múltiplo não nulo dela mesma.

Diz-se que duas matrizes M e M' são equivalentes por linhas se uma pode ser obtida da outra por uma sucessão de tais operações.

Teorema 1

Se $\mathbb{F}$ é um corpo e $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, existe matriz com forma escalonada equivalente a M.

Utilizaremos a seguinte notação para indicar qual operação de escalonamento foi realizada: $M \xrightarrow{\lambda L_i + \mu L_j \to i} M'$ e $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$

A primeira indica que $L_i(M') = \lambda L_i(M) + \mu L_j(M)$ e a segunda indica que M' é obtida de M invertendo-se as posições das linhas i e j.

Exemplo: Estudemos o Exemplo 2.3.4.

Forma Escalonada Reduzida

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Diz-se que uma matriz tem forma escalona reduzida se, além de (E1) e (E2), satisfizer:

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Diz-se que uma matriz tem forma escalona reduzida se, além de (E1) e (E2), satisfizer:

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Diz-se que uma matriz tem forma escalona reduzida se, além de (E1) e (E2), satisfizer:

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Diz-se que uma matriz tem forma escalona reduzida se, além de (E1) e (E2), satisfizer:

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Teorema 2

Se $\mathbb{F}$ é corpo, toda matriz em $M_{m,n}(\mathbb{F})$ é equivalente por linhas a exatamente uma matriz escalonada reduzida.

Forma Escalonada Reduzida

Um sistema linear com matriz em forma escalonada ainda não está resolvido, restando fazer as substituições sucessivas das variáveis correspondentes aos pivôs.

Diz-se que uma matriz tem forma escalona reduzida se, além de (E1) e (E2), satisfizer:

(E3) Cada pivô é a única entrada não nula de sua coluna;

(E4) Todos os pivôs são iguais a 1.

Teorema 2

Se $\mathbb{F}$ é corpo, toda matriz em $M_{m,n}(\mathbb{F})$ é equivalente por linhas a exatamente uma matriz escalonada reduzida.

Exemplo: Estudemos o Exemplo 2.3.8.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i+\lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i+\lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda)M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=}$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\exists\ (1 + \lambda)^{-1}$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \le i, j \le m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\exists\ (1+\lambda)^{-1}$, $I_m^{i,i}((1+\lambda)^{-1})\ I_m^{i,i}(1+\lambda) = I_m$.

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\exists\ (1+\lambda)^{-1}$, $I_m^{i,i}((1+\lambda)^{-1})\ I_m^{i,i}(1+\lambda) = I_m$.

A demonstração do Teorema 1 descreve um algoritmo para escolher uma sequência de matrizes $E_1, \ldots, E_k$

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i,j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\exists\ (1+\lambda)^{-1}$, $I_m^{i,i}((1+\lambda)^{-1})\ I_m^{i,i}(1+\lambda) = I_m$.

A demonstração do Teorema 1 descreve um algoritmo para escolher uma sequência de matrizes $E_1, \ldots, E_k$, cada uma representando uma operação de escalonamento

Operações de Escalonamento via Multip. de Matrizes

Fixe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e, dados $1 \leq i, j \leq m$, denote por $E_{i,j} \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz cuja única entrada não nula está na posição (i, j) e é igual 1.

Seja também $I_m \in M_m(\mathbb{F})$ a matriz identidade.

Dada $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e considere a operação $M \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to i} M'$. Então

$$M' = I_m^{i,j}(\lambda) M \quad \text{com} \quad I_m^{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

Já a operação $M \xrightarrow{i \leftrightarrow j} M'$ é representada pela matriz

$$I_m^{i,j} = I_m + (E_{i,j} - E_{i,i}) + (E_{j,i} - E_{j,j}).$$

Observe que $(I_m^{i,j})^2 = I_m \overset{i \neq j}{=} I_m^{i,j}(-\lambda)\ I_m^{i,j}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\exists\ (1+\lambda)^{-1}$, $I_m^{i,i}((1+\lambda)^{-1})\ I_m^{i,i}(1+\lambda) = I_m$.

A demonstração do Teorema 1 descreve um algoritmo para escolher uma sequência de matrizes $E_1, \ldots, E_k$, cada uma representando uma operação de escalonamento, de modo que $E_k \cdots E_2 E_1 M$ seja matriz escalonada.

Demonstração do Teorema 1

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia:

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não.

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não.

Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não.

Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não.
Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$.

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$.

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$. Sejam também $j_1 \leq j_0$ a coluna onde está o pivô de $L_{i+1}(A)$

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$. Sejam também $j_1 \leq j_0$ a coluna onde está o pivô de $L_{i+1}(A)$ e $j_2 = \max\left(\{0\} \cup \{j : a_{i',j} \text{ é pivô com } i' \leq i, j \leq j_1\}\right)$.

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não.
Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$. Sejam também $j_1 \leq j_0$ a coluna onde está o pivô de $L_{i+1}(A)$ e $j_2 = \max\big(\{0\} \cup \{j : a_{i',j} \text{ é pivô com } i' \leq i, j \leq j_1\}\big)$. Seja tb. $i_2 \leq i$ a linha que possui pivô na coluna j_2 ($i_2 = 0$ se $j_2 = 0$).

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$. Sejam também $j_1 \leq j_0$ a coluna onde está o pivô de $L_{i+1}(A)$ e $j_2 = \max\left(\{0\} \cup \{j : a_{i',j} \text{ é pivô com } i' \leq i, j \leq j_1\}\right)$. Seja tb. $i_2 \leq i$ a linha que possui pivô na coluna j_2 ($i_2 = 0$ se $j_2 = 0$).

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix}$$

Demonstração do Teorema 1

Usemos a seguinte terminologia: Uma matriz A está escalonada até a linha i se $A' := \begin{bmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_i(A) \end{bmatrix}$ tiver forma escalonada, mas $\begin{bmatrix} A' \\ L_{i+1}(A) \end{bmatrix}$ não. Evidentemente, toda matriz está escalonada até a linha 1.

Precisamos de um método para escolher sequência operações de escalonamento, com produto representado pela matriz E, de modo que EA esteja escalonada até a linha $i+k$ com $k \geq 1$.

Se $L_i(A) = 0$, seja $j_0 = n$. Caso contrário, seja j_0 o índice da coluna onde se encontra o pivô de $L_i(A)$. Sejam também $j_1 \leq j_0$ a coluna onde está o pivô de $L_{i+1}(A)$ e $j_2 = \max\left(\{0\} \cup \{j : a_{i',j} \text{ é pivô com } i' \leq i, j \leq j_1\}\right)$. Seja tb. $i_2 \leq i$ a linha que possui pivô na coluna j_2 ($i_2 = 0$ se $j_2 = 0$).

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} & \\ & & a_{i+1,j_1} & & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$):

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$:

Demonstração do Teorema 1

$$
\begin{bmatrix}
a_{i_2,j_2} & & & \\
0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\
| & & a_{i+1,j_1} & |
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & & \\
\vdots & & \vdots & & \\
0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\
 & & a_{i+1,j_1} & &
\end{bmatrix}
$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & \\ \vdots & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix}$$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} & \\ a_{i_2,j_2} & \\ \vdots & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix}$$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.
Se $E'A$ estiver escalonada até, pelo menos, a linha $i+1$

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$. $\begin{bmatrix} & \\ a_{i_2,j_2} & \\ \vdots & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix}$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.
Se $E'A$ estiver escalonada até, pelo menos, a linha $i+1$, então $E = E'$.

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ \vert & & a_{i+1,j_1} & \vert \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.
$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & \\ \vdots & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & \vert \end{bmatrix}$$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.
Se $E'A$ estiver escalonada até, pelo menos, a linha $i+1$, então $E = E'$.
Este é o caso quando $j_1 = j_0$.

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i}\ I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} a_{i_2,j_2} & \\ \vdots & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix}$$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.
Se $E'A$ estiver escalonada até, pelo menos, a linha $i+1$, então $E = E'$.
Este é o caso quando $j_1 = j_0$.
Caso contrário, o novo j_1 está mais próximo de j_0.

Demonstração do Teorema 1

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i_2,j_2} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & a_{i,j_0} \\ | & & a_{i+1,j_1} & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & \cdots & a_{i,j_0} \\ & & a_{i+1,j_1} & & \end{bmatrix}$$

Note que $j_2 = j_1$ se $j_1 = j_0$.

1) Se $j_2 < j_1$ ($\Rightarrow i_2 < i$): $E = I_m^{i_2+1,i_2+2} \cdots I_m^{i-1,i} \; I_m^{i,i+1}$.

2) Se $j_2 = j_1$: $E' = I_m^{i+1,i_2}(\lambda)$ com $\lambda = -a_{i+1,j_1} a_{i_2,j_1}^{-1}$.
$$\begin{bmatrix} & & \\ a_{i_2,j_2} & & \\ \vdots & & a_{i,j_0} \\ a_{i+1,j_1} & & | \end{bmatrix}$$

Repita a análise com $E'A$ no lugar de A.
Se $E'A$ estiver escalonada até, pelo menos, a linha $i+1$, então $E = E'$.
Este é o caso quando $j_1 = j_0$.
Caso contrário, o novo j_1 está mais próximo de j_0.