Exame de Qualificação de Doutorado
Análise Funcional
Departamento de Matemática, UNICAMP
19 de Fevereiro de 2018

Q	Notas
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
$\sum$	

Nome:____

RA:____

Assinatura:_______________________________________

Observação: É proibido desgrampear as folhas da prova. Respostas sem justificativas, ou que não incluam os cálculos necessários, não serão consideradas. Desejo-vos uma boa prova!

Notações: $\mathcal{B}(X,Y)$ - Espaço de operadores lineares limidados de X para Y. $\mathcal{R}(T)$ - Imagem ou Rango de operador T.

(1) Sejam $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ um espaço vetorial normado com $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ e

$$T : C([0,1]) \to C([0,1])$$

dado por

$$(Tf)(x) = x\int_0^x f(y)dy.$$

(a) (**1 ponto**) Mostre que T é linear, limitado e calcule $\|T\|$.

(b) (**1 ponto**) Mostre que, $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to C([0,1])$ existe mas não é limitado.

(2) (**2 pontos**) Seja X um espaço de Banach. Mostre que X é separável se X^* é separável. O que pode dizer sobre recíproca?

(3) Sejam X, Y espaços vetoriais normados.

(a) (**1 ponto**) Define uma aplicação aberta de X para Y e dê um exemplo. Mostre que a imagem de conjunto fechado sob a aplicação aberta não necesariamente é fechado.

(b) (**1 ponto**) Se X é compacto e $T : X \to Y$ é um operador linear, bijetivo e fechado, mostre que T^{-1} é limitado.

(4) Seja H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset H$ uma sequência em H. Mostre as seguintes.

(a) (**1 ponto**) Se o limite $x_n \rightharpoonup x \in H$ existe, ele é único e $\|x_n\|$ é limitado.

(b) (**1 ponto**) Para $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \rightharpoonup Tx$. (Dica: Use Representação de Riesz)

(5) (a) (**1 ponto**) Sejam X, Y espaços de Banach. Mostre que se $(T_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ é uma sequência de operadores de posto finito e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \to 0$ então T é compacto. O que pode dizer sobre recíproca?

(b) (**1 ponto**) Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ linear e limitado. Seja $(x_n) \subset H$ uma sequência limitada tal que (T^*Tx_n) converge. Mostre que (Tx_n) é de Cauchy. Mais ainda mostre que T é compacto se e somente se T^*T é compacto.

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Fevereiro 2018 - **Topologia Algebraica.**

NOME:____ RA:________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

Escolha e resolva 6 das questões abaixo

1) Mostrar que todo mapa do plano projetivo em si mesmo que é não trivial no grupo fundamental pode ser levantado a um mapa $T : S^2 \to S^2$ tal que $T(-x) = -T(x)$ para todo $x \in S^2$.

2) Calcule $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$.

3) Calcular

i- Os grupos de homologia da garrafa de Klein, e
ii- Os grupos de homologia de $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$.
i- $H_*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{R})$,
ii- $H_*(S^4 \times S^2, \mathbb{Z}_4)$
iii- $H_*(K, \mathbb{Z}_2)$ para K a garrafa de Klein.

4)

i- Assuma que existe a fibração $S^k \cdots S^{n+k} \to S^n$. Mostrar que $k = n - 1$.
ii- Calcular $\pi_i(\mathbb{C}P^n)$ para $1 \leq i \leq 2n + 1$

5)

i- Seja $F \cdots E \to^p B$ uma fibração e assuma que admite uma seção, i.e. existe um mapa contínuo $\sigma : B \to E$ tal que $p \circ \sigma = I_B$. Mostrar que $\pi_n(E) \simeq \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$ para $n \geq 2$.
ii- Calcule $H_n(S^n \times S^m)$ para $m > n$.

6) Mostre que $S^1 \vee S^2 \vee S^3$ e $S^1 \times S^2$ não tem o mesmo tipo de homotopia.

7) Mostrar que se $f : S^n \to S^n$ é um mapa contínuo que não é uma equivalência homotópica, então f possui um ponto fixo.

ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

Exame Qualificação Fevereiro 2018 - **Geometria Riemanniana**.

NOME:____ RA:________________.

Incluir na prova todas as contas feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Bom Trabalho!

Escolha e resolva 6 das questões abaixo

1) Mostre que toda variedade Homogênea é completa.

2) Calcule explícitamente as geodésicas da esfera.

3) Uma variedade (M, g) é uma variedade Einstein se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y).$$

Mostre que λ deve ser a curvatura escalar.

4) Mostre que o Toro (como variedade abstrata) não admite uma métrica de curvatura positiva.

5) Considere o Toro com a métrica plana. Mostre que existe uma geodésica sem pontos conjugados mas que não é minimizante.

6) Suponha que M e $\tilde{M}$ sejam variedades riemannianas e que $\pi : \tilde{M} \to M$ seja um mapa de recobrimento suave que também é uma isometria local. Mostre que se M ou $\tilde{M}$ é completa, então a outra também o é.

7) Em uma variedade riemanniana (M, g) com a conexão de Levi-Civita, considere uma vizinhança U na qual $R \neq 0$. Mostre que nessa vizinhança não pode existir um referencial paralelo.

Exame de Qualificação, Doutorado– 23/02/2018
MM 444, Algebra não Comutativa

1. **(a)** [1 pt] – Enunciar o Teorema de Skolem e Noether.

(b) [1.5 pt] – Seja $\mathcal{D}$ uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre o corpo real, $\mathbb{R}$. Mostre que $\mathcal{D}$ é isomorfo com álgebra de divisão de quatérnios.

2. **(a)** [1 pt] –Definir o radical de Jacobson $J(R)$ de um anel R. Mostre que $J(R/J(R)) = 0$.

(b) [1.5 pt] – Seja A uma ideal do anel R. Mostre que $J(A) = A \cap J(R)$.

3. **(a)** [0.5 pt] – Definir o grupo de Brauer $B(F)$ de um corpo F. (Justificar que é um grupo!)

(b) [1.5 pt]– Mostre que um anel A é semiprimitivo se, e somente se, A possui um módulo à esquerda M semi-simples e fiel.

4. Responder falsa ou verdadeira a cada uma das afirmações abaixo. Justificar as respostas!

(Resposta sem a devida justificativa não ser á considerada.)

(a) [1 pt]– O grupo de Brauer dos reais é um group cíclico de ordem 4.

(b) [1 pt] – Todo anel primitivo à esquerda é primo.

(c) [1 pt]– Se A é primo e artiniano à esquerda, então A é simples.