Exame de Qualificação

Resolva 4 das 5 questões apresentadas. Explique suas respostas detalhadamente. Cada questão deve ser resolvida em folha de resposta separadamente

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{1}{\lambda y} \exp\{-\frac{(\log y)^2}{2\lambda^2}\}$$

com $\lambda > 0$ e $y \in (0, 1)$.

a) Encontre o EMVUMV de λ^2

b) Obtenha a cota inferior de Cramer-Rao para $\tau(\lambda) = \lambda^2$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Considere os seguintes estimatores: $T_1 = |X_1 - X_2|$ e $T_2 = \sqrt{(1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

a) É T_1 não viesado para σ ?

b) É T_2 não viesado para σ ? Se não, encontre um estimador T_2 que seja não viesado para σ.

3. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma uma amostra aleatória de uma densidade $\mathcal{U}(\theta_1, \theta_2)$.

a) Encontre os estimadores não viesados, uniformente de mínima variância de θ_1 e θ_2.

Para os itens seguintes suponha $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta > 0$.

b) Construa um intervalo de confiança para θ **com exatamente** 95% de confiança.

c) Verifique se existe um teste uniformemente mais poderoso para testar a hipótese nula $H_0 : \theta = \theta_0$ contra a hipótese alternativa $H_a : \theta \neq \theta_0$, $\theta_0 > 0$, fixo e conhecido

4. O tempo de vida das lâmpadas de um certo produtor pode ser considerada como tendo distribuição exponencial com taxa de falha θ. Será realizado um experimento onde $3n$ lâmpadas deste produtor são submetidos a tensões iguais a 11V, 200V e 300V, n lâmpadas para cada voltagem. O experimento é realizado para testar se a taxa de falha é proporcional à voltagem.

a) Dê um modelo estatístico, colocando as suposições adotadas.
Qual seria o modelo caso o experimento parasse depois de um tempo t_0?

b) Dê dois testes assintóticos de nível de significância 5% para testar a hipótese.

5. Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Rayleigh dada por:

$$f(x|\theta) = \theta x \exp\{-\frac{1}{2}\theta x^2\} \quad \text{e} \quad F(x|\theta) = 1 - \exp\{\frac{\theta x^2}{2}\}$$

com $x > 0$ e $\theta > 0$.

a) Dê um intervalo de confiança 90% exato e outro assintótico para $\gamma = \theta^{-1}$.

b) Considere agora a seguinte priori, $p(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta)$, $\theta > 0$. (Distribuição $Gama(\alpha, \beta)$.) Calcule a esperança da posteriori da mediana da distribuição Rayleigh.

Qualificação - Probabilidade (Mestrado) - 28/08/2018

Questão	Pontos
1	2
2	2.5
3	1.5
4	2
5	2

Questão 1. Sejam $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ independentes, onde a densidade de X_n, f_n é dada por

$$f_n(x) = e^{-(x+\frac{1}{n})} \text{ se } x \geq -\frac{1}{n} \text{ e } f_n(x) = 0 \text{ se } x < -\frac{1}{n}.$$

Defina $Z_n := \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

i. Verifique se existem: uma constante c e uma função g tais que

$$Z_n - g(Z_n) \to c, \text{ quase certamente, quando } n \to \infty.$$

ii. Em caso afirmativo identifique a constante c e a função g.

Hint: Para p real positivo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$.

Questão 2. Sejam $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ independentes e identicamente distribuidas. com distribuição Weibull de parâmetros λ e k, sendo $k \geq 1$, ou seja com densidade

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)^{k-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}$$

quando $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ em caso contrário. Prove que existe uma constante c (identifique em cada caso, esta constante) tal que:

i.
$$\frac{\Big(\frac{X_1}{\lambda}\Big)^k + \cdots + \Big(\frac{X_n}{\lambda}\Big)^k}{n} \to c, \text{ quando } n \to \infty,$$

quase certamente e em probabilidade.

ii.
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\Big(\frac{X_1}{\lambda}\Big)^k + \cdots + \Big(\frac{X_n}{\lambda}\Big)^k} \to c, \text{ quando } n \to \infty,$$

quase certamente e em probabilidade.

Hint: Se X tem distribuição Weibull(λ, k) então a função geradora de momentos de X é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma\Big(1 + \frac{n}{k}\Big), k \geq 1.$$

Questão 3. Sejam $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ independentes, onde a densidade de X_n, f_n é dada por

$$f_n(x) = e^{-(x+\frac{1}{n})} \text{ se } x \geq -\frac{1}{n} \text{ e } f_n(x) = 0 \text{ se } x < -\frac{1}{n}.$$

Defina $Z_n := X_1 + \cdots + X_n$. Verifique se

$$\frac{Z_n - E(Z_n)}{\sqrt{Var(Z_n)}} \to X$$

em distribuição e quando $n \to \infty$. Onde X segue uma distribuição Normal padrão: N(0,1).
Hint: Defina $Y_n := X_n + \frac{1}{n}$.

Questão 4. Sejam $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ independentes e identicamente distribuidos com distribuição exponencial de parametro α. Isto é $f(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x > 0$ e $f(x) = 0$ en caso contrário. Seja

$$V_n := \max\{X_1, \cdots, X_n\},\ n \geq 1.$$

Prove que existen sequencias numéricas $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ tais que se

$$W_n := a_n V_n + b_n,\ n \geq 1$$

verifica-se:

i. $W_n \to W$, em distribuição, quando $n \to \infty$. Onde W tem distribuição acumulada $F_W(w) = e^{-e^{-w}}$ se $w > 0$ e $F_W(w) = 0$, em caso contrário.

ii. $W_n \to T$, em distribuição, quando $n \to \infty$. Onde T tem distribuição acumulada $F_T(t) = e^{-e^{-\alpha t}}$ se $t > 0$ e $F_T(t) = 0$, em caso contrário.

<u>Hint</u>: $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$, quando $n \to \infty$.

Questão 5. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas e $C_{X,Y}$ tal que

$$C_{X,Y}(u, v) = \text{Prob}(F(X) \leq u, G(V) \leq v),\ u, v \in [0, 1],$$

sendo F a distribuição marginal de X e G a distribuição marginal de Y. Sejam $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ duas funções monótonas e estritas em: Imagem(X) e Imagem(Y) respectivamente. Ambas funções decrescentes. Prove que

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v), \forall u, v \in [0, 1],$$

onde $C_{\alpha(X),\beta(Y)}(\cdot, \cdot)$ segue a mesma convenção especificada para $C_{X,Y}(\cdot, \cdot)$.