ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Fevereiro 2018 - **Topologia Geral.**

NOME:____ RA:______________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

(1) Sejam X e Y dois espaos topológicos e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas funções $f : X \to Y$. Dado um subconjunto compacto A de X e um subconjunto aberto B de Y, seja $(A, B) = \{f; f(A) \subset B\}$. A interseção finita de conjuntos (A, B) pode ser tomada como uma base para uma topologia τ e o espao topológico correspondente $(\mathcal{F}, \tau)$ é chamado *espaço de funções*, e denotado por Y^X.
   (a) Se Y é Hausdorff então Y^X é Hausdorff.
   (b) Se X é métrico e compacto e Y possui base enumerável, então Y^X possui base enumerável.

(2) Seja X um conjunto e τ_1, τ_2 duas topologias em X. Seja $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ a função identidade.
   (a) Mostre que i é contínua $\Leftrightarrow$ τ_1 é mais fina que τ_2.
   (b) Mostre que i é homeomorfismo $\Leftrightarrow$ $\tau_1 = \tau_2$.
   (c) Seja $n \in \mathbb{Z}_+$. Defina a topologia τ_n em $\mathbb{R}$ adicionando à base usual de abertos o conjunto $\{n\}$. Mostre que $(\mathbb{R}, \tau_1)$ e $(\mathbb{R}, \tau_2)$ são homeomorfos, mas que $\tau_1 \neq \tau_2$.

(3) (a) Mostre que se U é um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$, ento U é conexo por caminhos.
   (b) Dê exemplo de um espaço topológico X e um subconjunto $C \in X$ tal que C é conexo, mas não conexo por caminhos.

(4) Mostre que para um espaço X, as seguintes condições são equivalentes:
   (a) toda aplicação $S^1 \to X$ é homotópica a uma aplicação constante, com a imagem sendo um ponto.
   (b) toda aplicação $S^1 \to X$ se estende a uma aplicação $D^2 \to X$.
   (c) $\pi_1(X, x_0) = 0$, para todo $x_0 \in X$.

   Observação sobre a topologia do espaço X no ex.4: você pode assumir que X possui todas propriedades "boas" (por exemplo: Hausdorff, base enumerável, conexo por caminhos, etc...). Você **não** pode assumir que X é simplesmente conexo.

(5) Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços (S^2 denota a 2-esfera):
   (a) $S^2 - \{p\}$.
   (b) $S^2 - \{p, q\}$, $p \neq q$.
   (c) $S^2 = \{p, q, r\}$, onde p, q, r são 3 pontos distintos de S^2.

IMECC/Unicamp – Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação ao Mestrado (fevereiro de 2018)
Disciplina: MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$

Nome: ____

1. (2 pontos) (a) Enuncie detalhadamente o Teorema da Função Implícita e o Teorema da Função Inversa (nos contextos mais gerais que você souber).
   (b) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e suponha que exista $M > 0$ tal que
   $$||g(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|| \leq M||\mathbf{x}||^2$$
   para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que g é localmente invertível perto da origem e calcule $Dg(\mathbf{0})$.

2. (3 pontos) Seja $S(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ a esfera centrada na origem e de raio r.
   (a) Calcule o maior valor da função $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S(\mathbf{0}, r)$.
   (b) Mostre que se a, b, c são números reais não-negativos então $(abc)^{1/3} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$.

3. (3 pontos) Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa, apresentando uma breve demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso.
   (a) O sistema de equações diferenciais
   $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) &= x(t) + (x(t))^3, \\ \dfrac{d}{dt}y(t) &= -y(t) + (y(t))^3, \end{cases} \tag{1}$$
   definido em $\mathbb{R}^2$ admite soluções periódicas com período $T > 0$.

   (b) Se $Q : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é dada por $Q(A) = A^2$ então $DQ(A)B = AB + BA$.
   (c) A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(0,0) = 0$ e
   $$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \ (x,y) \neq (0,0),$$
   é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

4. (2 pontos) (a) Enuncie detalhadamente o Teorema de Stokes no contexto mais geral que você souber.
   (b) Seja $B(n,r)$ a bola de raio r em $\mathbb{R}^n$. Note que $\operatorname{vol} B(2,r) = \pi r^2$ e $\operatorname{vol} B(3,r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, como aprendemos no colégio. Mostre que $\operatorname{vol} B(4,r) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4$.

   > **Dica:** Sabemos que $\operatorname{vol} B(4,r) = \displaystyle\int_{B(4,r)} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$. Parametrize a bola $B(4,r)$ por
   > $$(x,y,z,t) = F(\sigma,\psi,\theta,\phi) = (\sigma \sin\psi \sin\phi \cos\theta, \sigma \sin\psi \sin\phi \sin\theta, \sigma \sin\psi \cos\phi, \sigma \cos\psi),$$
   > com $(\sigma,\psi,\theta,\phi) \in [0,r] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$. Use o Teorema de Stokes.

   Observação: É verdade, mas você não precisa provar, que fixado um raio qualquer $r > 0$ temos $\operatorname{vol} B(n,r) \to 0$ quando $n \to \infty$. Reflita!

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!