Geometria Analítica
Equações Quadráticas em Duas e Três Variáveis
Identificação de Cônicas e Quádricas

Adriano Moura

Unicamp

2021

Teorema de Classificação

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$. Provaremos:

Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto solução de $(*)$

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$. Provaremos:

Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto solução de $(*)$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$. Provaremos:

Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto solução de $(*)$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Se $\Delta > 0$, C é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$. Provaremos:

Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto solução de $(*)$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Se $\Delta > 0$, C é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.
b. Se $\Delta < 0$, C é uma elipse, uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.

Teorema de Classificação

Faremos agora o estudo sistemático de equações polinomiais de grau 2, também chamadas de equações quadráticas, em duas variáveis:

$$(*) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Sendo 2 o grau do polinômio, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é não nulo. Já vimos que circunferências, elipses, hipérboles e parábolas podem ser o conjunto solução. Temos casos "degenerados":

A equação $x^2 + y^2 = 0$ tem a origem como única solução; a equação $xy = 0$ tem a união dos eixos coordenados como solução; a união das retas paralelas $x = \pm 1$ é o conjunto solução de $x^2 = 1$. Provaremos:

Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto solução de $(*)$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

- a. Se $\Delta > 0$, C é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.
- b. Se $\Delta < 0$, C é uma elipse, uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.
- c. Se $\Delta = 0$, C é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Equações Sem Termo Misto

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação.

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$:

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos.

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos. Suponha $a > 0$ (caso contrário, multiplique $(*)$ por -1).

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos. Suponha $a > 0$ (caso contrário, multiplique $(*)$ por -1). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - |c|\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos. Suponha $a > 0$ (caso contrário, multiplique $(*)$ por -1). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - |c|\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' \neq 0$, isto é a equação de uma hipérbole

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos. Suponha $a > 0$ (caso contrário, multiplique $(*)$ por -1). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - |c|\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' \neq 0$, isto é a equação de uma hipérbole, enquanto se $f' = 0$, o conjunto solução são as assíntotas da mesma hipérbole:

$$\sqrt{a}\left(x + \frac{d}{2a}\right) \pm \sqrt{|c|}\left(y + \frac{e}{2c}\right) = 0.$$

Equações Sem Termo Misto

Começaremos estudando o caso em que $b = 0$ e depois veremos que o caso geral pode ser deduzido deste aplicando-se uma rotação. Usaremos diversas vezes a técnica de completar quadrados, isto é, a igualdade

$$t^2 + st = \left(t + \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\Delta > 0$: Como $b = 0$, temos $ac < 0$, isto é, a e c são não nulos e têm sinais opostos. Suponha $a > 0$ (caso contrário, multiplique $(*)$ por -1). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - |c|\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' \neq 0$, isto é a equação de uma hipérbole, enquanto se $f' = 0$, o conjunto solução são as assíntotas da mesma hipérbole:

$$\sqrt{a}\left(x + \frac{d}{2a}\right) \pm \sqrt{|c|}\left(y + \frac{e}{2c}\right) = 0.$$

Obs: Completar quadrados é equivalente a mudar a origem do sistema de coordenadas.

Equações Sem Termo Misto

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$:

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg).

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$)

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$:

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=f' \quad \text{com} \quad f'=\frac{d^2}{4a}+\frac{e^2}{4c}-f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero.

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo).

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Se $e \neq 0$, temos uma parábola

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Se $e \neq 0$, temos uma parábola e se $e = 0$ temos três casos:

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Se $e \neq 0$, temos uma parábola e se $e = 0$ temos três casos: se $af' < 0$ não existe solução

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Se $e \neq 0$, temos uma parábola e se $e = 0$ temos três casos: se $af' < 0$ não existe solução, se $f' = 0$ o conjunto solução é a reta $2ax + d = 0$

Equações Sem Termo Misto

Caso $\Delta < 0$: Como $b = 0$, temos $ac > 0$, isto é, a e c são não nulos e têm o mesmo sinal (positivo spg). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = f' \quad \text{com} \quad f' = \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f.$$

Se $f' > 0$, isto é a equação de uma elipse (ou circunferência se $a = c$), se $f' = 0$ o ponto $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ é a única solução e se $f' < 0$ a equação não possui solução.

Caso $\Delta = 0$: Como $b = 0$, exatamente um entre a e c é diferente de zero. Suponha $a \neq 0$ (o outro caso é análogo). Completando quadrados $(*)$ se torna

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + ey = f' \qquad \text{com} \qquad f' = \frac{d^2}{4a} - f.$$

Se $e \neq 0$, temos uma parábola e se $e = 0$ temos três casos: se $af' < 0$ não existe solução, se $f' = 0$ o conjunto solução é a reta $2ax + d = 0$ e, se $af' > 0$, é a união das retas paralelas $2ax + (d \pm 2\sqrt{af'}) = 0$.

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$.

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$.

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

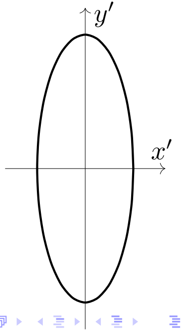
$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$



Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

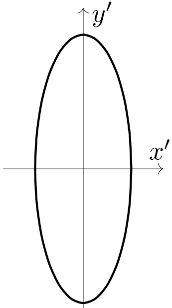
Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Assim, o diâmetro principal é $a = 3/2\sqrt{2}$



Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

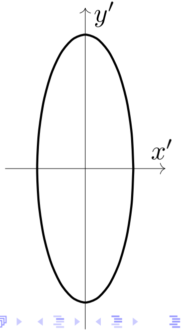
$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$



Assim, o diâmetro principal é $a = 3/2\sqrt{2}$ e o secundário é $b = 3/4 = a/\sqrt{2}$.

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

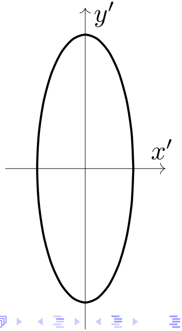
$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$



Assim, o diâmetro principal é $a = 3/2\sqrt{2}$ e o secundário é $b = 3/4 = a/\sqrt{2}$.

Logo, a distância focal é $c = \sqrt{a^2 - b^2} = b$

Equações Sem Termo Misto - Exemplo

Determinemos de qual tipo é o conjunto solução da equação

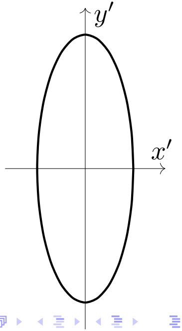
$$2x^2 + y^2 - x + 2y = 0.$$

Temos $b = 0$ e $\Delta = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 < 0$. Completando quadrados:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{8} + 1.$$

que é uma elipse com centro em $(1/4, -1)$. Considerando o sistema de coordenadas com origem neste ponto, isto é, fazendo $x' = x - 1/4$ e $y' = y + 1$, a equação acima se torna

$$\left(\frac{x'}{3/4}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3/2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$



Assim, o diâmetro principal é $a = 3/2\sqrt{2}$ e o secundário é $b = 3/4 = a/\sqrt{2}$.

Logo, a distância focal é $c = \sqrt{a^2 - b^2} = b$ e a excentricidade é $e = c/a = 1/2$.

Equações Com Termo Misto - Rotações

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados.

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$.

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y')

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

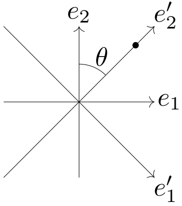
Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.

Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \iff \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.

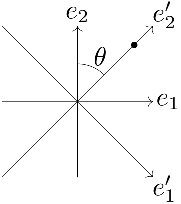


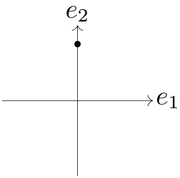
Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \iff \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.



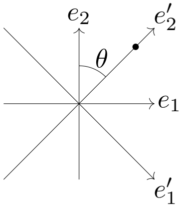


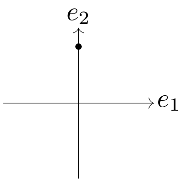
Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \Leftrightarrow \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.



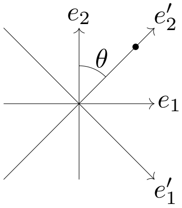


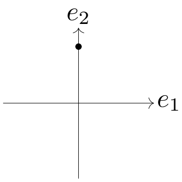
Assim, se $\mathrm{p} = (x, y)$

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e'_1 e e'_2 de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e'_1 + y'e'_2 \iff \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.





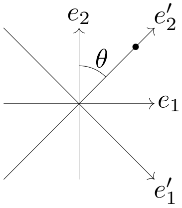
Assim, se $\mathrm{p} = (x, y)$, teremos

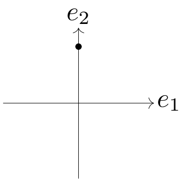
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \iff \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.





Assim, se $\mathrm{p} = (x, y)$, teremos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

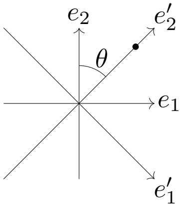
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

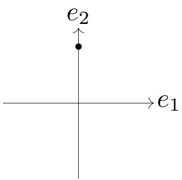
Equações Com Termo Misto - Rotações

O conjunto solução da equação $xy = 0$ é a união dos eixos coordenados. Considere a rotação por $\pi/4$ que levará a reta $x = 0$ na reta $y = x$ e a reta $y = 0$ na reta $y = -x$. Portanto, a imagem dos eixos coordenados por esta rotação é o conjunto solução da equação $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente, podemos considerar eixos coordenados rodados dando origem a um sistema de coordenadas (x', y') no qual os eixos coordenados originais são o conjunto solução de $x'^{\,2} - y'^{\,2} = 0$.

Queremos encontrar vetores unitários e ortogonais e_1' e e_2' de modo que, para todo $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'e_1' + y'e_2' \iff \mathrm{Rot}_\theta(\mathrm{p}) = (x', y')$.





Assim, se $\mathrm{p} = (x, y)$, teremos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Em particular, $e_1' = (\cos(\theta), -\mathrm{sen}(\theta))$ e $e_2' = (\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta))$.

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y'

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas.

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**)\qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\text{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\text{sen}(2\theta),$$

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**)\qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\text{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\text{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\,\text{sen}(\theta),$$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\mathrm{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\mathrm{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\,\mathrm{sen}(\theta),$$

$$c' = a\,\mathrm{sen}^2(\theta) + c\cos^2(\theta) + \frac{b}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta),$$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\ \text{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\text{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\ \text{sen}(\theta),$$

$$c' = a\ \text{sen}^2(\theta) + c\cos^2(\theta) + \frac{b}{2}\ \text{sen}(2\theta), \qquad e' = e\cos(\theta) + d\ \text{sen}(\theta),$$

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\text{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\text{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\,\text{sen}(\theta),$$

$$c' = a\,\text{sen}^2(\theta) + c\cos^2(\theta) + \frac{b}{2}\,\text{sen}(2\theta), \qquad e' = e\cos(\theta) + d\,\text{sen}(\theta),$$

e $b' = (a - c)\,\text{sen}(2\theta) + b\cos(2\theta)$.

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**)\qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\mathrm{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\mathrm{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\,\mathrm{sen}(\theta),$$

$$c' = a\,\mathrm{sen}^2(\theta) + c\cos^2(\theta) + \frac{b}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta), \qquad e' = e\cos(\theta) + d\,\mathrm{sen}(\theta),$$

e $b' = (a - c)\,\mathrm{sen}(2\theta) + b\cos(2\theta)$. Logo, $b' = 0$ se, e somente se,

Equações Com Termo Misto - Descobrindo a Rotação

Re-escrevendo $(*)$ em forma matricial

$$(**) \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

e substituindo a expressão para x e y em termos de x' e y', obtemos equação em x', y' com mesmo conjunto solução original, porém descrito em termos dessas novas coordenadas. Se $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} R_\theta \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

ou, equivalentemente: $a'x'^{\,2} + b'x'y' + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0$ com

$$a' = a\cos^2(\theta) + c\,\text{sen}^2(\theta) - \frac{b}{2}\text{sen}(2\theta), \qquad d' = d\cos(\theta) - e\,\text{sen}(\theta),$$

$$c' = a\,\text{sen}^2(\theta) + c\cos^2(\theta) + \frac{b}{2}\,\text{sen}(2\theta), \qquad e' = e\cos(\theta) + d\,\text{sen}(\theta),$$

e $b' = (a - c)\,\text{sen}(2\theta) + b\cos(2\theta)$. Logo, $b' = 0$ se, e somente se,

$$\theta = \frac{1}{2}\,\text{arccot}\left(\frac{c-a}{b}\right), \qquad \theta \in (0, \pi/2).$$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1.

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$.

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x' u_1 + y' u_2$.

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x' u_1 + y' u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'u_1 + y'u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x' u_1 + y' u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $(**)$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'u_1 + y'u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $(**)$ obtemos

$$(**') \qquad \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} M' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

com

$$M' = R^t\ M\ R \qquad \text{e} \qquad M = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'u_1 + y'u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $(**)$ obtemos

$$(**') \qquad \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} M' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

com

$$M' = R^t \; M \; R \qquad \text{e} \qquad M = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Queremos escolher u_1 e u_2 de modo que M' seja uma matriz diagonal

Outro Método para Eliminar o Termo Misto

Sejam $u_1 = (\alpha, \beta)$ um vetor unitário e $u_2 = (\gamma, \delta)$ um vetor unitário ortogonal a u_1. Considere a matriz $R = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right]$ e observe que $R^t R = I$. Ou seja, a condição de u_1 e u_2 serem unitários e ortogonais é equivalente a

$$R^{-1} = R^t.$$

Matrizes com esta propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

Dado $\mathrm{p} = (x, y)$, sejam $x', y' \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{0\mathrm{p}} = x'u_1 + y'u_2$. Segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $(**)$ obtemos

$$(**') \qquad \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} M' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0],$$

com

$$M' = R^t \ M \ R \qquad \text{e} \qquad M = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Queremos escolher u_1 e u_2 de modo que M' seja uma matriz diagonal, digamos $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$.

Para tais u_1, u_2

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$.

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1'$$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1'$$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1'$$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1'$$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$.

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'.

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula, ou, equivalentemente, $\det(M - \lambda I) = 0$.

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula, ou, equivalentemente, $\det(M - \lambda I) = 0$. Assim, temos um método para encontrar os autovalores

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula, ou, equivalentemente, $\det(M - \lambda I) = 0$. Assim, temos um método para encontrar os autovalores (a' e c')

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula, ou, equivalentemente, $\det(M - \lambda I) = 0$. Assim, temos um método para encontrar os autovalores (a' e c') e os correspondentes autovetores

Autovalores e Autovetores

Para tais u_1, u_2, note que, se $X_1' = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_1' = a'X_1'$. Além disso, se $X_1 = RX_1' = \left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]$, temos

$$MX_1 = MRX_1' = R(R^tMR)X_1' = RM'X_1' = aRX_1' = a'X_1.$$

Analogamente, se $X_2' = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, temos $M'X_2' = c'X_2'$ e, se $X_2 = RX_2' = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\\delta\end{smallmatrix}\right]$, temos $MX_2 = c'X_2$.

Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito um autovalor de M se existir vetor $u \neq 0$ tal que $MX = \lambda X$ com $X = \psi(u)$. Neste caso, u é dito um autovetor de M com autovalor λ.

Vimos acima que u_1 e u_2 são autovetores de M com autovalores a' e c'. Note que a relação $MX = \lambda X$ é equivalente a

$$(M - \lambda I)X = 0.$$

Ou seja, procuramos λ t.q. o sistema linear homogêneo associado a $M - \lambda I$ tenha solução não nula, ou, equivalentemente, $\det(M - \lambda I) = 0$. Assim, temos um método para encontrar os autovalores (a' e c') e os correspondentes autovetores (u_1 e u_2).

Polinômio Característico e Suas Raízes

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$.

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M.

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M.
Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$ que podemos calcular sem que tenhamos calculado θ!

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$ que podemos calcular sem que tenhamos calculado θ! Observe também que

$a' = c' \ \Leftrightarrow\ (a+c)^2 = 4(ac - b^2/4)$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$ que podemos calcular sem que tenhamos calculado θ! Observe também que

$a' = c' \;\Leftrightarrow\; (a+c)^2 = 4(ac - b^2/4) \;\Leftrightarrow\; (a-c)^2 + b^2 = 0$

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$ que podemos calcular sem que tenhamos calculado θ! Observe também que

$a' = c' \;\Leftrightarrow\; (a+c)^2 = 4(ac - b^2/4) \;\Leftrightarrow\; (a-c)^2 + b^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = c$ e $b = 0$.

Polinômio Característico e Suas Raízes

Considere as matrizes $M(t), M'(t) \in M_2(\mathbb{R}[t])$ definidas por

$$M(t) = tI - M \qquad \text{e} \qquad M'(t) = tI - M',$$

e observe que $\det(M'(t)) = \det(R^{-1}\ M(t)\ R) = \det(M(t))$. O polinômio $c_M(t) = \det(M(t)) \in \mathbb{R}[t]$ é chamado de o polinômio característico de M. Veja que

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{bmatrix}\right) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2/4).$$

Por outro lado, se $M' = \left[\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{smallmatrix}\right]$, temos

$$c_M(t) = c_{M'}(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-a' & 0 \\ 0 & t-c' \end{bmatrix}\right) = (t-a')(t-c').$$

Portanto, os números a' e c' são as raízes de $c_M(t)$ que podemos calcular sem que tenhamos calculado θ! Observe também que

$$a' = c' \ \Leftrightarrow\ (a+c)^2 = 4(ac - b^2/4) \ \Leftrightarrow\ (a-c)^2 + b^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a = c \text{ e } b = 0.$$

Logo, como estamos supondo que $b \neq 0$, as raízes de $c_M(t)$ são distintas.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle = a' X_1^t X_2$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle = a' X_1^t X_2 = (M X_1)^t X_2$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2)$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle = a' X_1^t X_2 = (M X_1)^t X_2 = X_1^t (M X_2) = c' X_1^t X_2$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t(MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a' \langle u_1, u_2 \rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c' \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t(MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Segue que $u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\,(2, 1)$ é autovetor associado a 4

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2 \rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Segue que $u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2,1)$ é autovetor associado a 4 enquanto para 9 podemos escolher $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1,-2)$.

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Segue que $u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1)$ é autovetor associado a 4 enquanto para 9 podemos escolher $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, -2)$. Dessa maneira, $(**')$ se torna

$4x'^2 + 9y'^2 + 3\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + f = 0$

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t (MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Segue que $u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1)$ é autovetor associado a 4 enquanto para 9 podemos escolher $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, -2)$. Dessa maneira, $(**')$ se torna $4x'^2 + 9y'^2 + 3\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + f = 0$ e, completando quadrados:

Autovetores Determinam as Direções dos Novos Eixos

Observe que, se $X_j = \psi(u_j), j = 1, 2$, como antes, temos $\langle u_1, u_2\rangle = X_1^t X_2$. Além disso, $M^t = M$. Assim,

$$a'\langle u_1, u_2\rangle = a' X_1^t X_2 = (MX_1)^t X_2 = X_1^t(MX_2) = c' X_1^t X_2 = c'\langle u_1, u_2\rangle.$$

Portanto, como $a' \neq c'$, segue que $u_1 \perp u_2$, como queríamos.

Identifiquemos o conj. solução de $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 5y + f = 0$.

$$c_M(t) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 2 \\ 2 & t-8 \end{bmatrix}\right) = (t-5)(t-8) - 4 = (t-4)(t-9).$$

Segue que $u_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1)$ é autovetor associado a 4 enquanto para 9 podemos escolher $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, -2)$. Dessa maneira, $(**')$ se torna

$4x'^2 + 9y'^2 + 3\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + f = 0$ e, completando quadrados:

$$4\left(x' + \frac{3\sqrt{5}}{8}\right)^2 + 9\left(y' + \frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 = \frac{45}{32} + \frac{20}{9} - f.$$

Três Variáveis

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo.

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3.

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações.

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações. No caso de $(\star)$ temos

$$X^tMX + TX + [j] = 0 \quad \text{com} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}.$$

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações. No caso de $(\star)$ temos

$$X^t MX + TX + [j] = 0 \quad \text{com} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}.$$

A existência de u_1, u_2, u_3 é equivalente à de uma matriz R cujas colunas são formadas por suas coordenadas

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações. No caso de $(\star)$ temos

$$X^t M X + TX + [j] = 0 \quad \text{com} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}.$$

A existência de u_1, u_2, u_3 é equivalente à de uma matriz R cujas colunas são formadas por suas coordenadas de modo que, fazendo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações. No caso de $(\star)$ temos

$$X^tMX + TX + [j] = 0 \quad \text{com} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}.$$

A existência de u_1, u_2, u_3 é equivalente à de uma matriz R cujas colunas são formadas por suas coordenadas de modo que, fazendo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e substituindo em $(\star)$

Três Variáveis

Passamos agora a estudar conjuntos soluções de uma equação do tipo

$$(\star) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo que pelo menos um dos números a, b, c, d, e, f é não nulo. Veremos que o conjunto solução coincide com o de uma equação da forma

$$(\star') \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0,$$

sendo que x', y', z' são coordenadas calculadas utilizando-se vetores unitários e mutuamente ortogonais u_1, u_2, u_3. Como antes, consideramos as versões matriciais de tais equações. No caso de $(\star)$ temos

$$X^t M X + TX + [j] = 0 \quad \text{com} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}.$$

A existência de u_1, u_2, u_3 é equivalente à de uma matriz R cujas colunas são formadas por suas coordenadas de modo que, fazendo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e substituindo em $(\star)$, obtemos $(\star')$.

Autovetores Diagonalizam

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$.

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes.

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}$$

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t - a')(t - b')(t - c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M.

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M. Se λ é um autovalor de M

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M. Se λ é um autovalor de M, um vetor não nulo $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que $M(\lambda)\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right] = 0$

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M. Se λ é um autovalor de M, um vetor não nulo $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que $M(\lambda)\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right] = 0$ é dito um autovetor de M associado ao autovalor λ.

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t-a')(t-b')(t-c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M. Se λ é um autovalor de M, um vetor não nulo $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que $M(\lambda)\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right] = 0$ é dito um autovetor de M associado ao autovalor λ.

Observe que, se u_1, u_2, u_3 forem autovetores (unitários e mutuamente ortogonais)

Autovetores Diagonalizam

Como antes, u_1, u_2, u_3 serem unitários e mutuamente ortogonais é equivalente a R ser ortogonal, isto é, $R^{-1} = R^t$. Portanto, obter uma equação na forma $(\star')$ utilizando a mudança de variável $X \leftrightarrow X'$ é equivalente a encontrar R ortogonal tal que $M' := R^t M R$ seja diagonal.

Considere as matrizes $M(t)$ e $M'(t)$ e defina o polinômio característico como antes. Se encontrarmos R de modo que M' seja diagonal, digamos

$$M' = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad c_M(t) = (t - a')(t - b')(t - c').$$

Logo, para que tal R exista, é necessário que as raízes de $c_M(t)$ sejam todas reais, que são então chamadas de autovalores de M. Se λ é um autovalor de M, um vetor não nulo $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que $M(\lambda)\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right] = 0$ é dito um autovetor de M associado ao autovalor λ.

Observe que, se u_1, u_2, u_3 forem autovetores (unitários e mutuamente ortogonais), então M' é diagonal com as raízes de $c_M(t)$ na diagonal.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a) Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.
b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.

b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal, S é um hiperboloide ou um cone elíptico.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.
b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal, S é um hiperboloide ou um cone elíptico.
c. Se apenas um entre a', b', c' for zero

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.
b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal, S é um hiperboloide ou um cone elíptico.
c. Se apenas um entre a', b', c' for zero, S é um paraboloide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou hiperbólico, a união de dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.
b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal, S é um hiperboloide ou um cone elíptico.
c. Se apenas um entre a', b', c' for zero, S é um paraboloide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou hiperbólico, a união de dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.
d. Se apenas um entre a', b', c' for não nulo

Teorema Espectral e Teorema de Classificação

Teorema Espectral

Para toda matriz simétrica M, as raízes de $c_M(t)$ são reais e existem autovetores unitários u_1, u_2, u_3 que são mutuamente ortogonais.

Obs.: Se $M \neq 0$, ao menos uma raiz é não nula.

Teorema de Classificação

Sejam a', b', c' as raízes de $c_M(t)$ e S o conjunto solução de $(\star)$.

a. Se a', b', c' forem não nulos e com mesmo sinal, S é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.
b. Se a', b', c' forem não nulos e não tiverem todos o mesmo sinal, S é um hiperboloide ou um cone elíptico.
c. Se apenas um entre a', b', c' for zero, S é um paraboloide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou hiperbólico, a união de dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.
d. Se apenas um entre a', b', c' for não nulo, então S é um cilindro parabólico ou a união de dois planos paralelos (ou coincidentes).

Exemplo

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\; y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\,((t-1)(t-4) - 4)$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4)-4\right) = (t+5)(t^2-5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4)-4\right) = (t+5)(t^2-5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\, y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

A seguir, note que e_3 é autovetor com autovalor -5.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

A seguir, note que e_3 é autovetor com autovalor -5. Portanto, podemos tomar $u_3 = (0, 0, 1)$.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4)-4\right) = (t+5)(t^2-5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

A seguir, note que e_3 é autovetor com autovalor -5. Portanto, podemos tomar $u_3 = (0, 0, 1)$. Finalmente, u_2 é vetor diretor para a reta que é o conjunto solução de $M(5)X = 0$.

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

A seguir, note que e_3 é autovetor com autovalor -5. Portanto, podemos tomar $u_3 = (0, 0, 1)$. Finalmente, u_2 é vetor diretor para a reta que é o conjunto solução de $M(5)X = 0$. Porém, como $u_i \perp u_j, i \neq j$

Exemplo

Estudemos o conjunto solução de $x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4xy - \sqrt{5}\ y = 1/5$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad M(t) = \begin{bmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & t+5 \end{bmatrix} \quad \text{e, portanto,}$$

$c_M(t) = (t+5)\left((t-1)(t-4) - 4\right) = (t+5)(t^2 - 5t) = t(t-5)(t+5)$, cujas raízes são $a' = 0, b' = 5, c' = -5$. O vetor u_1, com esta escolha de ordem das raízes, é um vetor unitário na direção da reta que é o conjunto solução de $MX = 0$. Resolvendo o sistema, vemos que podemos tomar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (2, -1, 0).$$

A seguir, note que e_3 é autovetor com autovalor -5. Portanto, podemos tomar $u_3 = (0, 0, 1)$. Finalmente, u_2 é vetor diretor para a reta que é o conjunto solução de $M(5)X = 0$. Porém, como $u_i \perp u_j, i \neq j$, podemos escolher

$$u_2 = u_3 \times u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ (1, 2, 0).$$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(R representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + T R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que $R^t M R = M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que $R^t M R = M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e

calculamos $TR = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que $R^t M R = M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e calculamos $TR = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ para ver que $(\star')$ se torna

$$5{y'}^2 - 5{z'}^2 + x' - 2y' = \frac{1}{5}.$$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que $R^t M R = M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e calculamos $TR = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ para ver que $(\star')$ se torna

$$5{y'}^2 - 5{z'}^2 + x' - 2y' = \frac{1}{5}.$$

Completando quadrados, esta última equação é equivalente a

$$x' = 5{z'}^2 - 5(y' - 1/5)^2.$$

Exemplo

Portanto, $R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($R$ representa a rotação $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ com $\theta = -\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$.)

Assim, fazendo a mudança de coordenadas, vemos que $(\star')$ é

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} R^t M R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} + TR \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

com $T = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que $R^t M R = M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e calculamos $TR = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ para ver que $(\star')$ se torna

$$5y'^2 - 5z'^2 + x' - 2y' = \frac{1}{5}.$$

Completando quadrados, esta última equação é equivalente a

$$x' = 5z'^2 - 5(y' - 1/5)^2.$$

Logo, S é um paraboloide hiperbólico!