Exame de Qualificação – Inferência Avançada
Doutorado em Estatística
Fevereiro de 2014

Instruções:

1. A prova de Inferência Avançada é composta de 3 questões que devem ser respondidas de forma clara e completa.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

4. Valores das questões: 1) 3,0   2) 3,0   3) 4,0.

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com densidade de Lebesgue comum dada por

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\, I_{(\theta,\infty)}(x),$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Considere $X = (X_1, \ldots, X_n)$ e defina as estatísticas

$$T(X) = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1},$$

onde $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

   (a) Mostre que $T(X)$ e $V(X)$ são independentes.

   (b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ.

2. Seja $X \sim N(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, e considere a estimação do parâmetro θ com espaço de ações $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ e função perda $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.

   (a) Tome como a distribuição a priori $\lambda = \lambda_b$ a distribuição normal $N(0, b^2)$, com densidade de Lebesgue

$$\pi(\theta) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\,b^2}\right\} I_{\mathbb{R}}(\theta),$$

   onde $b > 0$ é conhecido. Prove que a regra de Bayes formal com respeito a essa priori é dada por

$$\delta_b(x) = \left(\frac{b^2}{1+b^2}\right) x.$$

   (b) Obtenha a função de risco $R(\theta, \delta_b)$ e o risco de Bayes $r(\lambda_b, \delta_b)$.

   (c) Mostre que a regra de decisão $\delta^*(x) = x$ é minimax.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Beta$(\theta, 1)$, ou seja, cada observação tem densidade de Lebesgue dada por

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x),$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro. Considere $X = (X_1, \ldots, X_n)$ e defina as variáveis aleatórias

$$Y_i = -\theta \log X_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

   (a) Determine a distribuição de Y_i.

   (b) Encontre o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de $g(\theta) = 1/\theta$.

   (c) Obtenha um teste UMP de nível α para testar

$$H_0 : \theta \leq 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta > 1.$$

Exame de qualificação, doutorado, fevereiro de 2014

Probabilidade

Versão em português (See english version on the other side.)

1. Mostre que a família $(Y_n, n \geq 1)$ nos dois seguintes casos é uniformemente integrável.
(a) V.a. Y_n tem a distribuição binomial com parâmetros n e n^{-1}.
(b) Sejam $X_1, X_2, X_3, \ldots$ v.a. (não necessariamente independentes), com a propriedade que existe uma constante C tal que $\mathbb{E}X_k^2 \leq C$ para todos k. Definimos então $Y_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$.

2. Dê a definição formal de $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$. Enuncie e prove 4 propriedades a sua escolha.

3. Considere uma sequência $(X_n, n \geq 1)$ de v.a. independentes com

$$\mathbf{P}[X_n = -n] = \mathbf{P}[X_n = n] = \mathbf{P}[X_n = 0] = \frac{1}{3}.$$

O TCL vale para esta sequência? Se sim, formule o TCL explicitamente, especificando os parâmetros.
E se

$$\mathbf{P}[X_n = -n^2] = \mathbf{P}[X_n = n^2] = \mathbf{P}[X_n = 0] = \frac{1}{3}?$$

English version

1. Show that in two following cases the family of r.v. $(Y_n, n \geq 1)$ is uniformly integrable.
(a) R.v. Y_n has binomial distribution with parameteres n and n^{-1}.
(b) Consider a sequence of r.v. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (which are not necessarily independent), with the property that there exists a constant C such that $\mathbb{E}X_k^2 \leq C$ for all k. Define $Y_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$.

2. Give a formal definition of $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A})$. Announce and prove 4 properties (the choice is yours).

3. Consider the sequence $(X_n, n \geq 1)$ of independent r.v. with

$$\mathbf{P}[X_n = -n] = \mathbf{P}[X_n = n] = \mathbf{P}[X_n = 0] = \frac{1}{3}.$$

Does the CLT hold for this sequence (if yes, formulate the CLT explicitly, specify the parameteres)?
What if

$$\mathbf{P}[X_n = -n^2] = \mathbf{P}[X_n = n^2] = \mathbf{P}[X_n = 0] = \frac{1}{3}?$$