Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
1ª Parte: Inferência Avançada
22 de Fevereiro de 2018

Instruções:

1. A prova é composta de 3 questões, que devem ser respondidas de forma clara e completa.
2. A duração da prova é de 3 horas.
3. Não é permitido consulta.
4. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

1. Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes, tais que $X_i \sim$ Poisson$(\theta\, e^{\beta z_i})$, onde $z_1, \ldots, z_n$ são constantes conhecidas, não todas iguais. Ou seja, a função de probabilidade de X_i é dada por

$$f_{X_i}(x_i|\theta, \beta) = \frac{\exp\{-\theta\, e^{\beta z_i}\}\, (\theta\, e^{\beta z_i})^{x_i}}{x_i!}\, I_{\mathbb{N}}(x_i),\ \theta > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Seja $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Poisson(λ), $\lambda > 0$, e suponha $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ independentes.

(a) Obtenha a estatística de Rao–Escore $Q_n^S(\underset{\sim}{X})$ para testar a hipótese $H_0 : \beta = 0$ versus $H_1 : \beta \neq 0$. Especifique a região crítica do teste de nível assintótico α.

Sugestão: Defina $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{z} = \dfrac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$, $M_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n}$ e $M_{xz} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i z_i}{n}$.

(b) Para $\beta = 0$, determine o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de $(\theta - \lambda)^2$.

(c) Para $\beta = 0$, considere $\Lambda_n(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y})$ a estatística do teste da razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \lambda$ versus $H_1 : \theta \neq \lambda$. Mostre que

$$-2\, \log \Lambda_n(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = 2n \left[\bar{X} \log \bar{X} + \bar{Y} \log \bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})\, \log \hat{\theta}_0\right],$$

onde $\hat{\theta}_0 = \dfrac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$. Especifique a região crítica do TRV de nível assintótico α.

2. Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da distribuição exponencial deslocada, com densidade de Lebesgue em $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}\, I_{(\theta,\infty)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Considere as estatísticas $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $V(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)} - X_{(1)}$, onde $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Mostre que T e V são independentes.

(b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ.

(c) Para $n = 1$, considere um modelo bayesiano em que a priori para θ é a distribuição Gama$(2, 1)$, com densidade dada por $\pi(\theta) = \theta\, e^{-\theta}\, I_{(0,\infty)}(\theta)$. Encontre o estimador de Bayes de θ, sob a perda quadrática. (Suponha $X > 0$).

3. Considere uma amostra aleatória $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de tamanho n de uma distribuição com densidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2(x-\beta)}{\theta^2}\, I_{(\beta,\beta+\theta]}(x),\ \theta > 0,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é conhecido.

(a) Para uma amostra de tamanho n e assumindo que $\theta \sim U(0, 1)$, determine a distribuição a posteriori de θ.

(b) Para uma amostra de tamanho 1, encontre o estimador de Bayes com respeito à perda $L(\theta, a) = \theta^2(\theta - a)^2$.

(c) Para $\beta = 0$ e uma amostra de tamanho n, obtenha um teste UMP de nível α para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

Exame de qualificação, doutorado, 23/02/2018

Probabilidade

- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie cada questão em uma nova folha. Use só um lado de folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.*
- *Enuncie todos os teoremas utilizados.*

1. Seja μ uma medida aditiva (pode não ser σ-aditiva) sobre uma álgebra $\mathcal{A}$. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, disjuntos e tais que $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Prove que $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

2. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mu(\mathcal{A})$ - a classe monótona gerada por $\mathcal{A}$. Prove que $\mu(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

3. Seja $0 < r < \infty$, $X_n \in L^r$ para todo n, $X_n \to X$ em probabilidade. Prove que as seguintes condições são equivalentes:
(a) a familia $\{|X_n|^r,\ n \in \mathbb{N}\}$ é uniformemente integrável;
(b) $X_n \to X$ em L^r;
(c) $\mathbb{E}(|X_n|^r) \to \mathbb{E}(|X|^r) < \infty$.

4 Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes. Mostre que então v.a. $\limsup X_n$ e $\liminf X_n$ são degeneradas (constantes quase certamente, pode ser $\pm\infty$).

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. com $\mathbb{E}X_i = 0$, $\operatorname{Var} X_i = 1$. Seja $S_n = X_1 + \cdots X_n$. Prove que

$$\frac{S_n}{n^{1/2} \ln n} \to 0 \quad \text{q.c.}$$