Geometria Analítica
Movimentos Rígidos (Rotações e Translações), Coordenadas Cilíndricas e Esféricas e Parametrizações de Superfícies

Adriano Moura

Unicamp

2021

Rotações No Plano

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$.
Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha+\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)\ )\,.$$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função.

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha+\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha+\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ).$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$.

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ).$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$.

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ).$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta) \\ 2\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha + \theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta) \\ 2\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Veja que $\mathrm{Rot}_\theta(R) = R(\mathrm{p}, v)$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha+\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)\ ).$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta) \\ 2\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Veja que $\mathrm{Rot}_\theta(R) = R(\mathrm{p}, v)$, sendo $v = \mathrm{Rot}_\theta(2, 1)$

Rotações No Plano

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor da origem no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, em coordenadas polares, por $(r, \alpha) \mapsto (r, \alpha + \theta)$. Em coord. cartesianas, $(x, y) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha))$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta(x, y) = (\ r\cos(\alpha+\theta),\ r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)\ )\,.$$

Será interessante usar a representação matricial desta função. Considere:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M_{2,1}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, pontos de $\mathbb{R}^2$ ficam identificados com matrizes 2×1 e, usando as fórmulas para o cosseno e o seno da soma de ângulos, temos:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta(x, y)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Estudemos a imagem por Rot_θ da reta R dada por $x - 2y = 2$. Em equações paramétricas R é dada por $x = 2t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta) \\ 2\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Veja que $\mathrm{Rot}_\theta(R) = R(\mathrm{p}, v)$, sendo $v = \mathrm{Rot}_\theta(2, 1)$ e $\mathrm{p} = \mathrm{Rot}_\theta(0, -1)$.

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y).

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$.

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$. Em coordenadas cartesianas

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$. Em coordenadas cartesianas, se $(x, y, z) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha), z)$

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$. Em coordenadas cartesianas, se $(x, y, z) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha), z)$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}(x, y, z) = (\ r\cos(\alpha + \theta)\ ,\ r\ \mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ,\ z\ ).$$

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$. Em coordenadas cartesianas, se $(x, y, z) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha), z)$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}(x, y, z) = (\ r\cos(\alpha + \theta)\ ,\ r\ \mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ,\ z\ ).$$

Considerando $\psi : \mathbb{R}^3 \to M_{3,1}(\mathbb{R}),\ (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Coordenas Cilíndricas e Rotações No Espaço

Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado por suas coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares de (x, y). O motivo do nome vem do fato que o conjunto solução da equação $r = r_0$ ser o cilindro

$$\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, R) = r_0\}$$

com R sendo o eixo-z.

A rotação de $\theta \in \mathbb{R}$ ao redor do eixo-z no sentido anti-horário é a função $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $(r, \alpha, z) \mapsto (r, \alpha + \theta, z)$. Em coordenadas cartesianas, se $(x, y, z) = (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha), z)$, isso é equivalente a

$$\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}(x, y, z) = (\ r\cos(\alpha + \theta)\ ,\ r\ \mathrm{sen}(\alpha + \theta)\ ,\ z\ ).$$

Considerando $\psi : \mathbb{R}^3 \to M_{3,1}(\mathbb{R})$, $(x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, temos a representação matricial:

$$\psi\left(\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}(x, y, z)\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2.$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ e $w = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$, temos

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, temos

$$\langle v, w\rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, temos

$$\langle v, w \rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α da mesma maneira que fazíamos usando as coordenadas cartesianas originais (com respeito a $\{e_1, e_2, e_3\}$).

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, temos

$$\langle v, w\rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α da mesma maneira que fazíamos usando as coordenadas cartesianas originais (com respeito a $\{e_1, e_2, e_3\}$).

Dado $\mathrm{o} \in P$, considere $E_j = R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3,$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, temos

$$\langle v, w\rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α da mesma maneira que fazíamos usando as coordenadas cartesianas originais (com respeito a $\{e_1, e_2, e_3\}$).

Dado $\mathrm{o} \in P$, considere $E_j = R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, como sendo o "ponto de partida" de um sistema de coordenadas ortogonais

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ e $w = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, temos

$$\langle v, w\rangle = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α da mesma maneira que fazíamos usando as coordenadas cartesianas originais (com respeito a $\{e_1, e_2, e_3\}$).

Dado $\mathrm{o} \in P$, considere $E_j = R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, como sendo o "ponto de partida" de um sistema de coordenadas ortogonais: Um ponto $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$ passa a ser representado pela terna $(\mathrm{x})_\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ determinada por

$$(*) \qquad \overrightarrow{\mathrm{ox}} = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3.$$

Mudança de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escolher um conjunto diretor $\{u_1, u_2\}$ de modo que $u_1 \perp u_2$ e $\|u_j\| = 1, j = 1, 2$. Considere então $u_3 = u_1 \times u_2$.

Exercício: Mostre que, para cada $v \in \mathbb{R}^3$, existem únicos escalares a_1, a_2, a_3 tai que $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ (chamados de as coordenadas de v com respeito a $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$).

Observe que, se $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ e $w = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$, temos

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Podemos, então, medir comprimentos e ângulos utilizando coordenadas com respeito a α da mesma maneira que fazíamos usando as coordenadas cartesianas originais (com respeito a $\{e_1, e_2, e_3\}$).

Dado $\mathrm{o} \in P$, considere $E_j = R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, como sendo o "ponto de partida" de um sistema de coordenadas ortogonais: Um ponto $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$ passa a ser representado pela terna $(\mathrm{x})_\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ determinada por

$$(*) \qquad \overrightarrow{\mathrm{ox}} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3.$$

Ou seja, com respeito as estas novas coordenadas, tudo funciona como se o fosse a origem e E_j fossem os eixos coordenados.

Movimentos Rígidos

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $o \in R$

Movimentos Rígidos

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $o \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$.

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, a translação por v

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, a translação por v é a função

$$T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad T_v(\mathrm{x}) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)$$

se $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Movimentos Rígidos

Como definir “rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado”?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, a translação por v é a função

$$T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad T_v(\mathrm{x}) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)$$

se $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ou seja, $T_v(\mathrm{x})$ é o ponto y que satisfaz $\overrightarrow{\mathrm{xy}} = v$.

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, a translação por v é a função

$$T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad T_v(\mathrm{x}) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)$$

se $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ou seja, $T_v(\mathrm{x})$ é o ponto y que satisfaz $\overrightarrow{\mathrm{xy}} = v$.

Um movimento rígido é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida por composição de rotações e translações.

Como definir "rotação de um ângulo θ ao redor de uma reta R no sentido de um vetor diretor dado"?

Escolha $\mathrm{o} \in R$ e vetores unitários e ortogonais u_1, u_2 tais que $R = R(\mathrm{o}, u)$ com $u = u_1 \times u_2$. Defina Rot_θ^u assim como definimos $\mathrm{Rot}_\theta^{e_3}$ utilizando as coordenadas determinadas pelos eixos $R(\mathrm{o}, u_j), j = 1, 2, 3$, com $u_3 = u$.

Exercício: Mostre que a definição não depende das escolhas feitas e que $\mathrm{Rot}_\theta^{-u} = \mathrm{Rot}_{-\theta}^u$.

Dado um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, a translação por v é a função

$$T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \quad T_v(\mathrm{x}) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \ldots, x_n + v_n)$$

se $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ou seja, $T_v(\mathrm{x})$ é o ponto y que satisfaz $\overrightarrow{\mathrm{xy}} = v$.

Um movimento rígido é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida por composição de rotações e translações.

Exercício: Mostre que movimentos rígidos preservam distâncias e ângulos.

Exemplo de Rotação

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido).

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0, 1, 0) \in R$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0, 1, 0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ é vetor diretor unitário para R.

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y-2x-1=z=0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o}=(0,1,0)\in R$ e que $u=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1=e_3 \quad \text{e} \quad u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u=u_1\times u_2.$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que o $= (0, 1, 0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\text{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x, y, z)$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0, 1, 0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α)

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o,β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0,\alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o,α).

Para $\mathrm{p} = (x,y,z)$, chamemos de (x',y',z') suas coordenadas no sistema (o,α) e de (x'',y'',z'') suas coordenadas no sistema (o,β).

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y-2x-1=z=0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o}=(0,1,0)\in R$ e que $u=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1=e_3 \quad \text{e} \quad u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u=u_1\times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o,β) com $\beta=u_1,u_2,u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0,\alpha)$, com $\alpha=e_1,e_2,e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o,α).

Para $\mathrm{p}=(x,y,z)$, chamemos de (x',y',z') suas coordenadas no sistema (o,α) e de (x'',y'',z'') suas coordenadas no sistema (o,β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}}=(x',y',z')$.

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que o $= (0, 1, 0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para p $= (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x'$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o,β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0,\alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o,α).

Para $\mathrm{p} = (x,y,z)$, chamemos de (x',y',z') suas coordenadas no sistema (o,α) e de (x'',y'',z'') suas coordenadas no sistema (o,β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x',y',z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\text{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o,β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0,\alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o,α).

Para $\text{p} = (x,y,z)$, chamemos de (x',y',z') suas coordenadas no sistema (o,α) e de (x'',y'',z'') suas coordenadas no sistema (o,β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\text{op}} = (x',y',z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\text{o}} + \overrightarrow{\text{op}} = \overrightarrow{0\text{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1, \quad z = z'.$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0, 1, 0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1, \quad z = z'.$$

Por outro lado, $(*)$ também nos diz que

$$\overrightarrow{\mathrm{op}} = x'' u_1 + y'' u_2 + z'' u,$$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que o $= (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0,\alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para p $= (x,y,z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1, \quad z = z'.$$

Por outro lado, $(*)$ também nos diz que

$$\overrightarrow{\mathrm{op}} = x''u_1 + y''u_2 + z''u,$$

de onde segue que $x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y'' + z'')$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que o $= (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para p $= (x, y, z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1, \quad z = z'.$$

Por outro lado, $(*)$ também nos diz que

$$\overrightarrow{\mathrm{op}} = x'' u_1 + y'' u_2 + z'' u,$$

de onde segue que $x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y'' + z''), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2z'' - y'')$

Exemplo de Rotação

Vamos deduzir fórmula para a rotação ao redor da reta R dada por $y - 2x - 1 = z = 0$ (em algum sentido). Note que $\mathrm{o} = (0,1,0) \in R$ e que $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$ é vetor diretor unitário para R. Além disso,

$$\text{se} \quad u_1 = e_3 \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0), \quad \text{temos} \quad u = u_1 \times u_2.$$

Usemos o sistema de coordenadas (o, β) com $\beta = u_1, u_2, u$.

Para descrever as relações entre as coordenadas determinadas por $(0, \alpha)$, com $\alpha = e_1, e_2, e_3$, consideremos também o sistema intermediário (o, α).

Para $\mathrm{p} = (x,y,z)$, chamemos de (x', y', z') suas coordenadas no sistema (o, α) e de (x'', y'', z'') suas coordenadas no sistema (o, β). Usando $(*)$, temos $\overrightarrow{\mathrm{op}} = (x', y', z')$. Assim, como $\overrightarrow{0\mathrm{o}} + \overrightarrow{\mathrm{op}} = \overrightarrow{0\mathrm{p}}$, segue que

$$x = x', \quad y = y' + 1, \quad z = z'.$$

Por outro lado, $(*)$ também nos diz que

$$\overrightarrow{\mathrm{op}} = x'' u_1 + y'' u_2 + z'' u,$$

de onde segue que $x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y'' + z''), \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2z'' - y''), \quad z' = x''.$

Assim, chegamos a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Assim, chegamos a

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix},$$

Assim, chegamos a

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix},$$

ou ainda: $x'' = z, \quad y'' = \dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}, \quad z'' = \dfrac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}}.$

Assim, chegamos a

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix},$$

ou ainda: $x'' = z, \quad y'' = \dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}, \quad z'' = \dfrac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}}.$

Como $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''\cos(\theta) - y''\text{sen}(\theta) \\ x''\text{sen}(\theta) + y''\cos(\theta) \\ z'' \end{bmatrix},$

Assim, chegamos a

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix},$$

ou ainda: $x'' = z, \quad y'' = \dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}, \quad z'' = \dfrac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}}.$

Como $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \cos(\theta) - y''\mathrm{sen}(\theta) \\ x''\mathrm{sen}(\theta) + y'' \cos(\theta) \\ z'' \end{bmatrix},$

segue da definição de Rot_θ^u

Assim, chegamos a

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é equivalente a

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{bmatrix},$$

ou ainda: $x'' = z, \quad y'' = \dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}, \quad z'' = \dfrac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}}.$

Como $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \cos(\theta) - y''\text{sen}(\theta) \\ x''\text{sen}(\theta) + y'' \cos(\theta) \\ z'' \end{bmatrix},$

segue da definição de Rot_θ^u que as coordenadas de $\text{Rot}_\theta^u(\text{p})$ no sistema (o, β) são

$$x''_\theta = x'' \cos(\theta) - y''\text{sen}(\theta), \quad y''_\theta = x''\text{sen}(\theta) + y'' \cos(\theta), \quad z''_\theta = z''.$$

Usando (2), isso é o mesmo que

$$x''_\theta = z\cos(\theta) - \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}(\theta), \quad y''_\theta = z\operatorname{sen}(\theta) + \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\cos(\theta),$$

$$z''_\theta = \frac{x+2y-2}{\sqrt{5}}.$$

Usando (2), isso é o mesmo que

$$x''_\theta = z\cos(\theta) - \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}(\theta), \quad y''_\theta = z\operatorname{sen}(\theta) + \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\cos(\theta),$$

$$z''_\theta = \frac{x+2y-2}{\sqrt{5}}.$$

Chamando de $(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$ as coordenadas de $\mathrm{Rot}^u_\theta(\mathrm{p})$ no sistema $(0, \alpha)$

Usando (2), isso é o mesmo que

$$x''_\theta = z\cos(\theta) - \left(\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}(\theta), \quad y''_\theta = z\operatorname{sen}(\theta) + \left(\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}\right)\cos(\theta),$$

$$z''_\theta = \frac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}}.$$

Chamando de $(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$ as coordenadas de $\mathrm{Rot}^u_\theta(\mathrm{p})$ no sistema $(0, \alpha)$, (1) nos diz que

$$x_\theta = \frac{2y''_\theta + z''_\theta}{\sqrt{5}}, \quad y_\theta = \frac{2z''_\theta - y''_\theta}{\sqrt{5}} + 1, \quad z_\theta = x''_\theta,$$

Usando (2), isso é o mesmo que

$$x''_\theta = z\cos(\theta) - \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}(\theta), \quad y''_\theta = z\operatorname{sen}(\theta) + \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\cos(\theta),$$

$$z''_\theta = \frac{x+2y-2}{\sqrt{5}}.$$

Chamando de $(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$ as coordenadas de $\mathrm{Rot}_\theta^u(\mathrm{p})$ no sistema $(0, \alpha)$, (1) nos diz que

$$x_\theta = \frac{2y''_\theta + z''_\theta}{\sqrt{5}}, \quad y_\theta = \frac{2z''_\theta - y''_\theta}{\sqrt{5}} + 1, \quad z_\theta = x''_\theta,$$

e, portanto,

$$x_\theta = \frac{(4\cos(\theta)+1)x + 2(1-\cos(\theta))y + 2\sqrt{5}\operatorname{sen}(\theta)z - 2(1-\cos(\theta))}{5},$$

$$y_\theta = \frac{2(1-\cos(\theta))x + (4+\cos(\theta))y - \sqrt{5}\operatorname{sen}(\theta)z - (4+\cos(\theta))}{5} + 1,$$

$$z_\theta = z\cos(\theta) - \left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sen}(\theta).$$

Coordenadas Esféricas

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p})$$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3)$$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

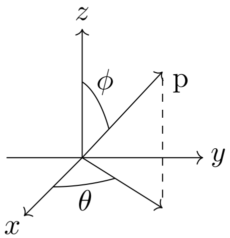
com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.

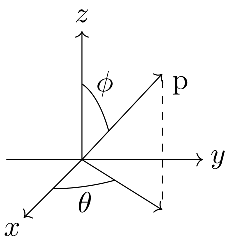


Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



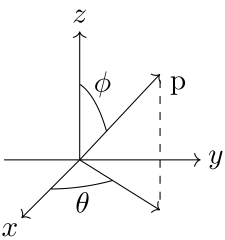
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



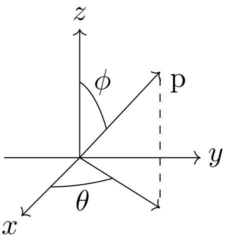
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas.

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



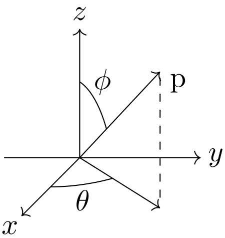
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



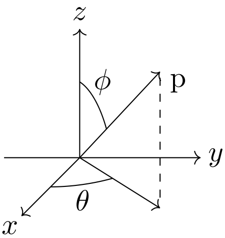
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$.

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



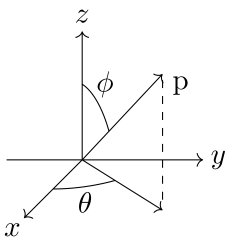
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



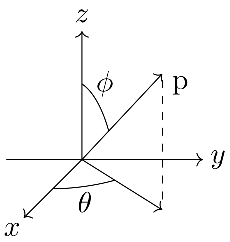
Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \mathrm{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

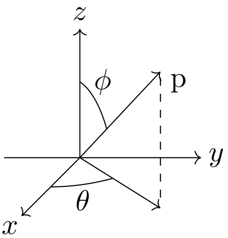
se $\mathrm{p} \neq 0$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \mathrm{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

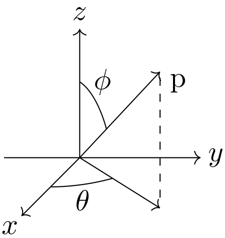
se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \mathrm{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

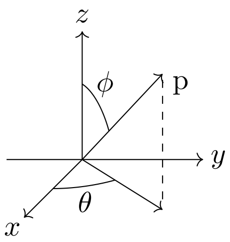
se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ \operatorname{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

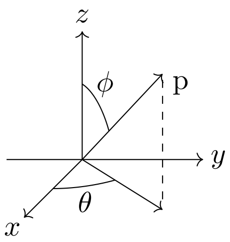
se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \mathrm{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

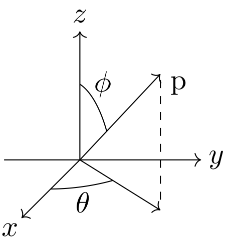
Já as coordenadas cartesianas do ponto com coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) são:

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \operatorname{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

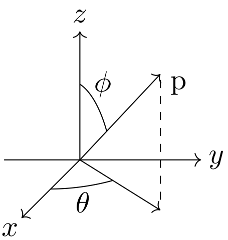
Já as coordenadas cartesianas do ponto com coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) são: $x = r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \operatorname{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

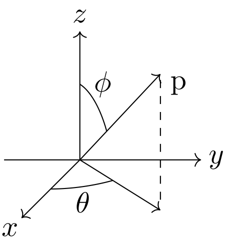
Já as coordenadas cartesianas do ponto com coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) são: $x = r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)$, $y = r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta)$

Coordenadas Esféricas

Dado $\mathrm{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fora do eixo-z, defina

$$r(\mathrm{p}) = d(0, \mathrm{p}), \quad \phi(\mathrm{p}) = \theta(\overrightarrow{0\mathrm{p}}, e_3) \quad \text{e} \quad \theta(\mathrm{p}) = \varepsilon(\mathrm{p})\ \theta(\mathrm{Pr}_P(\overrightarrow{0\mathrm{p}}), e_1),$$

com P sendo o plano-xy e $\varepsilon(\mathrm{p})$ definido como para coordenadas polares.



Assim, tais pontos ficam determinados por por uma terna $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$, chamada de suas coordenadas esféricas. A origem é representada pelas ternas $(0, \phi, \theta)$ com qualquer escolha de ϕ e θ e os demais pontos do eixo-z ficam representados por ternas do tipo $(r(\mathrm{p}), \phi(\mathrm{p}), \theta)$. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \operatorname{sen}(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

se $\mathrm{p} \neq 0$, e, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Já as coordenadas cartesianas do ponto com coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) são: $x = r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)$, $y = r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta)$ e $z = r \cos(\phi)$.

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi)\, ,\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)\, , \cos(\phi)).$$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\,\cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi)\,,\ \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

$$\alpha(s,t) = (a \cos(t) \operatorname{sen}(s), b \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(s), c \cos(s)), \quad s \in [0, \pi],\ t \in [0, 2\pi].$$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

$$\alpha(s, t) = (a\cos(t)\,\mathrm{sen}(s), b\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s), c\cos(s)), \quad s \in [0, \pi],\ t \in [0, 2\pi].$$

O sólido por ele limitado pode ser parametrizado por

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

$\alpha(s,t) = (a\cos(t)\,\mathrm{sen}(s), b\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s), c\cos(s)), \quad s \in [0,\pi],\ t \in [0, 2\pi].$

O sólido por ele limitado pode ser parametrizado por

$$\beta(r,s,t) = (ar\cos(t)\,\mathrm{sen}(s), br\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s), cr\cos(s)),$$

$r \in [0,1],\ s \in [0,\pi],\ t \in [0,2\pi].$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

$$\alpha(s,t) = (a\cos(t)\,\mathrm{sen}(s), b\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s), c\cos(s)), \quad s \in [0, \pi],\ t \in [0, 2\pi].$$

O sólido por ele limitado pode ser parametrizado por

$$\beta(r,s,t) = (ar\cos(t)\,\mathrm{sen}(s), br\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s), cr\cos(s)),$$

$r \in [0,1],\ s \in [0, \pi],\ t \in [0, 2\pi]$.

O hiperboloide de uma folha dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Parametrizando Quádricas Usando Dois Ângulos

Considere a função $\gamma : [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\,,\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)\,,\ \cos(\phi)).$$

A imagem de γ é o conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : d(\mathrm{x}, 0) = 1\}$, ou seja, a esfera de raio 1 centrada na origem.

O elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por

$\alpha(s,t) = (a\cos(t)\operatorname{sen}(s), b\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s), c\cos(s)), \quad s \in [0,\pi],\ t \in [0, 2\pi].$

O sólido por ele limitado pode ser parametrizado por

$$\beta(r,s,t) = (ar\cos(t)\operatorname{sen}(s), br\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s), cr\cos(s)),$$

$r \in [0,1],\ s \in [0,\pi],\ t \in [0,2\pi]$.

O hiperboloide de uma folha dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ pode ser parametrizado por $\alpha(s,t) = (a\sec(s)\cos(t), b\sec(s)\operatorname{sen}(t), c\tan(s))$, $s \in [-\pi/2, \pi/2],\ t \in [0, 2\pi]$.