Geometria Analítica
Conjuntos de "Números" - Operações
Matrizes

Adriano Moura

Unicamp

2021

Operações Binárias

O que são números?

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes “desenhos” como $0, 1, 2, \ldots$, que “representam” elementos específicos do “conjunto dos números inteiros” ($\mathbb{Z}$).

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$)

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes “desenhos” como $0, 1, 2, \ldots$, que “representam” elementos específicos do “conjunto dos números inteiros” ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros “conjuntos de números” como o dos “racionais” ($\mathbb{Q}$), “reais” ($\mathbb{R}$)

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Lembre, dados conjuntos A, B, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Lembre, dados conjuntos A, B, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Notação: $*(a, b)$

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Lembre, dados conjuntos A, B, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Notação: $*(a, b) \rightsquigarrow a * b$.

Operações Binárias

O que são números? Num primeiro momento, a palavra número traz às nossas mentes "desenhos" como $0, 1, 2, \ldots$, que "representam" elementos específicos do "conjunto dos números inteiros" ($\mathbb{Z}$).

Num segundo momento, passamos a pensar em outros "conjuntos de números" como o dos "racionais" ($\mathbb{Q}$), "reais" ($\mathbb{R}$), e "complexos" ($\mathbb{C}$).

Estes conjuntos tem em comum o fato de sabermos "operar" dois quaisquer de seus elementos de duas maneiras, a soma e a multiplicação, que são exemplos de "operações binárias".

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Lembre, dados conjuntos A, B, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Notação: $*(a, b) \rightsquigarrow a * b$. Escrevemos $1 + 2$ ao invés de $+(1, 2)$...

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais:

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais:
comutatividade

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall\ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall\ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos

$$e' = e * e'$$

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos

$$e' = e * e' = e.$$

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos
$$e' = e * e' = e.$$

- Diz-se que $*$ é associativa se $(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall \ a, b, c \in A$.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \;\forall\; a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \;\forall\; a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos
$$e' = e * e' = e.$$

- Diz-se que $*$ é associativa se $(a * b) * c = a * (b * c) \;\forall\; a, b, c \in A$.

A soma e multiplicação de polinômios (com coeficientes em $\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{C}$) também satisfazem estas propriedades.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall\ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall\ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos
$$e' = e * e' = e.$$

- Diz-se que $*$ é associativa se $(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall\ a, b, c \in A$.

A soma e multiplicação de polinômios (com coeficientes em $\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{C}$) também satisfazem estas propriedades. Assim, talvez possamos pensar que o conjunto dos polinômios também é um conjunto de números.

Possíveis Propriedades de Operações Binárias

Existem muitas (infinitas) operações binárias definíveis em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$.
A soma e a multiplicação, que nos fazem pensar nestes conjuntos como conjuntos de números, satisfazem propriedades especiais: comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro.

Suponha que $*$ seja uma operação binária num conjunto A.

- Diz-se que $*$ é comutativa se $a * b = b * a \ \forall \ a, b \in A$.
- Diz-se que $e \in A$ é neutro com respeito a $*$ se $a * e = a = e * a \ \forall \ a \in A$.

Note que existe no máximo um elemento neutro. De fato, se $e, e' \in A$ são ambos neutros, temos
$$e' = e * e' = e.$$

- Diz-se que $*$ é associativa se $(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall \ a, b, c \in A$.

A soma e multiplicação de polinômios (com coeficientes em $\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{C}$) também satisfazem estas propriedades. Assim, talvez possamos pensar que o conjunto dos polinômios também é um conjunto de números. (O que são números?)

Invertibilidade

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e$

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e$$

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b')$$

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b'$$

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b'$$

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma. Por outro lado, $1/3$ é o inverso de 3 com respeito à multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$).

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma. Por outro lado, $1/3$ é o inverso de 3 com respeito à multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$). Porém, 3 não tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma. Por outro lado, $1/3$ é o inverso de 3 com respeito à multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$). Porém, 3 não tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Note que todos os elementos de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem inversos aditivos.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma. Por outro lado, $1/3$ é o inverso de 3 com respeito à multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$). Porém, 3 não tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Note que todos os elementos de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem inversos aditivos. Em $\mathbb{Z}$, apenas 1 e -1 possuem inversos multiplicativos.

Invertibilidade

Suponha que $*$ seja operação binária em A que tem elemento neutro e.

- Diz-se que $a \in A$ é invertível com respeito a $*$ se existir $b \in A$ satisfazendo $a * b = e = b * a$. Neste caso b é dito inverso de a com respeito a $*$.

Note que, se $*$ for associativa, a possui no máximo um inverso. De fato, se $b, b' \in A$ forem inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

Em $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), -3 é o inverso de 3 com respeito à soma. Por outro lado, $1/3$ é o inverso de 3 com respeito à multiplicação em $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{R}$). Porém, 3 não tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

Note que todos os elementos de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem inversos aditivos. Em $\mathbb{Z}$, apenas 1 e -1 possuem inversos multiplicativos. Já em $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$, apenas 0 não possui inverso multiplicativo.

Grupos

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$.

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall\, a, b \in A.$$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall\ a, b \in A.$$

De fato, $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1})$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall \ a, b \in A.$$

De fato, $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1}$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall \ a, b \in A.$$

De fato, $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1}$

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \; \forall \, a, b \in A.$$

De fato, $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = e$.

Grupos

Um par $(A, *)$ é dito um grupo se $*$ for operação binária associativa em A que possui elemento neutro e todos os elementos de A forem invertíveis com respeito a $*$.
Se $*$ também for comutativa, diz-se que tal grupo é abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano.

Se $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, então $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Mas $(\mathbb{F}, \cdot)$ não é grupo, assim como $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Se $A = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $(A, \cdot)$ é grupo abeliano.

Suponha que $(A, *)$ seja um grupo e denote por a^{-1} o inverso de a com respeito a $*$. Note que

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall\ a, b \in A.$$

De fato, $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = e$.
Analogamente, vemos que $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$.

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;
4. $\cdot$ distribui sobre $+$.

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;
4. $\cdot$ distribui sobre $+$.

Se, além disso, $\cdot$ for comutativa, diz-se que o anel é comutativo.

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;
4. $\cdot$ distribui sobre $+$.

Se, além disso, $\cdot$ for comutativa, diz-se que o anel é comutativo.
Um anel comutativo é dito um corpo se

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;
4. $\cdot$ distribui sobre $+$.

Se, além disso, $\cdot$ for comutativa, diz-se que o anel é comutativo.
Um anel comutativo é dito um corpo se todos os elementos não nulos tiverem inverso multiplicativo.

Anéis e Corpos

O par de operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ satisfaz a seguinte propriedade, chamada de distributividade (da multiplicação sobre a soma):

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \forall \ a, b, c.$$

Uma terna $(A, +, \cdot)$, sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias em A, é dita um anel se:

1. $(A, +)$ é grupo abeliano (chame o neutro de 0);
2. $\cdot$ é associativa e possui neutro (chame-o de 1);
3. $1 \neq 0$;
4. $\cdot$ distribui sobre $+$.

Se, além disso, $\cdot$ for comutativa, diz-se que o anel é comutativo.
Um anel comutativo é dito um corpo se todos os elementos não nulos tiverem inverso multiplicativo.

O conjunto dos polinômios com sua soma e multiplicação usuais também formam um anel.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$).

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$):

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$):

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \; \forall \; a \in \mathbb{F}$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\, a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\, a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC$+$).

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC$+$).
- $-a = (-1)a \ \forall \ a \in \mathbb{F}$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a)$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0+0)a = 0a + 0a$ (LC$+$).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a)$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

  Se $a \neq 0, \exists \ a^{-1}$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0\ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0+0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a\ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

  Se $a \neq 0, \exists\ a^{-1} \Rightarrow 0 = 0a^{-1}$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall \ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
  Se $a \neq 0, \exists \ a^{-1} \Rightarrow 0 = 0a^{-1} = (ba)a^{-1}$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

  Se $a \neq 0, \exists\ a^{-1} \Rightarrow 0 = 0a^{-1} = (ba)a^{-1} = b(aa^{-1})$

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

  Se $a \neq 0, \exists\ a^{-1} \Rightarrow 0 = 0a^{-1} = (ba)a^{-1} = b(aa^{-1}) = b$.

Notação e Propriedades Adicionais em Anéis e Corpos

De agora em diante, $\mathbb{F}$ denotará um anel comutativo (suas operações são chamadas $+$ e $\cdot$). Usaremos a seguinte notação:

- $-a$ denota o inverso aditivo de a, enquanto a^{-1} o multiplicativo.
- $a^0 := 1$ se $a \neq 0$.
- $a^2 := a \cdot a$ e $a^{-2} := (a^{-1})^2$. Define-se a^m recursivamente, $m \in \mathbb{Z}$.
- $2a := a + a$ e define-se ma recursivamente para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $a - b := a + (-b)$ e $a/b := a \cdot b^{-1}$ se b^{-1} existir.

Algumas propriedades elementares:

- (Lei do Cancelamento para $+$): $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (some $-a$).
- (LC para $\cdot$): Se a tem inverso multiplicativo, então $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.
- $0 \cdot a = 0 \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ (LC+).
- $-a = (-1)a \ \forall\ a \in \mathbb{F}$: $a + ((-1)a) = (1a) + ((-1)a) = (1 + (-1))a = 0a$.
- Se $\mathbb{F}$ é corpo e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

  Se $a \neq 0, \exists\ a^{-1} \Rightarrow 0 = 0a^{-1} = (ba)a^{-1} = b(aa^{-1}) = b$.

  Embora $\mathbb{Z}$ não seja corpo, a propriedade é válida em $\mathbb{Z}$.

Anéis de Funções

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$.

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel.

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$.

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f,g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{F})$, precisamos definir $f+g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x)$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall\ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem! Estas operações possuem elementos neutros?

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \;\forall\; x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{F})$, precisamos definir $f+g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)\ \forall\ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x)$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x)$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x)$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall\, x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \ \ \forall\, x \in X.$$

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{F})$, precisamos definir $f+g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall\ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem!
Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \ \ \forall\ x \in X.$$

Logo, $\mathbf{0} + f = f \ \forall\ f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{F})$.

Anéis de Funções

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e um anel $\mathbb{F}$, considere o conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ das funções de X em $\mathbb{F}$. Vamos definir operações binárias ($+$ e $\cdot$) em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ de modo a que tenhamos construído um novo exemplo de anel. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, precisamos definir $f + g$ e $f \cdot g$. A definição é dada por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \ \forall \ x \in X \quad \text{para } * = + \text{ e para } * = \cdot.$$

Veja que essas operações em $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ são comutativas se as de $\mathbb{F}$ forem! Estas operações possuem elementos neutros?
Considere as funções $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ dadas por

$$\mathbf{0}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{1}(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

e note que

$$(\mathbf{0} + f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \ \ \forall \ x \in X.$$

Logo, $\mathbf{0} + f = f \ \forall \ f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$.

Exercício: Verifique que estas operações satisfazem todas as propriedades requeridas para termos um anel.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i, j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i, j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \dots, m\}$ e $J = \{1, 2, \dots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada. Notação: $M_{n,n}(\mathbb{F}) \rightsquigarrow M_n(\mathbb{F})$.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada. Notação: $M_{n,n}(\mathbb{F}) \rightsquigarrow M_n(\mathbb{F})$.

Como caso particular da construção da página anterior, temos definidas operações $+$ e $\cdot$ em $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada. Notação: $M_{n,n}(\mathbb{F}) \rightsquigarrow M_n(\mathbb{F})$.

Como caso particular da construção da página anterior, temos definidas operações $+$ e $\cdot$ em $M_{m,n}(\mathbb{F})$. Todavia, $\cdot$ encontra pouca aplicabilidade e não será usada.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i, j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada. Notação: $M_{n,n}(\mathbb{F}) \rightsquigarrow M_n(\mathbb{F})$.

Como caso particular da construção da página anterior, temos definidas operações $+$ e $\cdot$ em $M_{m,n}(\mathbb{F})$. Todavia, $\cdot$ encontra pouca aplicabilidade e não será usada. Por ora, sabemos que $(M_{m,n}(\mathbb{F}), +)$ é um grupo abeliano.

Matrizes

Dados conjuntos I e J, uma matriz de ordem $I \times J$ com entradas num anel $\mathbb{F}$, é uma função $A : I \times J \to \mathbb{F}$. Notação: $A(i,j) \rightsquigarrow a_{i,j}$ (entradas).

Estaremos trabalhando apenas no caso especial que $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, sendo $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neste caso, diz-se que a ordem é $m \times n$, o conjunto $\mathcal{F}(I \times J, \mathbb{F})$ é denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$ e é comum a representação de uma matriz por um desenho de tabela:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

Se $m = n$, diz-se que A é matriz quadrada. Notação: $M_{n,n}(\mathbb{F}) \rightsquigarrow M_n(\mathbb{F})$.

Como caso particular da construção da página anterior, temos definidas operações $+$ e $\cdot$ em $M_{m,n}(\mathbb{F})$. Todavia, $\cdot$ encontra pouca aplicabilidade e não será usada. Por ora, sabemos que $(M_{m,n}(\mathbb{F}), +)$ é um grupo abeliano.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j}$$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i,j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right] \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i,j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right] \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 16 \end{smallmatrix}\right]$

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes.

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

a. $(AB)C = A(BC)$ se AB e BC estão definidas;

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i,j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

a. $(AB)C = A(BC)$ se AB e BC estão definidas;
b. $A(B+C) = (AB) + (AC)$ se AB e AC estão definidas;

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

a. $(AB)C = A(BC)$ se AB e BC estão definidas;
b. $A(B + C) = (AB) + (AC)$ se AB e AC estão definidas;
c. $(A + B)C = (AC) + (BC)$ se AC e BC estão definidas;

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right] \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 16 \end{smallmatrix}\right]$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

a. $(AB)C = A(BC)$ se AB e BC estão definidas;
b. $A(B + C) = (AB) + (AC)$ se AB e AC estão definidas;
c. $(A + B)C = (AC) + (BC)$ se AC e BC estão definidas;
d. Com essas operações, $M_n(\mathbb{F})$ é um anel

Multiplicação de Matrizes

Existe outro conceito de multiplicação de matrizes cuja aplicabilidade é altamente relevante. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $AB \in M_{l,n}(\mathbb{F})$ é a matriz cuja entrada na posição (i, j) é dada por

$$a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\ b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\ b_{k,j}.$$

Se $l = m = n$, essa multiplicação é uma operação binária em $M_n(\mathbb{F})$.

Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ e considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, se $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $AC = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$, mas CA não está definida.

Exercício: Sejam A, B, C matrizes. Verifique que

a. $(AB)C = A(BC)$ se AB e BC estão definidas;
b. $A(B + C) = (AB) + (AC)$ se AB e AC estão definidas;
c. $(A + B)C = (AC) + (BC)$ se AC e BC estão definidas;
d. Com essas operações, $M_n(\mathbb{F})$ é um anel (não comutativo se $n > 1$).

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha.

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna.

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \text{ e } C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \text{ e } C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Assim, toda matriz pode ser vista com uma família de matrizes-linha ou de matrizes-coluna:

$$A = \begin{bmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_m(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{bmatrix}.$$

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \text{ e } C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Assim, toda matriz pode ser vista com uma família de matrizes-linha ou de matrizes-coluna:

$$A = \begin{bmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_m(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{bmatrix}.$$

Observe que se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, então $AC \in M_{l,1}(\mathbb{F})$.

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \;\text{ e }\; C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Assim, toda matriz pode ser vista com uma família de matrizes-linha ou de matrizes-coluna:

$$A = \begin{bmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_m(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{bmatrix}.$$

Observe que se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, então $AC \in M_{l,1}(\mathbb{F})$.
Se $L \in M_{1,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, então $LB \in M_{1,n}(\mathbb{F})$.

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \text{ e } C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Assim, toda matriz pode ser vista com uma família de matrizes-linha ou de matrizes-coluna:

$$A = \begin{bmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_m(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{bmatrix}.$$

Observe que se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, então $AC \in M_{l,1}(\mathbb{F})$.
Se $L \in M_{1,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, então $LB \in M_{1,n}(\mathbb{F})$.

Se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, temos:

$$L_i(AB) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} L_j(B) \quad \longleftrightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} L_1(A)B \\ L_2(A)B \\ \vdots \\ L_l(A)B \end{bmatrix}$$

Multiplicação como Combinação de Linhas ou Colunas

Se $A \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-linha. Analogamente, se $A \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, diz-se que A é uma matriz-coluna. Dados $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a i-ésima linha de A e a j-ésima coluna de A são:

$$L_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}) \text{ e } C_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Assim, toda matriz pode ser vista com uma família de matrizes-linha ou de matrizes-coluna:

$$A = \begin{bmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_m(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{bmatrix}.$$

Observe que se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{m,1}(\mathbb{F})$, então $AC \in M_{l,1}(\mathbb{F})$.
Se $L \in M_{1,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, então $LB \in M_{1,n}(\mathbb{F})$.

Se $A \in M_{l,m}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, temos:

$$L_i(AB) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} L_j(B) \quad \longleftrightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} L_1(A)B \\ L_2(A)B \\ \vdots \\ L_l(A)B \end{bmatrix}$$